

时滞速度反馈作用下弹性梁的主共振分析*

彭 剑¹, 张 改¹, 孙测世²

(1. 湖南科技大学 土木工程学院, 湖南 湘潭 411201;
2. 重庆交通大学 土木工程学院, 重庆 400074)

摘要: 采用时滞速度反馈控制策略对轴力作用下的弹性梁进行振动控制,根据 Newton 第二定律建立压电耦合弹性梁的非线性振动控制模型,运用直接法得到时滞反馈作用下弹性梁主共振的一阶近似解,得出系统响应与控制参数的关系.结果表明,主共振的响应存在多解和跳跃现象,调节控制增益和时滞值可以有效抑制大幅振动.

关键词: 时滞反馈; 主共振; 弹性梁; 轴力; 直接法

中图分类号: O322; TB123 **文献标志码:** A

doi: 10.21656/1000-0887.370083

引 言

端部非刚性支承梁在工程机械、航空航天、桥梁及建筑结构等领域均有应用,其在外部荷载作用下易发生大幅振动,因此其非线性振动控制问题得到了广泛的关注^[1].其中有效的控制方法是采用压电复合材料构成主动控制系统^[2],而时滞反馈控制技术发展为其振动控制提供了新的思路.

王在华和胡海岩^[3-4]系统阐述了时滞动力系统及其最新研究成果.蔡国平和陈龙祥^[5-6]从理论和实验方面对柔性梁的时滞主动控制进行研究,指出可以利用时滞来提高控制效果.徐鉴和陆启韶^[7]针对非自治时滞反馈系统的周期解分岔和混沌进行了深入研究.赵艳影和徐鉴^[8]采用直接法研究了含有时滞动力吸振器的两自由度结构的动力学行为,重点分析了主系统振动及其稳定性.Masoud 和 Nayfeh 等^[9-10]采用状态时滞反馈对起重机大幅振动进行抑制,取得了很好的控制效果.安方和陈卫东^[11]提出了一种基于时滞加速度反馈的控制器设计方法.孙中奎等^[12]针对窄带激励下带有时滞反馈的 Duffing 非线性的主共振响应进行了研究.齐欢欢等^[13]研究了超音速飞行器机翼颤振的时滞反馈控制.王万永和陈丽娟^[14]针对具有时滞耦合的 n 个 Van der Pol 振子弱共振双 Hopf 分岔开展研究.Daqaq 和 Alhazza 等^[15]研究了具有时滞加速度反馈的悬臂梁的线性和非线性响应,同时也考虑了受迫振动.彭剑等^[16]研究了时滞反馈及轴力作用下弹性梁的非线性自由振动.而不同时滞反馈及轴力作用下弹性梁控制系统的主振动还有待研究.

* 收稿日期: 2016-03-22; 修订日期: 2016-04-19

基金项目: 国家自然科学基金(11402085);国家重点基础研究发展计划(973计划)(2015CB057702);湖南省教育厅资助项目(14C0464);湖南省优秀博士论文资助项目(YB2015B035)

作者简介: 彭剑(1982—),男,讲师,博士,硕士生导师(通讯作者. E-mail: pengjian@hnu.edu.cn).

本文采用时滞速度反馈控制策略,对压电耦合弹性梁进行控制,采用直接法对运动方程以及相应的边界条件进行摄动求解,研究其主共振响应.基于建立的时滞动力系统,得到了主共振响应的一阶近似解,分析了控制增益和时滞值对主共振响应的影响.

1 数学模型

轴力作用下弹性支座梁如图 1 所示,采用压电作动器和传感器共同构成的控制系统进行闭环反馈控制.其中梁为 Euler-Bernoulli 梁,梁不可伸长且忽略其扭转和剪切变形,假设压电材料理想地安装在梁内,不考虑压电材料的质量及刚度影响.

