

一种含闭环约束多体系统高精度求解方法^{*}

赵天骄^{1,2}, 齐朝晖², 王天堉², 徐金帅²

(1. 中国科学院 大连化学物理研究所, 辽宁 大连 116024;
2. 大连理工大学, 辽宁 大连 116024)

摘要: 含闭环约束多体系统的动力学方程是一组微分代数混合方程,它在数值求解过程中的主要难点有: ① 难以同时较高精度满足位移、速度、加速度约束方程,会随着误差的积累引起较大的违约; ② 经常存在冗余约束以及奇异构型问题,严重影响求解过程的数值性态和结果的准确性.本文提出了一种可处理奇异构型闭环多体系统的数值求解方法,该方法摒弃了传统的约束独立性假设,在形成运动方程之前,对位置和速度进行修正,使其满足约束方程,而不是在每个积分步骤结束时纠正约束违约.并且根据约束的几何特性可知,速度和加速度在超曲面约束法空间中的分量全部由约束决定.通过列置换的 QR 分解得到约束法切空间的正交基向量,建立起系统广义速度与独立广义速度之间的关系,进而将微分代数混合方程转换为满足速度与加速度约束的纯微分方程(方程个数等于系统的广义坐标数),这种方法可以与任何标准 ODE 求解器协作.然后,将正交投影违约修正的方法应用到系统中,通过几次迭代有效地抑制系统位置和速度的违约量.同时,依据虚功率等效原理,进一步揭示了 Lagrange 乘子在求解切断约束反力和约束反力矩中的重要物理意义.本文所提方法可以动态识别独立约束,处理冗余约束和奇异构型问题,可高精度求解含闭环约束多体系统.最后,通过几个数值算例验证了方法的有效性.

关键词: 闭环约束; 多体系统; 微分代数混合方程; 约束反力; 违约修正

中图分类号: O313.7 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.450230

High Precision Methods for Solving Multi-Body Systems With Close Loop Constraints

Zhao Tianjiao^{1,2}, Qi Zhaohui², Wang Tianyu², Xu Jinshuai²

(1. *Dalian Institute of Chemical Physics, Chinese Academy of Sciences, Dalian, Liaoning 116024, P.R. China;*

2. *Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P.R. China*)

Abstract: The dynamics equations for multi-body systems with closed-loop constraints are a set of differential algebraic mixed equations. The main difficulties in their numerical solution are as follow: it is difficult to satisfy the displacement, velocity and acceleration constraint equations with high precision at the same time, which will cause large defaults with the accumulation of errors; there are often redundant constraints and singular configuration problems, which seriously affect the numerical behavior of the solution process and the accuracy of the results. Herein, a numerical method for solving singular configuration closed-loop multibody systems was

* 收稿日期: 2024-08-14; 修订日期: 2025-02-11

基金项目: 国家自然科学基金(11872137)

作者简介: 赵天骄(1991—),男,博士(通信作者. E-mail: 1657268906@qq.com);

齐朝晖(1964—),男,教授,博士,博士生导师(E-mail: zhaohuiq@dlut.edu.cn).

引用格式: 赵天骄, 齐朝晖, 王天堉, 徐金帅. 一种含闭环约束多体系统高精度求解方法[J]. 应用数学和力学, 2026, 47(8): 1068-1085.

presented, without the traditional constraint independence assumption. The correction of position and velocity were done to satisfy the constraint equations before the motion equation formulation, rather than the correction of the constraint default at the end of each integration step. This method works with any standard ODE solver. According to the geometric characteristics of constraints, the components of velocity and acceleration in the hypersurface constraint space were all determined by constraints. The orthogonal basis vectors of the constrained tangent space were obtained through QR decomposition of the column permutation. The relationship between the generalized velocity of the system and the independent generalized velocity was established, and the default values of the generalized velocity and the generalized acceleration were filtered out in the dynamic calculation process, and the differential algebraic mixed equation was transformed into a pure differential equation satisfying the velocity and acceleration constraints (with the number of equations equal to the generalized coordinate number of the system). Then, the orthogonal projection default correction method was applied to the system, and the default magnitude of the system position and speed was effectively suppressed by several iterations. At the same time, according to the principle of virtual power equivalence, the physical significance of the Laplace multiplier in solving the constraint reaction torque of the cut hinge was further revealed. Numerical examples show that, the precision of displacement, velocity and acceleration constraints of the proposed method is higher than that of the traditional augmented method and the penalty function method. The proposed method can deal with redundant constraints and singular configuration problems, and can be programmed to solve multi-body systems with closed-loop constraints with high precision. The proposed method can identify the independent constraints dynamically and modify the motion equation accordingly. Numerical examples demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: closed-loop constraint; multi-body system; mixed differential algebraic equation; joint constraint force; correction of default

0 引 言

含闭环多体系统是多体系统的重要分支,在车辆、环形天线等实际工程中有广泛的应用.与开环多体系统不同的是:这类系统的描述变量很难以程式化方式被选取为一组独立的广义坐标.在多体系统的程式化建模方法中,普遍采用闭环系统的派生树系统铰坐标作为描述变量^[1-3].这种情况下,闭环对系统广义坐标、广义速度和加速度都有相应的约束,导致系统动力学方程成为一组微分代数混合(DAE)方程.

DAE 方程与常微分方程不同,直接求解存在困难,通常是通过对约束方程求导将其转换为增广的常微分方程,但是由于求解过程中没有明确涉及位置和速度约束方程,随着误差的积累将会出现位置和速度的违约问题.除此之外,冗余约束也是经常无法避免的问题,而且系统在求解过程中有可能出现奇异构型,运动学约束可能也会临时冗余,造成求解精度下降,甚至结果发散或失真^[4-7].目前处理 DAE 方程的主要方法有:① 约束稳定化方法^[8-13],即将反馈控制理论拓展应用于多体系统动力学,以抑制误差的增长,此方法将加速度约束方程修改为三种约束方程的线性组合,计算稳定且效率较高.但是所涉及的抑制系数无规可循,且出现奇异构型时,计算往往失效.② 广义坐标分解法,这种方法不需要抑制约束,通过各种矩阵分解方法对约束方程进行处理,分离出独立坐标与非独立坐标,仅对独立坐标表达的微分方程进行积分,非独立坐标可由代数方程求得,相关的矩阵分解方法有奇异值分解法(SVD)、零特征值法、QR 分解法、LU 分解法、切坐标分解法等^[14-18].Blajer 等^[19]提出了一种坐标划分的射影准则.Carpinelli 等^[20]提出了一种在必要时自动改变独立坐标集的方法.Wehage 等^[21]提出了一种对 Jacobi 矩阵进行分块对角化的方法,当需要改变独立坐标集时,该方法可以显著降低计算成本.但是在迭代过程中需要不断求解非线性方程,计算量较大,且广义质量阵和广义力计算的规范化程度较低.③ 罚函数法,即引入较大的惩罚系数,位移、速度、加速度约束方程作为惩罚项添加到动力学方程中.这种方法对约束方程的 Jacobi 矩阵无限制条件,因此在求解冗余约束等问题时具有一定优势.但是惩罚系数并没有合适的确定标准,计算量比较大,且在存在奇异构型时,数值性态差^[22-23].

除此之外,在每一步动力学计算中,通过 Newton-Raphson 迭代,将系统的广义坐标及其速度修正来满足位置约束和速度约束,即每一步迭代都需要求解一系列方程.可以通过最小二乘法来解决这个问题,误差范

数在 Euclid 空间^[24]或 Riemann 空间中测量, Riemann 空间的矩阵张量由质量矩阵表示^[25-26]. Eich^[27]证明了直接校正方法的收敛性. Yoon 等^[28]建议同时消除位置误差和能量误差. Blajer^[29]发现, 与能量守恒相比, 坐标校正的精度是首要的. 在有冗余约束的情况下, 其 Jacobi 矩阵是秩亏的, 用 Lagrange 乘子法得到的运动方程是不可解的. 理论上, 独立约束可以通过约束 Jacobi 矩阵转置的行简化阶梯形 (RREF) 来识别. 然而, 这是非常耗时的. 建议用约束 Jacobi 矩阵的 Moore-Penrose 逆 (MPI) 代替 RREF 来求解待定方程^[30-31]. 当运动方程中保持相关约束时, 加速度可以通过增广 Lagrange 公式^[32-33]或广义质量矩阵的 Moore-Penrose 伪逆^[34-35]来获得.

因此, 如何高精度、准确地求解含闭环约束多体系统是一个亟待解决的问题. 本文考虑将 DAE 方程转换为以系统广义坐标为变量的纯微分方程. 转换过程中, 实时检测系统约束的独立性, 基于 QR 分解获得约束的正切空间和法向空间的正交基向量, 消去冗余约束; 将速度和加速度约束关系同时加入动力学方程中, 采用直接修正法, 在积分前后对速度、位移进一步违约修正, 以达到求解过程中实时动态滤除违约量和消除约束冗余影响的目的. 这种方法的优势是可以与任何标准 ODE 求解器协作. 此外, 依据虚功率等效原理, 进一步揭示 Lagrange 乘子在求解切断铰约束反力和约束反力矩中的重要物理意义, 为高精度程式化处理闭环多体系统微分代数混合方程提供理论参考. 最后, 通过三个数值算例验证了所提方法的有效性.

1 闭环约束方程的标准形式

在一般的多体系统中, 两个相邻物体通过铰连接, 接头的安装位置由内侧和外侧接头点指示. 在每个关节上, 都定义了一个铰坐标系来表示关节的方向. 根据原点所在位置, 称为内侧或外侧关节坐标系, 其基向量分别表示为 (h_1^1, h_1^2, h_1^3) 和 (h_2^1, h_2^2, h_2^3) , 如图 1 所示.

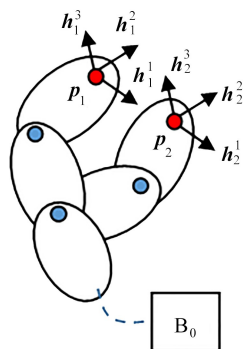


图 1 闭环中的切断铰坐标系

Fig. 1 The coordinate system of a cut joint in a close loop

根据铰的类型, 不同的铰坐标系基矢量与旋转轴和滑移轴有不同的关系, 几种常见的关系如下:

$$h_1^1 = h_2^1 = p_1^r, \quad \text{revolute joints}, \quad (1)$$

$$h_1^1 = p_1^r, \quad h_2^2 = p_2^r, \quad \text{universal joints}, \quad (2)$$

$$h_1^i = b_1^i, \quad h_2^i = b_2^i, \quad \text{spherical joints}, \quad (3)$$

$$h_1^i = h_2^i, \quad h_1^1 = p_1^s, \quad \text{prismatic joints}, \quad (4)$$

$$h_1^1 = h_2^1 = p_1^s = p_2^s, \quad \text{cylinder joints}, \quad (5)$$

式中, (b_1^1, b_1^2, b_1^3) 和 (b_2^1, b_2^2, b_2^3) 是内外接物体连体基的基矢量, 物体之间的滑动可以用下式定义:

$$s_i = (p_2 - p_1) \cdot h_1^i, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (6)$$

内外接铰坐标系间的转换矩阵 H 可以用 Cardan 角 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 描述为

$$H = \begin{bmatrix} c_2 c_3 & s_1 s_2 c_3 + c_1 s_3 & -c_1 s_2 c_3 + s_1 s_3 \\ -c_2 s_3 & -s_1 s_2 s_3 + c_1 c_3 & c_1 s_2 s_3 + s_1 c_3 \\ s_2 & -s_1 c_2 & c_1 c_2 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

这个矩阵中的第 i 行第 j 列可以有如下表达式

$$H_{ij} = h_2^i \cdot h_1^j. \quad (8)$$

铰坐标是 Cardan 角和平动坐标的集合, 在一般的树系统中, 所有的铰坐标都是独立的. 在一个闭环系统中, 可以通过切断铰来得到类似的树系统, 通过切断铰可得到铰坐标作为描述参数, 但是这些描述参数不是独立的, 因为闭环系统是有约束的. 几种经典的闭环约束如表 1 所示.

表 1 切断铰的约束

Table 1 Constraints of classical cut joints

	revolute joint	universal joint	spherical joint	prismatic joint	cylinder joint
rotational constraint	$\alpha_2 = \alpha_3 = 0$	$\alpha_3 = 0$		$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$	$\alpha_2 = \alpha_3 = 0$
translational constraint	$s_1 = s_2 = s_3 = 0$	$s_1 = s_2 = s_3 = 0$	$s_1 = s_2 = s_3 = 0$	$s_2 = s_3 = 0$	$s_2 = s_3 = 0$

在一般的数值解中,数值误差基本不会超过 π ,因此约束 $\alpha_i = 0$ 可以用 $\sin \alpha_i = 0$ 来代替.通过比较式(7)和(8),可以看到旋转铰和滑移铰约束可以写成如下形式:

$$g_1 \triangleq \mathbf{h}_2^3 \cdot \mathbf{h}_1^2 = 0, \quad (9)$$

$$g_2 \triangleq \mathbf{h}_2^3 \cdot \mathbf{h}_1^1 = 0, \quad (10)$$

$$g_3 \triangleq \mathbf{h}_2^2 \cdot \mathbf{h}_1^1 = 0, \quad (11)$$

$$g_4 \triangleq \mathbf{h}_s \cdot \mathbf{h}_1^1 = 0, \quad (12)$$

$$g_5 \triangleq \mathbf{h}_s \cdot \mathbf{h}_1^2 = 0, \quad (13)$$

$$g_6 \triangleq \mathbf{h}_s \cdot \mathbf{h}_1^3 = 0, \quad (14)$$

式中,滑移矢量可被定义为

$$\mathbf{h}_s = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1. \quad (15)$$

切断铰的约束可以根据式(9)~(14)得到,然后对约束方程求时间导数可得速度约束和加速度约束.

$$\dot{g}_i = (\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1) \cdot (\mathbf{h}_2^j \times \mathbf{h}_1^k) = 0, \quad (i, j, k) \in U, \quad (16)$$

$$\ddot{g}_i = (\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 - \dot{\boldsymbol{\omega}}_1) \cdot (\mathbf{h}_2^j \times \mathbf{h}_1^k) + \mu_i = 0, \quad (i, j, k) \in U, \quad (17)$$

$$\dot{g}_{i+3} = (\dot{\mathbf{h}}_s - \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{h}_s) \cdot \mathbf{h}_1^i = 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (18)$$

$$\ddot{g}_{i+3} = (\ddot{\mathbf{h}}_s - \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \mathbf{h}_s) \cdot \mathbf{h}_1^i + \nu_i = 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (19)$$

式中, $\boldsymbol{\omega}_1$ 和 $\boldsymbol{\omega}_2$ 是内外接铰坐标系的角速度, U 是集合 $\{(1, 3, 2), (2, 3, 1), (3, 2, 1)\}$, 以及速度相关项

$$\mu_i = (\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1) \cdot (\dot{\mathbf{h}}_2^j \times \mathbf{h}_1^k + \mathbf{h}_2^j \times \dot{\mathbf{h}}_1^k), \quad (i, j, k) \in U, \quad (20)$$

$$\nu_i = (\dot{\mathbf{h}}_s - \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{h}_s) \cdot \dot{\mathbf{h}}_1^i - (\boldsymbol{\omega}_1 \times \dot{\mathbf{h}}_s) \cdot \mathbf{h}_1^i, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (21)$$

内外接铰坐标系的角速度 $\boldsymbol{\omega}_1$ 和 $\boldsymbol{\omega}_2$ 可分别表示为

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{T}_{\omega 1} \dot{\mathbf{q}}, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \mathbf{T}_{\omega 1} \ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\chi}_1, \quad (22)$$

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \mathbf{T}_{\omega 2} \dot{\mathbf{q}}, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \mathbf{T}_{\omega 2} \ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\chi}_2, \quad (23)$$

$$\dot{\mathbf{h}}_s = \mathbf{T}_s \dot{\mathbf{q}}, \quad \ddot{\mathbf{h}}_s = \mathbf{T}_s \ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\chi}_s. \quad (24)$$

相应地,式(16)~(19)可以写成如下形式:

$$\dot{g}_i = \mathbf{T}_i \dot{\mathbf{q}} = 0, \quad (25)$$

$$\ddot{g}_i = \mathbf{T}_i \ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\chi}_i = 0, \quad (26)$$

系数矩阵为

$$\mathbf{T}_i = (\tilde{\mathbf{h}}_2^j \mathbf{h}_1^k)^T (\mathbf{T}_{\omega 2} - \mathbf{T}_{\omega 1}), \quad (i, j, k) \in U, \quad (27)$$

$$\mathbf{T}_{i+3} = (\mathbf{h}_1^i)^T (\mathbf{T}_s + \tilde{\mathbf{h}}_s \mathbf{T}_{\omega 1}), \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (28)$$

与加速度无关的项

$$\boldsymbol{\chi}_i = (\boldsymbol{\chi}_2 - \boldsymbol{\chi}_1) \cdot (\mathbf{h}_2^j \times \mathbf{h}_1^k) + \mu_i, \quad (i, j, k) \in U, \quad (29)$$

$$\boldsymbol{\chi}_{i+3} = (\boldsymbol{\chi}_s - \boldsymbol{\chi}_1 \times \mathbf{h}_s) \cdot \mathbf{h}_1^i + \nu_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (30)$$

式(9)~(14)以及式(16)~(19)可以认为是闭环约束的标准形式.

2 闭环多体系统的求解算法

在闭环多体系统中的位置、速度和加速度约束方程可分别写作如下形式:

$$\mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad (31)$$

$$\mathbf{G} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (32)$$

$$\mathbf{G} \ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}. \quad (33)$$

约束 Jacobi 矩阵 $\mathbf{G}$ 的维数为 $m \times n$ (m 为约束个数, n 为广义坐标个数), $\boldsymbol{\eta}$ 为行数为 m 的列向量.通过对式(31)和(32)求时间导数,可以得到矩阵 $\mathbf{G}$ 和向量 $\boldsymbol{\eta}$ 的具体元素.多体系统的虚功率方程可以写作如下形式:

$$\delta \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}) = 0, \quad (34)$$

其中, $\mathbf{M}$ 为广义质量矩阵, $\mathbf{F}$ 为广义力向量.虚速度 $\dot{\mathbf{q}}$ 间存在约束,于是有约束方程

$$\mathbf{G} \delta \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (35)$$

由于约束方程是由程式化方式得到的,约束可能不独立;系统运动过程中,约束的独立性可能发生变化(存在奇异构型),约束 Jacobi 矩阵 $\mathbf{G}$ 秩 $k \leq m$. 当 $k < m$ 时,系统存在冗余约束,为了得到独立的约束方程,首先需要将 Jacobi 矩阵 $\mathbf{G}$ 采用行选主元素的 Gauss 消元法,找出线性无关的各个行向量,将式(35)改写为只含独立约束的 k 个约束方程

$$\mathbf{g}_{lk} = \mathbf{0}, \quad (36)$$

$$\mathbf{G}_{lk} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (37)$$

$$\mathbf{G}_{lk} \ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\eta}_{lk} = \mathbf{0}, \quad (38)$$

$$\mathbf{G}_{lk} \delta \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (39)$$

为了分离出独立虚速度,对独立约束方程中的 Jacobi 矩阵 $\mathbf{G}_{lk}$ 采用列选主元素的 Gauss 消元法,找出线性无关的各个列向量,据此可将 $\delta \dot{\mathbf{q}}$ 划分为 $\delta \dot{\mathbf{q}}_{lc}$ 和 $\delta \dot{\mathbf{q}}_{ld}$ 两部分,其中, lc, ld 分别为 Jacobi 矩阵 $\mathbf{G}_{lk}$ 中独立列向量标号和非独立列向量标号组成的集合.由虚速度约束(39)可得

$$\delta \dot{\mathbf{q}}_{lc} = -(\mathbf{G}_{lk,lc})^{-1}(\mathbf{G}_{lk,ld})\delta \dot{\mathbf{q}}_{ld}, \quad (40)$$