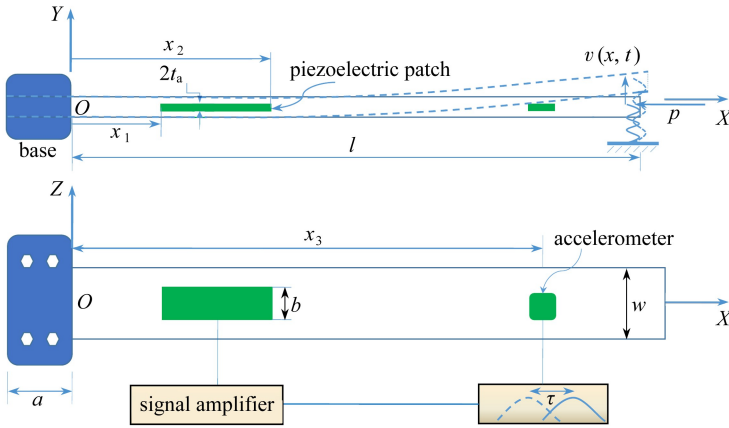


图 1 时滞反馈作用下梁控制系统结构图

Fig. 1 Schematic of a beam with delayed feedback actuation

利用 Newton 第二定律,可以得到受控弹性支座梁的非线性动力学方程^[16-17]:

$$m\ddot{v} + c\dot{v} - EA\rho(t)v'' + EIv''' + kv\delta(x - l) - \frac{EA}{2l}v'' \int_0^l v'^2 dx = q(x, t) + F\cos(\Omega t), \tag{1}$$

边界条件为

$$v(0, t) = 0, v'(0, t) = 0, v''(l, t) = 0, EIv'''(l, t) + kv(l, t) = 0, \tag{2}$$

其中, v 为横向位移, m, c 分别为梁的线密度、阻尼系数, E 为梁的弹性模量, A 为梁的横截面积, l 为梁的长度, w 为梁宽, $p(t)$ 为轴向作用力, k 为弹性刚度系数, δ 是 Kronecker 函数, $q(x, t) = \partial^2 M / \partial x^2$ 是由压电作动器产生的分布荷载^[16], F 和 Ω 分别表示外激励幅值和频率. M 为压电材料产生的应力生成关于整个结构中中性轴的力矩,其表达式为

$$M = \frac{3bdd_{31}E_aEI V_a(t)}{3EI + 6bE_a t_a d^2 + 2bE_a t_a^3} \times [H(x - x_1) - H(x - x_2)], \tag{3}$$

其中, b 为压电材料宽度, E_a 为压电材料的弹性模量, I 为截面惯性矩, d_{31} 为压电材料的电荷压电常数, $2t_a$ 表示压电作动器的厚度, $V_a(t)$ 表示外加控制电压, d 表示压电材料中截面距梁结构中截面距离, x_1, x_2 分别表示作动器固定在梁上的位置坐标, x_3 表示传感器的位置坐标, H 为 Heaviside 函数.考虑压电作动的驱动电压采用时滞速度反馈策略,记为

$$V_a(t) = -k_m \dot{v}(t - \tau), \tag{4}$$

其中 k_m 为控制增益, τ 为时滞,均为常数.为便于分析并得到更具一般性的结论,引入以下无量纲参数:

$$v^* = \frac{v}{l}, c^* = \frac{c}{m}, x^* = \frac{x}{l}, t^* = t \sqrt{\frac{EI}{Ml^4}}, f^* = \frac{f}{m}, k_{vn}^* = \frac{k_{vn}}{m}.$$

可得到弹性梁的无量纲运动方程:

$$\ddot{v} + c\dot{v} + Lv = f\cos(\Omega t) + G_3(v, v, v) + k_{vn}\dot{v}(t - \tau), \quad (5)$$

其中已经忽略了式中的星号, $Lv = kv\delta(x - 1) - \frac{EAP(t)}{m}v'' + \frac{EI}{m}v''''$ 为线性算子, $G_3(v, v, v) =$

$\frac{EA}{2ml}v'' \int_0^l v'^2 dx$ 为立方非线性算子.