进而可将系统虚速度 $\delta \dot{\mathbf{q}}$ 分解为

$$\delta \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{T}_q \delta \dot{\mathbf{q}}_{ld}, \quad (41)$$

其中速度变换矩阵 $\mathbf{T}_q$ 的 lc 行为矩阵 $-\mathbf{G}_{lk,lc}^{-1}\mathbf{G}_{lk,ld}$, ld 行为单位矩阵 $\mathbf{E}$; 它可以看作为约束 Jacobi 矩阵 $\mathbf{G}_{lk}$ 零空间的基底,与 $\mathbf{G}_{lk}$ 之间存在关系

$$\mathbf{G}_{lk} \mathbf{T}_q = \mathbf{0}. \quad (42)$$

式(41)将虚速度表示为独立的虚速度 $\delta \dot{\mathbf{q}}_{ld}$ 的函数,将其代入虚功率方程(34)中可得

$$\mathbf{T}_q^T (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}) = \mathbf{0}. \quad (43)$$

分析闭环多体系统需要联立求解式(43)与式(31)——(33):用 n 个待求变量 $\mathbf{q}$ 满足 $n - k + 3k = n + 2k$ 个方程.这正是求解微分代数方程最大的难点.这种方程的求解策略可分为两类:一类是通过有机结合非线性代数方程和常微分方程求解方法,直接构造 $t + \Delta t$ 时刻的状态变量 $\mathbf{q}_{t+\Delta t}, \dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}$ 与 t 时刻状态变量 $\mathbf{q}_t, \dot{\mathbf{q}}_t$ 之间的关系^[30],其优点是一般可使位置和速度约束方程高精度地得到满足,但存在加速度违约的潜在可能.如果在系统运动过程中独立约束个数发生变化,还会大幅度降低其求解精度和效率,甚至可能求解失败.另一类方法是将微分代数方程转化为合适的纯微分方程,其核心步骤是给定 t 时刻状态变量求解出 t 时刻状态变量的时间导数.这种方法常常存在位置和速度的违约,但由于具有方便于实际应用和计算效率较高的优势而被普遍采用.采用纯微分方程求解微分代数混合方程时,如何在提供函数

$$[\dot{\mathbf{q}}^*, \ddot{\mathbf{q}}] = f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (44)$$

过程中抑制位置和速度的违约是一个重要的科学问题.首先应当注意的是:输入到函数(44)的 $\dot{\mathbf{q}}$ 和输出的 $\dot{\mathbf{q}}^*$ 是可以不同的,因而提供了滤除 $\dot{\mathbf{q}}$ 违约量的可能.由于虚速度约束方程与速度约束方程(37)相同,满足速度约束方程的 $\dot{\mathbf{q}}$ 可以表示为

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{T}_q \dot{\mathbf{q}}_{ld}, \quad (45)$$

进而系统加速度一定可以表示为如下形式:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{T}_q \ddot{\mathbf{q}}_{ld} + \boldsymbol{\beta}. \quad (46)$$

将式(46)代入到式(38)和(42)中可得余量 $\boldsymbol{\beta}$ 的 lc 行为 $-\mathbf{G}_{lk,lc}^{-1}\boldsymbol{\eta}_{lk}$, ld 行为零向量.在此基础上,将式(45)和(46)代入方程(43)中可给出如下方程:

$$(\mathbf{T}_q^T \mathbf{M} \mathbf{T}_q) \ddot{\mathbf{q}}_{ld} + \mathbf{T}_q^T (\mathbf{F} + \mathbf{M} \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}, \quad (47)$$

从上式求得 $\ddot{\mathbf{q}}_{ld}$ 后,再根据式(46)求得 $\ddot{\mathbf{q}}$. 根据式(45)求得

$$\dot{\mathbf{q}}^* = \mathbf{T}_q \dot{\mathbf{q}}_{ld}. \quad (48)$$

按上述方法,所构造的纯微分方程(44)的描述变量始终为相同数目的派生树系统铰坐标,即使系统过程中出现奇异构型,也不会因为独立坐标发生改变而影响质量阵和力阵的维数.除此之外,类似于式(45),还可以用 $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{T}_{q(n \times n)} \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{q}}$ 包含独立和不独立的变量,转换阵 $\mathbf{T}_{q(n \times n)}$ 中包含非独立变量与独立变量之间的关系,但此时得到的质量阵是缺秩的,此时补充加速度约束方程,形成完备的求解微分方程.但是这两种方法均存在缺

陷,即无法同时满足位置约束与速度约束,违约可能严重,均需要修正。

为此,可在每次数值积分迭代前后均采用正交投影违约修正的方法,进一步抑制速度和位移的违约。设在时间 t 由式(44)求得广义加速度 $\ddot{q}$,通过数值积分求得广义坐标 $\tilde{q}$ 和广义速度 $\dot{\tilde{q}}$,当违约量超过了给定精度范围 ε_1 时,可认为 $\tilde{g}_{lk} = g_{lk}(\tilde{q}) \neq 0$ 。此时需要对 $\tilde{q}$ 加入校正项 Δq ,即

$$\bar{q} = \tilde{q} + \Delta q. \quad (49)$$

同理,对于广义速度的违约超过了给定精度范围 ε_2 时, $\dot{\tilde{g}}_{lk} \neq 0$, 需要对 $\dot{\tilde{q}}$ 加入校正项 $\Delta \dot{q}$, 即

$$\dot{\bar{q}} = \dot{\tilde{q}} + \Delta \dot{q}. \quad (50)$$

将动力学方程积分得到的广义坐标和广义速度投影到约束流形上,本文采用几何正交投影方法^[3],即广义坐标和广义速度的校正项分别为

$$\Delta q = -G_{lk}^T (G_{lk} G_{lk}^T)^{-1} \tilde{g}_{lk}, \quad (51)$$

$$\Delta \dot{q} = -G_{lk}^T (G_{lk} G_{lk}^T)^{-1} \dot{\tilde{g}}_{lk}. \quad (52)$$

如果修正后的广义坐标违约量 $g_{lk}(\bar{q})$ 以及广义速度违约量 $\dot{g}_{lk}(\bar{q}, \dot{\bar{q}})$ 均在允许的精度范围内,则可以进入微分方程的下一步数值积分。否则,将继续重复执行式(49)、(50)的校正过程,直至违约量降至微量给定的精度范围内。这里的修正也只是在计算下一时刻的加速度时,修正计算加速度用到的速度和位置,无法修正已经得到的位置和速度(状态变量)。但是当遇到冗余约束导致 Jacobi 矩阵奇异时,求解会遇到困难,为了解决这个问题,本文利用约束的几何特征,提出一种统一的方法,既得到了修正后的位置和速度,同时也判别出了独立的约束方程,是一种有效的统一性方法。

3 约束的几何特征以及高精度求解

在 n 维空间中,满足约束方程的点形成一个超曲面,该超曲面将整个空间划分为两个正交的子空间:切空间 S_t 和由矩阵 G 独立行向量张成法向空间,如图 2 所示。

如果不是全行秩矩阵,这表明约束不是独立的,则运动方程将变得不可解。不幸的是,这种情况确实经常发生,因为约束的独立性可能会随着系统配置的变化而变化,而剪切接头的约束通常只根据其类型引入。因此,识别矩阵中的独立行是必要的。这可以通过列排列的 QR 分解来实现,通过该分解可以将矩阵 G 分解为

$$G^T = R \bar{U} P^T, \quad (53)$$

其中 $\bar{U}$ 是上三角矩阵,其结构如下:

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} U_n & U_t \\ \mathbf{0}_{(n-\bar{m}) \times \bar{m}} & \mathbf{0}_{(n-\bar{m}) \times (m-\bar{m})} \end{bmatrix}, \quad (54)$$

其中, $\bar{m} \leq m$ 是独立约束的个数, U_n 是一个可逆的 $\bar{m} \times \bar{m}$

上三角矩阵, R 是一个 $n \times n$ 正交矩阵,其列可以看作是 n 维空间的基向量,可分为

$$R = [R_n \quad R_t], \quad (55)$$

其中 R_n 是由 R 的第一列 $\bar{m}$ 组成的子矩阵。排列矩阵 P 可分为

$$P = [P_{\bar{m}} \quad P_{m-\bar{m}}], \quad (56)$$

其中 $P_{\bar{m}}$ 是由它的第一列 $\bar{m}$ 组成的子矩阵。 P 作为一个置换矩阵,其最显著的特征是相等性

$$P^T P = P P^T = E_{m \times m}. \quad (57)$$

因此,式(53)等价于

$$G^T = R_n (U_n P_{\bar{m}}^T + U_t P_{m-\bar{m}}^T). \quad (58)$$

式(58)表明,约束法向空间中的任何向量都可以用 R_n 列向量的线性组合表示。也就是说, R_n 的列可以作为法空间的正交基向量, R_t 的列可以作为切空间的正交基向量。由于正交性,子矩阵之间存在一些有趣的关