2 主共振解及其稳定性

根据直接法对运动方程(5)进行求解^[17], 梁的位移可表示为

$$v(x, t; \varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i v_i(x, T_0, T_1), \quad (6)$$

其中 ε 为小参数 ($\varepsilon \leq 1$), $T_i = \varepsilon^i t$ ($i = 0, 1$), 且有 $\partial/\partial t = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots$, $D_i = \partial/\partial T_i$. 为研究受控梁的主共振响应, 引入调谐参数 σ 使其满足: $\Omega = \omega_n + \varepsilon^2 \sigma$, 其中 ω_n 为系统的第 n 阶固有频率. 另外, 为平衡非线性项效应, 将 c 和 f 分别调整为 εc 和 $\varepsilon^2 f$. 将式(6)代入式(5), 并按 ε 的各阶系数调整结果, 可以得到

order ε

$$D_0^2 v_1 + Lv_1 = 0, \quad (7)$$

order ε^2

$$D_0^2 v_2 + Lv_2 = G_3(v_1, v_1, v_1) + f\cos(\Omega t), \quad (8)$$

其中各式均满足相应的边界条件. 对于主共振响应而言, 式(7)的解可以写成

$$v_1(x, T_0, T_1) = A_n(T_1) e^{i\omega_n T_0} \phi_n(x) + cc, \quad (9)$$

其中 A_n 为幅值, cc 表示复共轭项, $\phi_n(x)$ 为第 n 阶模态, 表达式见附录. 将式(9)代入式(8), 得

$$D_0^2 v_2 + Lv_2 = (A_n e^{2i\omega_n T_0} + A_n \overline{A_n}) G_3(\phi_n, \phi_n, \phi_n) + i\omega_n k_{vn} A_n(T_1) e^{i\omega_n(T_0 - \tau)} \phi_n(x) + cc. \quad (10)$$

利用正交化条件, 可以得到可解性条件:

$$i\omega_n(2A_n' + \mu_n A_n) + 3\Gamma_{nnnn} A_n^2 \overline{A_n} + ik_{vn} \omega_n^2 A_n \exp(-i\omega_n \tau) = \frac{1}{2} f_n \exp(i\sigma T_1), \quad (11)$$

其中

$$\mu_n = \frac{1}{2} \int_0^1 c \phi_n^2(x) dx, f_n = \int_0^1 f \phi_n(x) dx, \Gamma_{nnnn} = \int_0^1 G_3(\phi_n, \phi_n, \phi_n) \phi_n dx.$$

令

$$A_n = \frac{1}{2} a_n \exp(i\beta_n), \quad (12)$$

式中 $a_n(T_1)$ 和 $\beta_n(T_1)$ 都是关于 T_1 的实函数, 将式(12)代入式(11), 分离实虚部, 得

$$\begin{cases} a_n' = -\frac{\mu_e a_n}{2} + \frac{f_n}{2\omega_n} \sin \gamma_n, \\ a_n \gamma_n' = a_n \sigma_e - \frac{3\Gamma_{nnnn} a_n^3}{8\omega_n} + \frac{f_n}{2\omega_n} \cos \gamma_n, \end{cases} \quad (13)$$

其中

$$\gamma_n = \sigma T_1 - \beta_n, \mu_e = \mu_n + k_{vn} \cos(\omega_n \tau), \sigma_e = \sigma - \frac{1}{2} k_{vn} \sin(\omega_n \tau).$$

当 $a'_n = \gamma'_n = 0$ 时存在稳态运动,对应着式(13)的奇点,亦对应着方程组

$$\begin{cases} \frac{a_n \mu_e}{2} = \frac{f_n}{2\omega_n} \sin \gamma_n, \\ -a_n \sigma_e + \frac{3\Gamma_{nnnn} a_n^3}{8\omega_n} = \frac{f_n}{2\omega_n} \cos \gamma_n \end{cases} \quad (14)$$

的解,将两式取平方后相加,得到主共振的幅频响应方程:

$$\left(\frac{\mu_e a_n}{2}\right)^2 + \left(-a_n \sigma_e + \frac{3\Gamma_{nnnn} a_n^3}{8\omega_n}\right)^2 = \frac{f_n^2}{4\omega_n^2}. \quad (15)$$