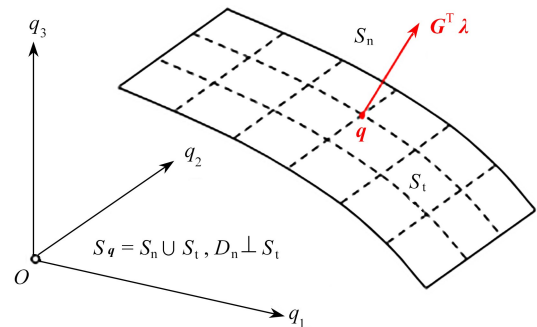


图 2 约束生成的切空间和法空间

Fig. 2 Tangent space S_t and normal space S_n resulting from constraints

系,如

$$\mathbf{R}_n \mathbf{R}_n^T + \mathbf{R}_t \mathbf{R}_t^T = \mathbf{E}_{n \times n}, \quad (59)$$

$$\mathbf{R}_n^T \mathbf{R}_t = \mathbf{0}_{\bar{m} \times (n-\bar{m})}, \quad (60)$$

$$\mathbf{R}_n^T \mathbf{R}_n = \mathbf{E}_{\bar{m} \times \bar{m}}, \quad (61)$$

$$\mathbf{R}_t^T \mathbf{R}_t = \mathbf{E}_{(n-\bar{m}) \times (n-\bar{m})}. \quad (62)$$

根据式(53),约束(32)、(33)可改写为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_n^T & \mathbf{0}_{\bar{m} \times (n-\bar{m})} \\ \mathbf{U}_t^T & \mathbf{0}_{(m-\bar{m}) \times (n-\bar{m})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_n^T \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{R}_t^T \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\bar{m}}^T \boldsymbol{\eta}_v \\ \mathbf{P}_{m-\bar{m}}^T \boldsymbol{\eta}_v \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_{vn} \\ \boldsymbol{\eta}_{vt} \end{bmatrix}, \quad (63)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_n^T & \mathbf{0}_{\bar{m} \times (n-\bar{m})} \\ \mathbf{U}_t^T & \mathbf{0}_{(m-\bar{m}) \times (n-\bar{m})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_n^T \ddot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{R}_t^T \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\bar{m}}^T \boldsymbol{\eta}_a \\ \mathbf{P}_{m-\bar{m}}^T \boldsymbol{\eta}_a \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_{an} \\ \boldsymbol{\eta}_{at} \end{bmatrix}. \quad (64)$$

可见,切空间中的分量与约束无关,约束方程(63)、(64)可简化为

$$\bar{\mathbf{G}} \dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\eta}_{vn}, \quad (65)$$

$$\bar{\mathbf{G}} \ddot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\eta}_{an}, \quad (66)$$

独立约束的 Jacobi 矩阵

$$\bar{\mathbf{G}} = \mathbf{U}_n^T \mathbf{R}_n^T. \quad (67)$$

利用式(65)、(66),约束方程可简化为

$$\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{P}_{\bar{m}}^T \mathbf{g}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}, \quad (68)$$

$$\mathbf{R}_n^T \dot{\mathbf{q}} = (\mathbf{U}_n^T)^{-1} \boldsymbol{\eta}_{vn} \triangleq \hat{\boldsymbol{\eta}}_v, \quad (69)$$

$$\mathbf{R}_n^T \ddot{\mathbf{q}} = (\mathbf{U}_n^T)^{-1} \boldsymbol{\eta}_{an} \triangleq \hat{\boldsymbol{\eta}}_a. \quad (70)$$

这意味着,在适当地重新排列约束方程的顺序之后,第一个方程 $\bar{m}$ 表示独立的约束,并且对速度或加速度的约束仅限制其在法向空间中的分量.据此,式(71)可改写为

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{F} = \mathbf{R}_n \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \quad (71)$$

其中 $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ 是左边向量的法向分量.关节反作用力的虚功率可表示为

$$\delta w = \delta \dot{\mathbf{q}}^T \bar{\mathbf{G}}^T \boldsymbol{\lambda}, \quad (72)$$

式中, Lagrange 乘子 $\boldsymbol{\lambda}$ 与分量 $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ 的关系式如下:

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{U}_n^{-1} \bar{\boldsymbol{\lambda}}. \quad (73)$$

选择方程(68)——(70)中的一个作为辅助方程.然而,从物理的角度来看,加速度的约束方程更合适,因为正是这个方程使 Lagrange 乘子的要求更加明确.因此,运动方程可以写成

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & -\mathbf{R}_n \\ \mathbf{R}_n^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \bar{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \hat{\boldsymbol{\eta}}_a \end{bmatrix}. \quad (74)$$

由于该方程是一个全列秩矩阵,因此它是可解的.可见,在具有冗余约束的多体系统中,寻找独立约束起着重要作用.列置换 QR 分解是识别独立约束并同时获得法向子空间和切向子空间的正交基向量的有效方法.如表 2 所示,与 RREF 和伪逆相比,这也是一种有效的方法.

表 2 不同分解方法的耗时(单位: s)

Table 2 Time costs of different decomposition methods(unit: s)

LU	RREF	pseudo inverse	QR decomposition	matrix dimension
4.57E-6	1.73E-3	6.24E-5	4.28E-6	20×20
1.12E-5	6.63E-3	2.10E-4	1.32E-5	40×40
2.73E-5	1.43E-2	8.45E-4	3.06E-5	60×60
2.54E-4	3.94E-2	1.49E-3	1.27E-4	100×100

虽然切空间和法空间的基矢量也可以通过其他方法得到,比如 LU 分解,但是只有 QR 分解得到的是正

交的基底矢量,这些基底矢量对于形成和求解动力学方程有着重要的意义.动力学方程中输入 $(q, \dot{q}, t)$ 得到 $(\dot{q}, \ddot{q})$, 这里实际上隐藏着一个假设,即认为输入数据 q 和 $\dot{q}$ 是精确的.但事实并非如此.事实上,由于常微分方程数值方法的固有误差,输入数据在经过一些积分时间步长后肯定会违反约束,即

$$\bar{g}(q, t) \neq 0, \bar{G}\dot{q} - \eta_{en} \neq 0. \quad (75)$$

理论和数值实践发现,由于忽略了对位置和速度的约束,方程(74)在某些情况下会导致不可接受的约束违反.为了控制违规行为,经常使用 Baumgarte 稳定方法^[11].然而,它并不总是成功的.作为一种替代方案,广义坐标划分方法更为详细,其中在时间步长开始时将坐标划分为独立集和从属集,步骤结束时的独立坐标可以由 ODE 求解器获得,然后从约束方程中求解从属坐标.还可以通过修改以满足线性化的位置约束方程来消除位置冲突,求解这个方程的主要困难是由于待求量的维数大于方程的维数.然而,由于切线空间中的分量对方程 $\bar{g} + \bar{G}\Delta q = 0$ 没有影响,因此 Δq 应限制在法线空间中,即 $\Delta q = R_n \xi$, 相应的 q 被修正为

$$q_{\text{new}} = q - R_n (U_n^T)^{-1} \bar{g}. \quad (76)$$

这个过程可以运行多次,使约束的误差小于给定的公差.换句话说,当点偏离约束超曲面时,可以根据式(76)在法向空间中移动到超曲面上的点,如图 3 所示.

如图 4 所示,以下步骤概述了纠正违反约束的过程:

步骤 1: 计算当前状态下违反位移约束的情况.

步骤 2: 如果违反约束的情况大于指定的公差,则重复修改广义坐标.在此过程中,当违规行为减少到令人满意的程度或重复次数超过限制时,请转到下一步.

步骤 3: 消除速度约束的误差.

步骤 4: 形成运动方程,并输出状态变量的时间导数

在使用坐标形成运动方程之前进行坐标校正,而不是在积分步骤结束时修改坐标.通过这种方式,校正过程可以嵌入运动方程中,并且求解过程可以利用标准 ODE 求解器的优势,例如调整时间步长以满足精度要求的能力.

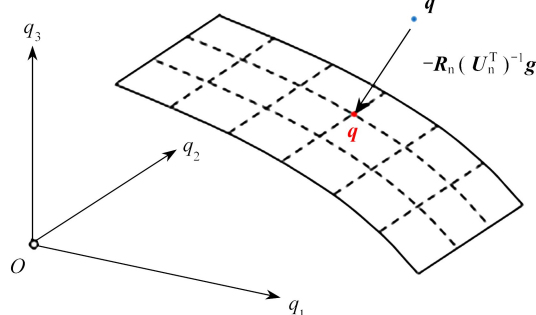


图 3 q 在法空间中的修正

Fig. 3 Correction of q in the normal space

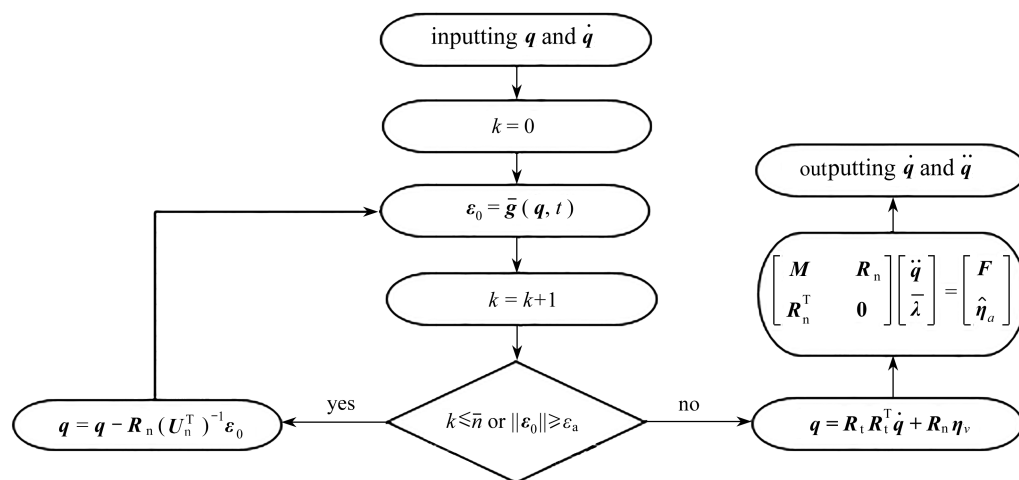


图 4 违约修正的流程图

Fig. 4 The flow chart for elimination of constraint violations

4 约束反力与 Lagrange 乘子

实现约束的力学机制是约束反力.从约束多体系统动力学方程(77)可以看出,约束对系统动力学方程的影响体现为系统施加了广义力 $G^T \lambda$, 但它并不是约束反力自身

$$M\ddot{q} - F = G^T \lambda. \quad (77)$$

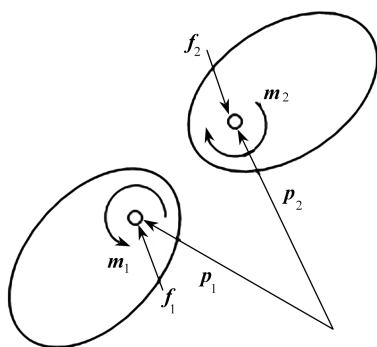


图5 铰的约束反力

Fig. 5 Reaction forces of a joint

在关节中,一对反作用力与其关节点有关,如图5所示。

由于约束反力来源于内外接物体之间的接触,所以约束反力总是一组平衡力系:它们之间的关系为

$$\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = \mathbf{0}, \quad (78)$$

$$\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \times \mathbf{f}_2 = \mathbf{0}. \quad (79)$$