因此,主共振的稳态一阶近似解为

$$q_n(t) = a_n \cos(\Omega t - \gamma_n) + O(\varepsilon). \quad (16)$$

下面通过研究式(13)的奇点形状来决定稳态运动的稳定性.设

$$\gamma_n = \gamma_{n0} + \gamma_{n1}, a_n = a_{n0} + a_{n1}. \quad (17)$$

将式(17)代入式(13),保留到 a_{n1}, γ_{n1} 的线性项,有

$$\begin{cases} a'_{n1} = -\left(\frac{\mu_n + k_{vn} \cos(\omega_n \tau)}{2}\right) a_{n1} + \left(\frac{f_n}{2\omega_n} \cos \gamma_{n0}\right) \gamma_{n1}, \\ \gamma'_{n1} = -\left(\frac{f_n \cos \gamma_{n0}}{2\omega_n a_{n0}^2} + \frac{3\Gamma_{nnnn} a_{n0}}{4\omega_n}\right) a_{n1} - \left(\frac{f_n \sin \gamma_{n0}}{2\omega_n a_{n0}}\right) \gamma_{n1}. \end{cases} \quad (18)$$

式(18)的特征方程如下:

$$\begin{vmatrix} -\frac{\mu_e}{2} - \lambda_n & -a_{n0} \left(\sigma_e - \frac{3\Gamma_{nnnn} a_{n0}^2}{8\omega_n}\right) \\ \frac{1}{a_{n0}} \left(\sigma_e + \frac{9\Gamma_{nnnn} a_{n0}^2}{8\omega_n}\right) & -\frac{\mu_e}{2} - \lambda_n \end{vmatrix} = 0. \quad (19)$$

展开式(19)中的行列式得

$$\lambda_n^2 + \mu_e \lambda_n + \rho_n = 0, \quad (20)$$

其中

$$\rho_n = \left(\frac{\mu_e}{2}\right)^2 + \left(\sigma_e - \frac{3\Gamma_{nnnn} a_{n0}^2}{8\omega_n}\right) \left(\sigma_e - \frac{9\Gamma_{nnnn} a_{n0}^2}{8\omega_n}\right).$$

因此,当 $\rho_n < 0$ 时稳态运动是不稳定的,否则是稳定的.

根据式(15)可知,系统的响应幅值是调谐参数 σ , 时滞参数 τ 以及外激励幅值 f_n 的函数. 当 $(\sigma_e - 3\Gamma_{nnnn} a_n^2 / (8\omega_n))^2 = 0$ 时, a_n^2 有最大值,因此可得主共振响应幅值的峰值为

$$a_{np} = \frac{f_n}{|\mu_n + k_{vn} \cos(\omega_n \tau)| \omega_n}. \quad (21)$$

3 数值分析与讨论

本节对受控梁第一阶模态的主共振响应进行数值分析,讨论其与控制增益和时滞量之间的关系.梁和压电作动器的几何尺寸和材料特性参数如下:

梁

$$l = 9.962 \times 10^{-1} \text{ m}, E = 34.5 \text{ GPa}, I = 9.866 2 \times 10^{-8} \text{ m}^4, A = 1.536 \times 10^{-3} \text{ m}^2, \\ k = 6.872 \times 10^4 \text{ N/m}, m = 4.4 \text{ kg/m}, p = 2.574 \times 10^{-1} \text{ kN};$$

压电激励器

$$d_{31} = -2.70 \times 10^{-10} \text{ m/V}, E_a = 108 \text{ GPa}, b = 2 \times 10^{-3} \text{ m}, 2t_a = 4 \times 10^{-4} \text{ m}, \\ d = 5 \times 10^{-3} \text{ m}, x_1 = 1.2 \times 10^{-1} \text{ m}, x_2 = 1.8 \times 10^{-1} \text{ m}, x_3 = 8.0 \times 10^{-1} \text{ m}.$$

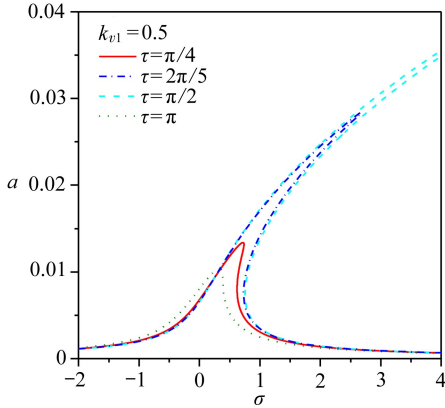


图2 不同时滞值时受控梁第一模态主共振响应幅频曲线

Fig. 2 The amplitude-frequency curves for the 1st-mode primary resonance responses of the beam with time delay