这些力的虚功率为

$$\begin{aligned} \delta w = & \mathbf{f}_2 \cdot \delta \dot{\mathbf{p}}_2 + \mathbf{m}_2 \cdot \delta \boldsymbol{\omega}_2 + \\ & \mathbf{f}_1 \cdot \delta \dot{\mathbf{p}}_1 + \mathbf{m}_1 \cdot \delta \boldsymbol{\omega}_1. \end{aligned} \quad (80)$$

根据式(78)、(79),式(80)可以简化为

$$\begin{aligned} \delta w = & \mathbf{f}_2 \cdot (\delta \dot{\mathbf{h}}_s + \mathbf{h}_s \times \delta \boldsymbol{\omega}_1) + \\ & \mathbf{m}_2 \cdot (\delta \boldsymbol{\omega}_2 - \delta \boldsymbol{\omega}_1). \end{aligned} \quad (81)$$

铰的约束反力,也可以用 Lagrange 乘子表达

$$\delta \bar{w} = \lambda_1 \delta \dot{g}_1 + \lambda_2 \delta \dot{g}_2 + \lambda_3 \delta \dot{g}_3 + \lambda_4 \delta \dot{g}_4 + \lambda_5 \delta \dot{g}_5 + \lambda_6 \delta \dot{g}_6, \quad (82)$$

考虑到式(16)~(19),此表达式可以写作

$$\begin{aligned} \delta \bar{w} = & (\lambda_1 \mathbf{h}_2^3 \times \mathbf{h}_1^1 + \lambda_2 \mathbf{h}_2^3 \times \mathbf{h}_1^1 + \lambda_3 \mathbf{h}_2^2 \times \mathbf{h}_1^1) \cdot (\delta \boldsymbol{\omega}_2 - \delta \boldsymbol{\omega}_1) + \\ & (\lambda_4 \mathbf{h}_1^1 + \lambda_5 \mathbf{h}_1^2 + \lambda_6 \mathbf{h}_1^3) \cdot (\delta \dot{\mathbf{h}}_s + \mathbf{h}_s \times \delta \boldsymbol{\omega}_1). \end{aligned} \quad (83)$$

从力学原理上,这两种均为铰的约束反力虚功率,它们是相等的.于是可以得到

$$\mathbf{f}_2 = \lambda_4 \mathbf{h}_1^1 + \lambda_5 \mathbf{h}_1^2 + \lambda_6 \mathbf{h}_1^3, \quad (84)$$

$$\mathbf{m}_2 = \lambda_1 (\mathbf{h}_2^3 \times \mathbf{h}_1^1) + \lambda_2 (\mathbf{h}_2^3 \times \mathbf{h}_1^1) + \lambda_3 (\mathbf{h}_2^2 \times \mathbf{h}_1^1). \quad (85)$$

Lagrange 乘子和约束反力的关系如表3所示。

表3 Lagrange 乘子表示的切断铰约束反力

Table 3 Reaction forces of classical cut-joints expressed in terms of Lagrange multipliers

	revolute joint	universal joint	spherical joint	prismatic joint	cylinder joint
$\mathbf{m}_2$	$\lambda_2 \mathbf{h}_2^2 - \lambda_3 \mathbf{h}_2^3$	$\lambda_3 (\mathbf{h}_2^3 \times \mathbf{h}_1^1)$	$\mathbf{0}$	$\lambda_2 \mathbf{h}_1^1 - \lambda_1 \mathbf{h}_1^1 - \lambda_3 \mathbf{h}_1^3$	$\lambda_2 \mathbf{h}_2^2 - \lambda_3 \mathbf{h}_2^3$
$\mathbf{f}_2$	$\lambda_4 \mathbf{h}_1^1 + \lambda_5 \mathbf{h}_1^2 + \lambda_6 \mathbf{h}_1^3$	$\lambda_4 \mathbf{h}_1^1 + \lambda_5 \mathbf{h}_1^2 + \lambda_6 \mathbf{h}_1^3$	$\lambda_4 \mathbf{h}_1^1 + \lambda_5 \mathbf{h}_1^2 + \lambda_6 \mathbf{h}_1^3$	$\lambda_5 \mathbf{h}_1^2 + \lambda_6 \mathbf{h}_1^3$	$\lambda_5 \mathbf{h}_1^2 + \lambda_6 \mathbf{h}_1^3$

实际系统的约束方程是根据切断铰的标号进行排序的.在动力学方程中只引入独立约束.矩阵列中的非零元素表示这些独立约束.因此,Lagrange 乘子在运动方程中的意义是清楚的.例如, $\boldsymbol{\lambda}$ 中的第*i*个元素对应系统约束的第*j*个方程,其中

$$\mathbf{j} = [1 \quad 2 \quad \cdots \quad m] \mathbf{P}_m(:, i). \quad (86)$$

当切断铰的约束反力已知时,这些约束反力可以被认为是剩余树系统的外力,其动力学方程为

$$\mathbf{M}_n \ddot{\mathbf{u}}_n - \mathbf{F}_n = \mathbf{F}_r, \quad (87)$$

式中, $\mathbf{F}_n$ 是物体外力和惯性广义力的合力, $\mathbf{F}_r$ 是等效到质心处的铰约束反力,它包含有力 $\mathbf{f}_r$ 和力矩 $\mathbf{m}_r$, 作为一个树系统的末端物体,只有一个铰与其相连,它的约束反力和力矩可以通过式(87)得到:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{m}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{f}_r \\ -\mathbf{m}_r - (\mathbf{r}_c - \mathbf{p}_1) \times \mathbf{f}_r \end{bmatrix}, \quad (88)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{m}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_r \\ \mathbf{m}_r + (\mathbf{r}_c - \mathbf{p}_2) \times \mathbf{f}_r \end{bmatrix}, \quad (89)$$

其中, $\mathbf{r}_c$ 是树系统中末端物体的质心, $\mathbf{p}_1$ 和 $\mathbf{p}_2$ 是连接末端物体的内外接铰点矢径.这个末端物体可以从系统中移除,然后用力 $\mathbf{f}_r$ 和力矩 $\mathbf{m}_r$ 代替它对剩余物体的作用.去掉末端物体后可得到一个新的树系统,从这个新的树系统中,再找到新的末端物体,然后通过式(88)、(89)得到这个铰的约束反力,重复这个过程,即可得到所有铰的约束反力,如图6所示。

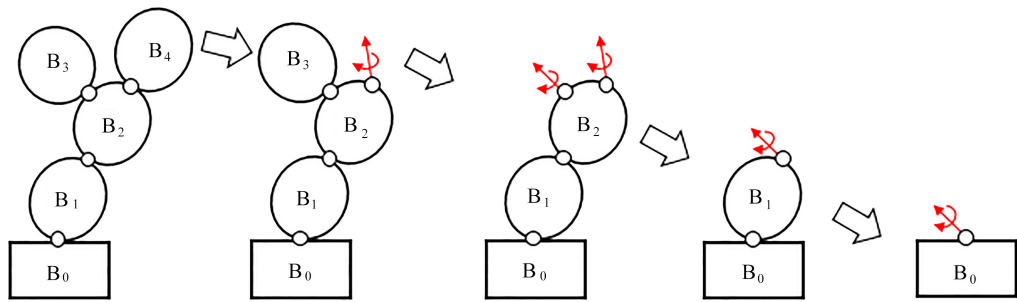


图 6 求解铰的约束反力的拆解过程

Fig. 6 The process of obtaining joint reaction forces in the derived tree-like system

5 数值算例

5.1 算例 1

图 7 所示为空间对心曲柄滑块机构,若将滑块与地面的滑移铰作为切断铰,按照程式化处理需要满足五个约束方程,但实际上该机构只有两个约束方程是独立的,其余为冗余约束.并且在曲柄 OA 和连杆 AB 相等且运行至重合位置时会出现奇异构型.为了验证本文方法的正确性与优越性,对曲柄 OA 和连杆 AB 长度比为 $1:1$ 的情况进行数值仿真,将计算结果与已有方法分析结果相比较.

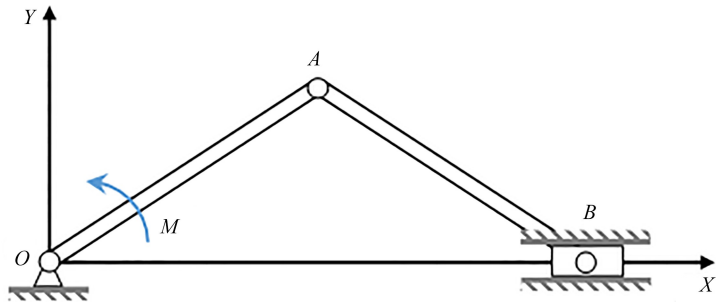


图 7 曲柄滑块机构

Fig. 7 The crank slider mechanism

初始时刻,曲柄 OA 和连杆 AB 共线并与 OX 轴重合.曲柄滑块机构的仿真参数如表 4 所示.采用 ODE45 求解器,相对精度 $1E-3$,绝对精度 $1E-6$,最大步长 1 s .为了便于说明,图中 LM+Baumg.stab 代表 Lagrange 乘子+约束稳定化方法,ALF 代表罚函数方法,SIP 代表本文方法.