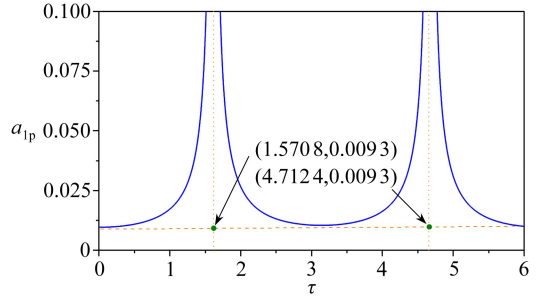


图3 不同时滞值时受控梁第一模态主共振响应峰值曲线

Fig. 3 The peak amplitude curves for the 1st-mode primary resonance responses of the beam with time delay

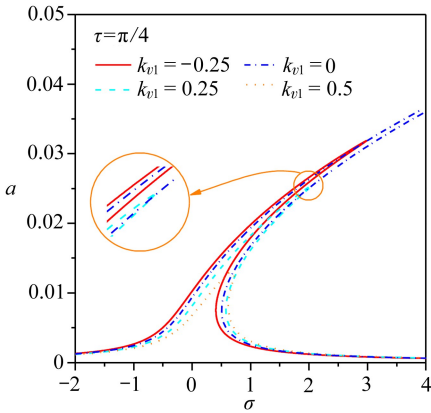


图4 不同控制增益值时受控梁第一模态主共振响应幅频曲线

Fig. 4 The amplitude-frequency curves for the 1st-mode primary resonance responses of the beam with control feedback gain

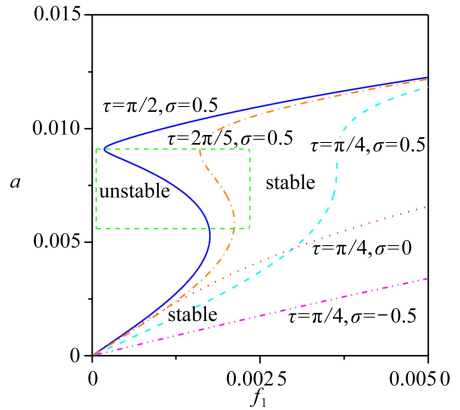


图5 时滞作用下主共振响应幅频-激励幅值曲线

Fig. 5 The response-excitation amplitude curves for the primary resonance with time delay

选取 $f_1 = 0.005$, $\mu_1 = 0.02$, 图2给出了当控制增益 $k_{v1} = 0.5$ 时不同时滞值情况下受控梁第一模态 ($n = 1$) 主共振响应的幅频曲线. 可以看出, 随着时滞 τ 的增大, 响应幅值先增大后减小. 值得指出的是, 图3给出的主共振响应的峰值曲线也证明了这一点, 在时滞 $\tau \in (k\pi, k\pi + \pi/2)$, $k = 0, 1, \dots$ 区间, 响应幅值随着 τ 增大而增大, 且增长速率明显高于时滞值增长速率. 同

时,随着时滞值增大,幅频响应曲线弯曲程度增强,这说明非线性特征更为明显.同时可以发现,不同的时滞值对应幅频曲线存在多值区域和跳跃现象.而在 $\tau \in (k\pi + \pi/2, k\pi + \pi)$ 区间则递减,呈现出周期性变化(周期 $T = \pi$).

图4给出的是当控制增益 k_{v1} 取不同值时,受控梁第一模态($n = 1$)主共振响应的幅频曲线,从图中可以看出,当 $k_{v1} = 0$,即无控状态时,振幅较大,而当 $k_{v1} \neq 0$ 时,即采用时滞速度反馈控制能较好地抑制大幅振动.特别地,当时滞 $\tau = \pi/4$ 时,随着控制增益的增大,梁第一阶主共振响应幅值迅速下降.因此,可以通过调整控制增益值的大小来达到较好的控制效果,值得指出的是,当 k_{v1} 由负值逐渐增大为正值时,响应幅值峰值逐渐减小,可见负反馈效果更为明显,即负反馈优于正反馈^[18].

图5给出了不同时滞 τ 值和 σ 值的情况下系统第一模态的主共振响应,这些曲线直接由式(20)得到.其中方框内的点为不稳定解,其余区域均为稳定解.注意到,随着调谐参数 σ 的变化,曲线有单值和多值的,并且不难发现,不稳定值仅出现在多值曲线上,随着 σ 值的增大即激励频率的增大,出现了单值到多值的转换,同时可以发现,随着时滞 τ 增大,系统响应幅值相应增大,曲线弯曲程度增强.

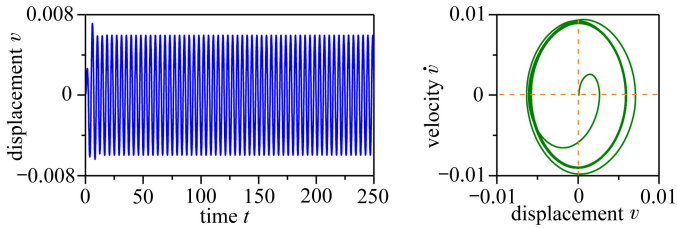


图6 时滞 $\tau = \pi/4$ 时主共振响应的时程历程和相图

Fig. 6 The time history curves and phase diagram of the primary resonance response with time delay, $\tau = \pi/4$

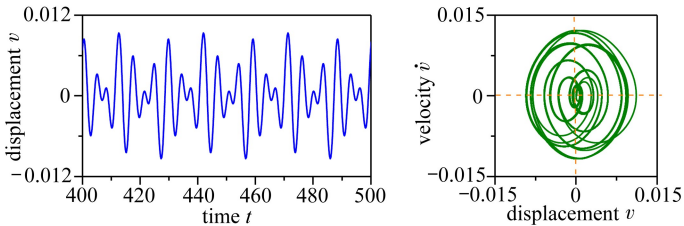


图7 时滞 $\tau = \pi/2$ 时主共振响应的时程历程和相图

Fig. 7 The time history curves and phase diagram of the primary resonance response with time delay, $\tau = \pi/2$

图6和图7分别给出了当 $k_{v1} = 0.5$ 时,时滞值 $\tau = \pi/4$ 和 $\tau = \pi/2$ 时受控梁的时程曲线和相图.从图中得出,随着时滞值的增大,响应明显增大并显现周期运动.

4 结 论

本文针对受控压电耦合梁系统,采用时滞速度反馈对该系统的主共振响应进行了解析研究,得到其一阶近似解,并对系统主共振响应进行参数分析.结果表明:主共振幅频响应受时滞值周期性影响,在区间 $(k\pi, k\pi + \pi/2)$, $k = 0, 1, \dots$,其振幅随时滞值增大而增大,而在区间 $(k\pi + \pi/2, k\pi + \pi)$,其振幅随时滞值增大而减小,且存在多值区域和跳跃现象.因此,当控制增益

值取定时,必须控制时滞量的选取范围,以免导致系统响应的显著增大,甚至失稳.控制增益对振幅影响也较大,负反馈效果更为明显.因此,在具体的控制系统设计时,应注重控制增益和时滞值的选取以达到最佳控制效果.

附录 线性特征值问题

将式(1)线性化,其解按如下级数展开:

$$v(x, t) = \phi(x)Y(t). \quad (A1)$$

将式(A1)代入式(1)和式(2),得到

$$\begin{cases} \phi^{iv}(x) + g^2\phi''(x) - a^4\phi(x) = 0, \\ \phi(0) = 0, \phi'(0) = 0, \phi''(l) = 0, EI\phi'''(l) + k\phi(l) = 0. \end{cases} \quad (A2)$$

由式(A2)可得正交解如下:

$$\phi_i(x) = A_i \left[\cos(\delta_i x) - \cosh(\varepsilon_i x) - \sigma_i \left(\sin(\delta_i x) - \frac{\delta_i}{\varepsilon_i} \sinh(\varepsilon_i x) \right) \right], \quad (A3)$$