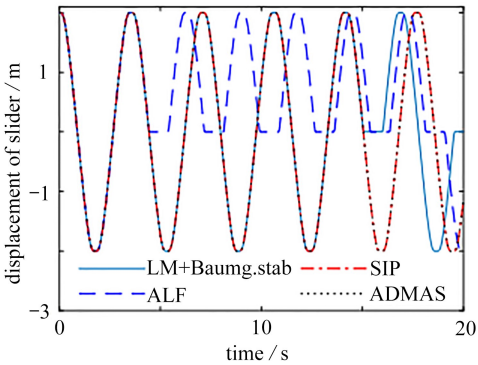
表 4 曲柄滑块机构的仿真参数

Table 4 Simulation parameters of the crank-slider mechanism

crankshaft length/m	connecting rod length/m	crankshaft mass/kg	connecting rod mass/kg	slider mass/kg
1	1	1	1	1

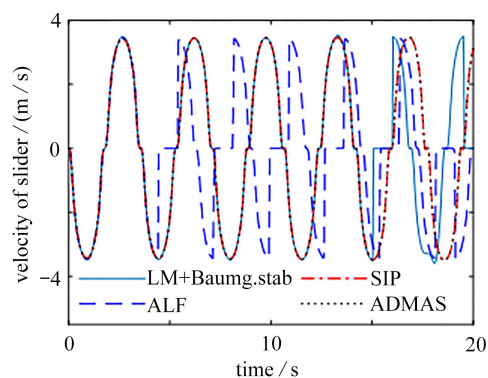
机构在重力作用下,滑块的位移、速度、加速度曲线如图 8 所示.从中可以看出:Lagrange 乘子+约束稳定化方法在 15 s 左右时失效,罚函数法在 4.8 s 左右时失效,且失效时刻都是在通过奇异构型的时候;罚函数法求解结果中加速度会有较大的跳跃,已经失真;本文的方法与 ADMAS 吻合得较好,可解决奇异构型问题.

以切断铰约束中违约量绝对值最大的约束对应的位移、速度、加速度作为约束违约程度的衡量指标,如图 9、10 所示.



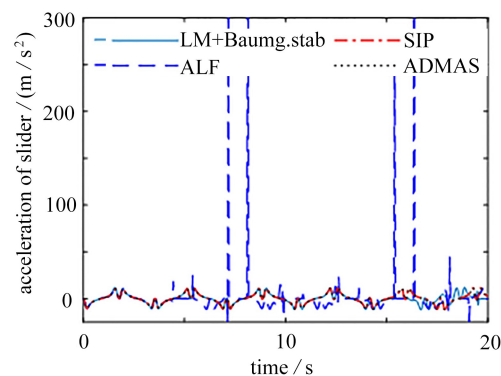
(a) 滑块的位移-时间变化曲线

(a) Displacement-time curves of the slider



(b) 滑块的速度-时间变化曲线

(b) Velocity-time curves of the slider



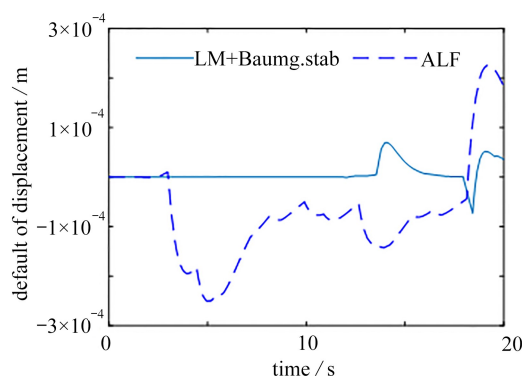
(c) 滑块的加速度-时间变化曲线

(c) Acceleration-time curves of the slider

图8 滑块的运动状态变化曲线

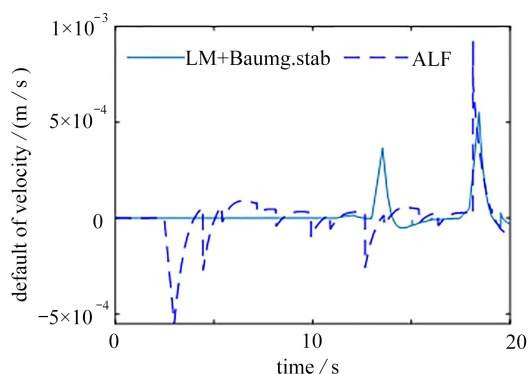
Fig. 8 The curves of the slider's state changes

图9中,Lagrange 乘子+约束稳定化方法和罚函数法的大幅度违约均出现在相应的系统奇异构型前后,也就是说:系统通过奇异构型位置时,约束独立性的变化会严重影响动力学方程的计算精度,从而导致结果失真;这也是上述方法不能很好地解决奇异构型问题的原因之一.图10中,本文方法的位移、速度、加速度的约束精度可以始终保持在很高的精度范围内(从中可以看出:本文方法的位移、速度、加速度的约束精度远高于Lagrange 乘子+约束稳定化方法和罚函数法).



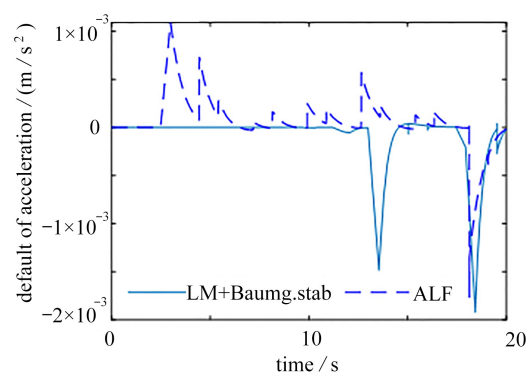
(a) 位移违约量-时间变化曲线

(a) Displacement default-time curves



(b) 速度违约量-时间变化曲线

(b) Velocity default-time curves

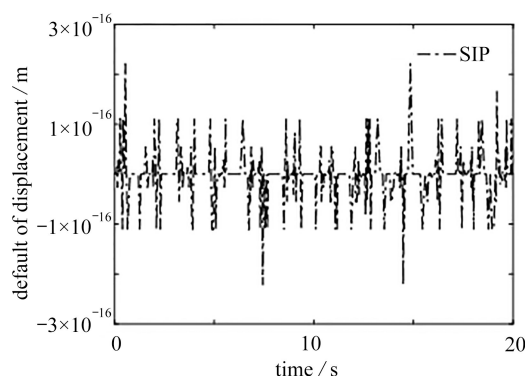


(c) 加速度违约量-时间变化曲线

(c) Acceleration default-time curves

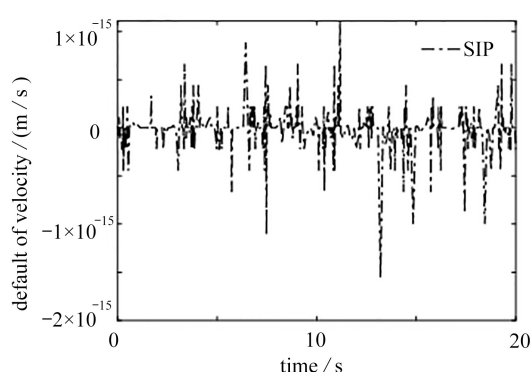
图9 滑块的违约量变化曲线(LM+Baumg.stab, ALF)

Fig. 9 The curves of the slider's defaults(LM+Baumg.stab, ALF)



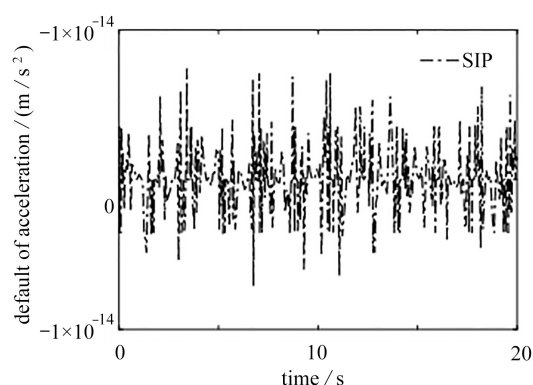
(a) 位移违约量-时间变化曲线

(a) The displacement default-time curve



(b) 速度违约量-时间变化曲线

(b) The velocity default-time curves



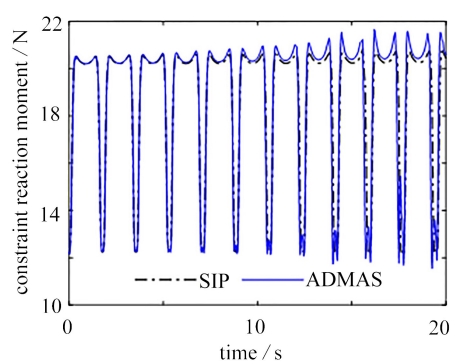
(c) 加速度违约量-时间变化曲线

(c) The acceleration default-time curves

图 10 滑块的违约量变化曲线(SIP)

Fig. 10 The curves of the slider's defaults (SIP)

图 11 给出了切断铰处阻止铰点沿 Y 方向移动的约束反力,可以看出:本文中计算约束反力的方法与 ADMAS 吻合得较好,由此可以验证本文中阐述的 Lagrange 乘子在求解切断铰约束反力和约束反力矩中的重要物理意义。

图 11 阻止铰点沿 Y 方向移动的约束反力Fig. 11 Constraint reactions to prevent joint point from moving along the Y direction

5.2 算例 2

如图 12 所示,一个空间平行四连杆机构由三个长度为 0.5 m,截面半径为 0.05 m,质量为 1 kg 的圆柱细长杆组成。 AB 杆、 DC 杆与下支座相连接的 A 、 D 点处为旋转铰,与 BC 杆相连接的 B 、 C 点为万向节,其中 AB 杆以恒定角速度 $124.8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ 绕 A 点顺时针旋转。

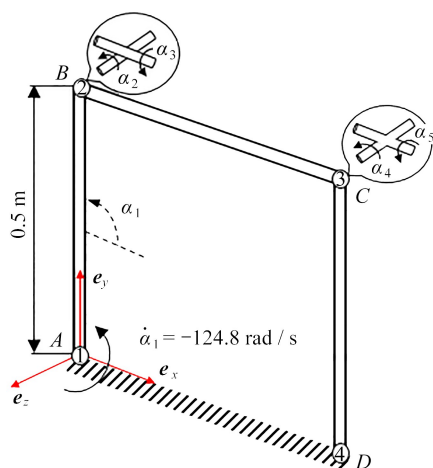


图 12 空间四连杆机构

Fig. 12 The space 4-link mechanism

该机构的运动虽然是平面的,但是系统中的万向节是在三维空间中定义的,存在冗余约束问题的同时,也存在冗余变量的问题.此外,机构运动至三杆重合位置时,如图 13 所示,约束的独立性会瞬间发生变化,同样存在奇异构型问题.