其中

$$\sigma_i = \frac{\delta_i^2 \cos(\delta_i l) + \varepsilon_i^2 \cosh(\varepsilon_i l)}{\delta_i^2 \sin(\delta_i l) + \varepsilon_i \delta_i \sinh(\varepsilon_i l)},$$

$$\delta_i = \sqrt{(r_i + g^4/2)^{1/2} + g^2/2},$$

$$\varepsilon_i = \sqrt{(r_i + g^4/4)^{1/2} - g^2/2},$$

A_i 由正交化条件给出:

$$\int_0^l \phi_i(x) \phi_j(x) dx = \delta_{ij}, \quad (A4)$$

δ_{ij} 是 Kronecker 函数,因此可得频率方程:

$$\begin{aligned} EI\delta_i^5 + EI\varepsilon_i^4\delta_i + 2EI\varepsilon_i^4\delta_i \cos(\delta_i l) \cosh(\varepsilon_i l) + EI(\varepsilon_i\delta_i^4 - \varepsilon_i^3\delta_i^2) \sin(\delta_i l) \sinh(\varepsilon_i l) - \\ k(\varepsilon_i^2 + \delta_i^2) \sin(\delta_i l) \cosh(\varepsilon_i l) + k(\delta_i^3/\varepsilon_i + \varepsilon_i\delta_i) \cos(\delta_i l) \sinh(\varepsilon_i l) = 0, \end{aligned} \quad (A5)$$

该超越方程的解给出 a_i , 相应的圆频率为

$$\omega_i = a_i^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (A6)$$

参考文献 (References):

- [1] Anthony D K, Elliott S J. Comparison of the effectiveness of minimizing cost function parameters for active control of vibrational energy transmission in a lightly damped structure[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, **237**(2): 223-244.
- [2] HAN Sang-jun. Active/passive seismic control of structures[D]. PhD Thesis. Washington DC: The Catholic University of America, 2002.
- [3] 王在华, 胡海岩. 时滞动力系统的稳定性与分岔: 从理论走向应用[J]. *力学进展*, 2013, **43**(1): 3-20. (WANG Zai-hua, HU Hai-yan. Stability and bifurcation of delayed dynamics systems: from theory to application[J]. *Advances in Mechanics*, 2013, **43**(1): 3-20. (in Chinese))
- [4] HU Hai-yan, WANG Zai-hua. *Dynamics of Controlled Mechanical Systems With Delayed Feedback*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2002.
- [5] 蔡国平. 存在时滞的柔性梁的振动主动控制[J]. *固体力学学报*, 2004, **25**(1): 29-34. (CAI Guo-ping. Active vibration control of a flexible beam with time delay in control[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2004, **25**(1): 29-34. (in Chinese))
- [6] 陈龙祥, 蔡国平. 旋转运动柔性梁的时滞主动控制实验研究[J]. *力学学报*, 2008, **40**(4): 520-