该算例以 D 点处旋转铰作为切断铰,选择其余铰的铰坐标为系统描述变量,分别为: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$; C 点位置坐标的解析解可以表示为

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{2}(1 + \cos(\alpha_1 - 124.8t))\mathbf{e}_x + \frac{1}{2}\sin(\alpha_1 - 124.8t)\mathbf{e}_y, \quad (90)$$

初始时刻分别取 $\alpha_1 = 0, \alpha_1 = \pi/2$, 然后依次进行仿真.使用 ODE45 求解器,仿真参数为:相对精度 $\varepsilon_r = 1 \times 10^{-3}$,

绝对精度 $\varepsilon_a = 1 \times 10^{-6}$;采用本文提出的数值解法组集动力学方程以及进行违约修正,其中违约容差 $\varepsilon_0 = 1 \times 10^{-8}$,最大修正次数 $\bar{n} = 5$,时间区间为 0.5 s;得到的仿真结果及其与解析解的绝对误差如图 14、15 所示.

从图中可见:最大误差不超过 1×10^{-7} m,二者保持一致.

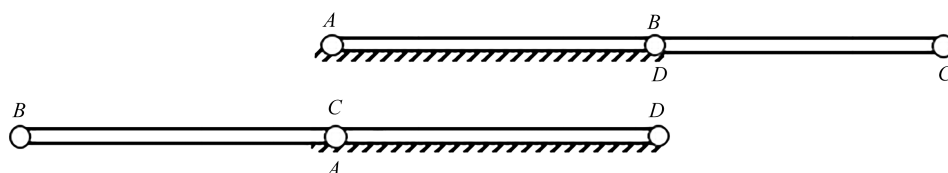
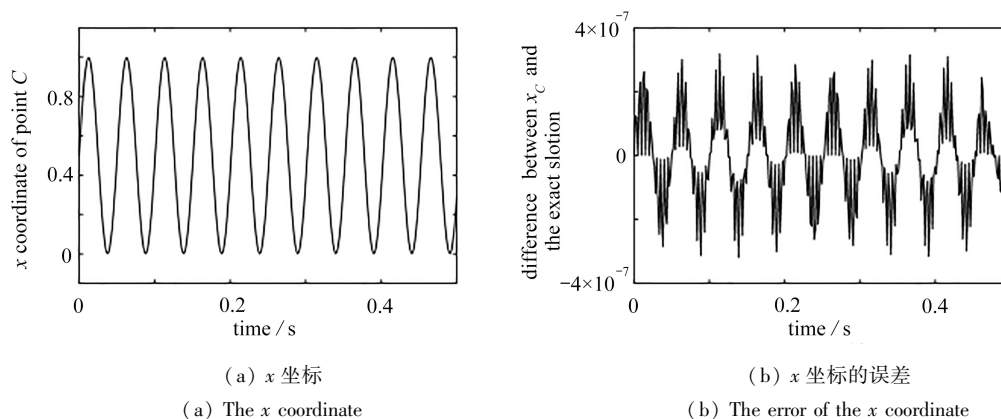


图 13 机构的奇异构型位置

Fig. 13 Singular configurations of the mechanism

图 14 初值 $\alpha_1 = \pi/2$ 时得到的 C 点 x 坐标的变化及其与解析解的差值Fig. 14 The x coordinates of point C and their differences with respect to the exact solutions with initial position $\alpha_1 = \pi/2$

该算例恰好在 Neto 等的文献^[35]也有研究,依次使用了 6 种常用的数值解法及它们的组合方法进行仿真,分别是:①带显式乘子的 Lagrange 方法,记为 LM2.②将约束视为虚拟弹簧、阻尼的增广 Lagrange 列式,记为 ALF.③Baumgarte 约束稳定化方法,记为 Baumg.stab.④广义坐标划分方法,记为 Coord.part.⑤基于 SVD 奇异值分解的 Moore-Penrose 广义逆方法,记为 MPI(SVD).⑥基于 Gram-Schmidt 正交化方法的 Moore-Penrose 广义逆方法,记为 MPI(GS).

通过表 5 的对比结果可知:大部分数值解法在求解该算例时都发散了,只有 MPI(SVD)和 Coord.part 两种方法联合使用以及本文所提的方法有效.

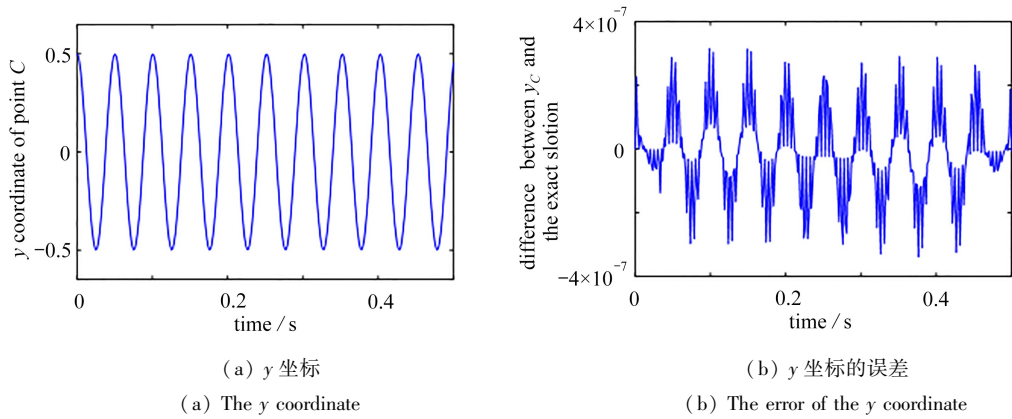


图 15 初值 $\alpha_1 = \pi/2$ 时得到的 C 点 y 坐标的变化及其与解析解的差值

Fig. 15 The y coordinates of point C and their differences with respect to the exact solutions with initial position $\alpha_1 = \pi/2$

表 5 不同数值解法的仿真结果对比

Table 5 Validities of different numerical methods to simulate the 4-bar linkage

numerical solution method	initial value		numerical solution method	initial value		numerical solution method	initial value	
	$\alpha_1 = \pi/2$	$\alpha_1 = 0$		$\alpha_1 = \pi/2$	$\alpha_1 = 0$		$\alpha_1 = \pi/2$	$\alpha_1 = 0$
LM2	diverge	diverge	ALF+Coord.part	diverge	diverge	MPI(GS)	diverge	diverge
LM2+Baumg.stab	diverge	diverge	MPI(SVD)	diverge	diverge	MPI(GS)+ Baumg.stab	diverge	diverge
LM2+Coord.part	diverge	diverge	MPI(SVD)+ Baumg.stab	diverge	diverge	MPI(GS)+ Coord.part	diverge	diverge
ALF	diverge	diverge	MPI(SVD)+ Coord.part	converge	converge	this paper	converge	converge

5.3 算例 3

油缸加绳排驱动伸缩臂及各主要部件如图 16、17 所示,其整体安装在回转平台上,固结在臂节 1 底部的转轴与转台上的轴套以旋转副的形式连接,变幅油缸一端销接在转台,一端销接在臂节 1 的外壁.每个臂节上底端外壁和顶端内壁局部区域的倒圆处布置滑块,用于传递相邻臂节间的接触载荷.在运动过程中,此结构的 Jacobi 矩阵可能会发生奇异.

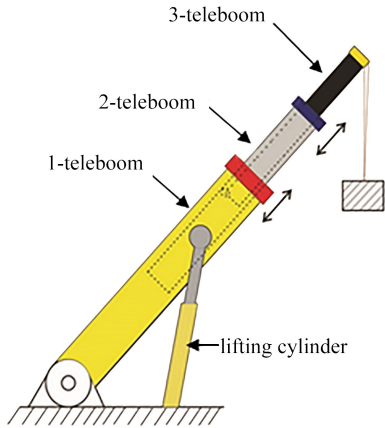


图 16 伸缩式起重机

Fig. 16 The telescopic crane

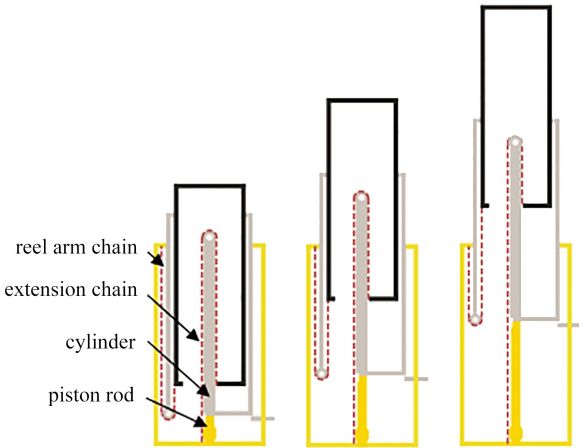


图 17 伸缩式起重机内部结构

Fig. 17 The internal structure of the telescopic crane

驱动相互嵌套环绕臂节伸缩运动的部件主要分为:伸缩油缸、伸臂链、缩臂链.伸缩油缸安装在臂节 1 和臂节 2 之间,活塞杆与臂节 1 固连,缸体与臂节 2 固连.缩臂链和伸臂链是简单的滑轮钢丝绳系统,缩臂链绳索一端固连于臂节 1 顶端,绕过固结在臂节 2 底端同侧的滑轮,另一端固连于臂节 3 的底端同侧位置;伸臂

链绳索一端固连于臂节1底端,绕过固结在伸缩油缸缸体顶端滑轮,另一端固连于臂节3底端异侧位置.考虑安全因素,机构的回转、变幅、伸缩不能同时进行,本文重点讨论伸缩运动,因此,在伸缩工作过程中,回转平台锁死不动,变幅油缸长度固定,伸缩油缸驱动臂节2相对臂节1伸展收缩,在伸臂链或缩臂链的作用下,促使臂节3相对臂节2以同样的速度伸展收缩,从而实现三节臂的同步伸缩运动.