- 527.(CHEN Long-xiang, CAI Guo-ping. Experimental study on active control of a rotating flexible beam with time delay[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2008, **40**(4): 520-527.(in Chinese))
- [7] 徐鉴, 陆启韶. 非自治时滞反馈控制系统的周期解分岔和混沌[J]. 力学学报, 2003, **35**(4): 443-451.(XU Jian, LU Qi-shao. Bifurcation and chaos due to time delay in a delayed control non-autonomous system[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, **35**(4): 443-451.(in Chinese))
- [8] 赵艳影, 徐鉴. 时滞动力吸振器及其对主系统振动的影响[J]. 振动工程学报, 2006, **19**(4): 548-552.(ZHAO Yan-ying, XU Jian. Delayed resonator and its effects on vibrations in primary system[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2006, **19**(4): 548-552.(in Chinese))
- [9] Masoud Z N, Daqaq M F, Nayfeh N A. Pendulation reduction on small ship-mounted telescopic cranes[J]. *Journal of Vibration and Control*, 2004, **10**(8): 1167-1179.
- [10] Masoud Z N, Nayfeh A H, Al-Mousa A. Delayed position-feedback controller for the reduction of payload pendulations on rotary cranes[J]. *Journal of Vibration and Control*, 2003, **9**(1/2): 257-277.
- [11] 安方, 陈卫东. 时滞加速度反馈的振动主动控制方法研究[J]. 振动工程学报, 2012, **25**(4): 401-410.(AN Fang, CHEN Wei-dong. Active vibration control using time-delayed acceleration feedback[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2012, **25**(4): 401-410.(in Chinese))
- [12] 孙中奎, 徐伟, 杨晓丽. 窄带激励下带有时滞反馈的非线性动力系统的响应[J]. 振动工程学报, 2006, **19**(1): 57-64.(SUN Zhong-kui, XU Wei, YANG Xiao-li. Response of nonlinear system to random narrow-band excitation with time delay state feedback[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2006, **19**(1): 57-64.(in Chinese))
- [13] 齐欢欢, 徐鉴, 方明霞. 超音速飞行器机翼颤振的时滞反馈控制[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(2): 210-218.(QI Huan-huan, XU Jian, FANG Ming-xia. Time-delayed feedback control of flutter for supersonic airfoils[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(2): 210-218.(in Chinese))
- [14] 王万永, 陈丽娟. 具有时滞耦合的 n 个 Van der Pol 振子弱共振双 Hopf 分岔[J]. 应用数学和力学, 2013, **34**(7): 764-770.(WANG Wan-yong, CHEN Li-juan. Weak resonant double Hopf bifurcation of n Van der Pol oscillators with delay coupling[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(7): 764-770.(in Chinese))
- [15] Daqaq M F, Alhazza K A, Arafat H N. Non-linear vibrations of cantilever beams with feedback delays[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2008, **43**(9): 962-978.
- [16] 彭剑, 赵珖冰, 王连华. 时滞反馈及轴力作用下弹性梁的非线性振动[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2013, **40**(9): 30-36.(PENG Jian, ZHAO Yao-bing, WANG Lian-hua. Nonlinear vibrations of elastic beams subjected to axial force and delayed-feedback[J]. *Journal of Hunan University(Natural Science)*, 2013, **40**(9): 30-36.(in Chinese))
- [17] Nayfeh A H, Pai P F. *Linear and Nonlinear Structure Mechanics*[M]. New York: Wiley-Interscience, 2004.
- [18] 王在华, 李俊余. 时滞状态正反馈在振动控制中的新特征[J]. 力学学报, 2010, **42**(5): 933-942.(WANG Zai-hua, LI Jun-yu. New features of positive time-delayed feedbacks in vibration control[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2010, **42**(5): 933-942.(in Chinese))

Primary Resonance of Elastic Beams Under Time-Delay Velocity Feedback Control

PENG Jian¹, ZHANG Gai¹, SUN Ce-shi²

(1. School of Civil Engineering, Hunan University of Science and Technology,

Xiangtan, Hunan 411201, P.R.China;

2. College of Civil Engineering, Chongqing Jiaotong University,

Chongqing 400074, P.R.China)

Abstract: The vibration control of the elastic beam subjected to axial force was investigated with the time-delay velocity feedback control method. A nonlinear control model for the piezoelectric coupling elastic beam was established according to Newton's second law. The direct method was employed to obtain the 1st-order approximate response of the primary resonance of the elastic beam with time-delay velocity feedback. Then the relationship between the system response and the control parameters was given. The results show that, multiple solutions and jumping phenomena exist in the primary resonance response, and the large-amplitude vibration can be effectively suppressed through regulation of the control gain and the time delay.

Key words: time-delay feedback; primary resonance; elastic beam; axial force; direct method

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (11402085); The National Basic Research Program of China (973 Program) (2015CB057702)

引用本文/Cite this paper:

彭剑, 张改, 孙测世. 时滞速度反馈作用下弹性梁的主共振分析[J]. 应用数学和力学, 2016, 37(11): 1208-1216.

PENG Jian, ZHANG Gai, SUN Ce-shi. Primary resonance of elastic beams under time-delay velocity feedback control[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, 37(11): 1208-1216.