如图18所示,考虑到旋转副强度安全因素,焊接在臂节1底部的转轴部分通常会进行加强处理,因此假设左端截面与转轴之间部分是刚性的,此时,左端截面的原点可由销轴中心 $\mathbf{r}_0$ 和二者之间的轴向和竖向距离 $\bar{x}_0, \bar{y}_0$ 表示,即存在约束方程

$$\mathbf{r}_{1,1} - (\mathbf{r}_0 + \bar{x}_0 \mathbf{e}_{s1,1} + \bar{y}_0 \mathbf{e}_{b1,1}) = \mathbf{0}. \quad (91)$$

臂节1只能绕着销轴转动,即左端截面只有绕截面坐标系的横向基矢量 $\mathbf{e}_{t1,1}$ 的一个转动自由度,因此左端截面基矢量满足约束方程

$$\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{e}_{t1,1} = 0, \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{e}_{t1,1} = 0, \quad (92)$$

其中,总体惯性坐标系基矢量 $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_3$ 分别为指向转台正前方和正上方的单位方向向量;对式(91)、(92)求时间导数,可得衍生的速度约束方程

$$\dot{\mathbf{r}}_{1,1} - (\bar{x}_0 \dot{\mathbf{e}}_{s1,1} + \bar{y}_0 \dot{\mathbf{e}}_{b1,1}) = \mathbf{0}, \quad (93)$$

$$\mathbf{g}_1 \cdot \dot{\mathbf{e}}_{t1,1} = 0, \mathbf{g}_3 \cdot \dot{\mathbf{e}}_{t1,1} = 0 \quad (94)$$

和加速度约束方程

$$\ddot{\mathbf{r}}_{1,1} - (\bar{x}_0 \ddot{\mathbf{e}}_{s1,1} + \bar{y}_0 \ddot{\mathbf{e}}_{b1,1}) = \mathbf{0}, \quad (95)$$

$$\mathbf{g}_1 \cdot \ddot{\mathbf{e}}_{t1,1} = 0, \mathbf{g}_3 \cdot \ddot{\mathbf{e}}_{t1,1} = 0. \quad (96)$$

变幅油缸的下铰点 $\mathbf{r}_{dw}$ 与转台铰接,上铰点 $\mathbf{r}_{up}$ 与臂节1铰接截面固结.工作状态下,油缸长度保持恒定,对上下铰点间形成固定距离约束.刚性截面假设条件下,上铰点矢径 $\mathbf{r}_{up}$ 可由油缸铰接面的原点矢径 $\mathbf{r}_{3,1}$ 和二者间的竖向距离 $\bar{z}_0$ 表示为

$$\mathbf{r}_{up} = \mathbf{r}_{3,1} - \bar{z}_0 \mathbf{e}_{b3,1}. \quad (97)$$

此时,约束方程可写为

$$\|\mathbf{r}_{up} - \mathbf{r}_{dw}\| - d = 0, \quad (98)$$

其中, d 为变幅油缸的固定长度.对式(98)求时间导数,可得衍生的速度约束方程

$$(\mathbf{r}_{up} - \mathbf{r}_{dw})^T (\dot{\mathbf{r}}_{3,1} - \bar{z}_0 \dot{\mathbf{e}}_{b3,1}) = 0 \quad (99)$$

和加速度约束方程

$$(\dot{\mathbf{r}}_{3,1} - \bar{z}_0 \dot{\mathbf{e}}_{b3,1})^T (\dot{\mathbf{r}}_{3,1} - \bar{z}_0 \dot{\mathbf{e}}_{b3,1}) + (\mathbf{r}_{up} - \mathbf{r}_{dw})^T (\ddot{\mathbf{r}}_{3,1} - \bar{z}_0 \ddot{\mathbf{e}}_{b3,1}) = 0. \quad (100)$$

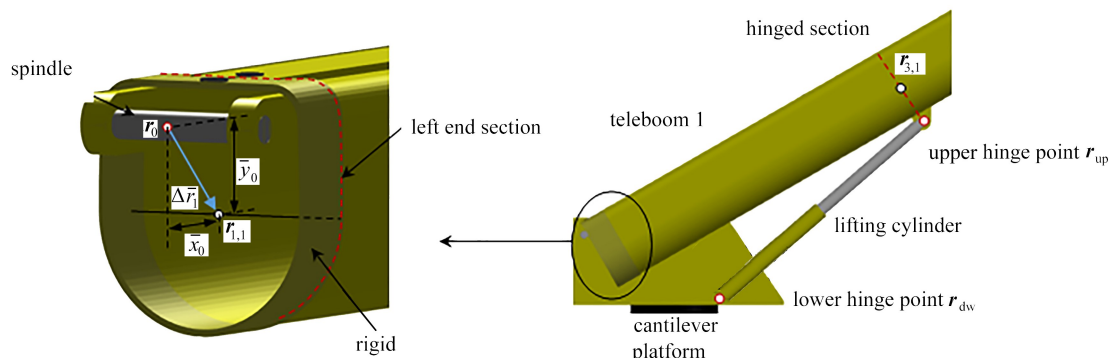


图18 基本臂与转台的连接部分

Fig. 18 The internal structure of the telescopic crane

如图19所示,在油缸加绳排驱动伸缩臂内,固结在臂节1左端的液压油缸推拉臂节2时,臂节3也会被总原长不变的伸缩链或缩臂链拉动,从而实现相邻臂节以同样的相对速度进行伸长和收缩.此时,臂节受到的外力不仅包括自重和吊重,还包括实现伸缩驱动的绳排施加在臂节端部的的外力,这些附加外力不仅与臂节端部的节点位移有关,而且和约束机构本身的运动相关.由上一节的内容可知:臂节 k 的左右端截面原点矢

径和截面坐标系基矢量表示为 $\mathbf{r}_{1,k}, \mathbf{r}_{4,k}$ 和 $\{\mathbf{e}_{s1,k}, \mathbf{e}_{t1,k}, \mathbf{e}_{b1,k}\}, \{\mathbf{e}_{s4,k}, \mathbf{e}_{t4,k}, \mathbf{e}_{b4,k}\}$, 缩臂链与臂节 1 的连接点为 $\mathbf{r}_{s,1}$, 与臂节 3 连接点为 $\mathbf{r}_{s,3}$, 滑轮轮心为 $\mathbf{r}_{s,2}$; 伸臂链与臂节 1 的连接点为 $\mathbf{r}_{p,1}$, 与臂节 3 连接点为 $\mathbf{r}_{p,3}$, 滑轮轮心为 $\mathbf{r}_{p,2}$; 在刚性截面假设条件下, 它们均可由所在端面的原点矢径、截面坐标系基矢量及其相应的尺寸求得。

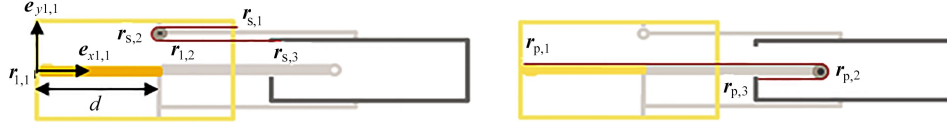


图 19 伸缩臂的油缸绳排

Fig. 19 The cylinder and wire rope of the telescopic boom

伸缩油缸安装在臂节 1 左端截面原点, 不计油缸的自重和变形, 则其轴向方向始终与臂节 1 端部截面的法线方向一致, 实时长度即为该相邻内外层臂节之间的伸缩距离 d , 臂节 1/2 之间的驱动位移约束方程可表示为

$$\mathbf{r}_{1,2} - (\mathbf{r}_{1,1} + d\mathbf{e}_{s1,1}) = \mathbf{0}, \quad (101)$$

速度、加速度约束方程分别为

$$\dot{\mathbf{r}}_{1,2} - (\dot{\mathbf{r}}_{1,1} + d\dot{\mathbf{e}}_{s1,1}) = \mathbf{0}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_{1,2} - (\ddot{\mathbf{r}}_{1,1} + d\ddot{\mathbf{e}}_{s1,1}) = \mathbf{0}. \quad (102)$$

驱动臂节 3 的绳排包括伸臂链和缩臂链, 它们均是一套简单的滑轮绳索系统, 考虑到滑轮尺寸相对于钢丝绳长度较小, 将滑轮看作质点; 工作状态下, 绳索总原长 l_0 不变, 不计质量情况下, 绕过滑轮两端的绳索端部的拉力大小相同; 为了建立绳排耦合运动的模型, 将其简化为只受拉不受压的单向非线性弹簧单元, 以伸臂链为例说明, 绳排贡献的虚功率可表示为

$$\delta p_w = \left(\left(\delta \frac{\partial \mathbf{r}_{p,1}}{\partial t} \right) - \left(\delta \frac{\partial \mathbf{r}_{p,2}}{\partial t} \right) \right) k\zeta \mathbf{e}_1 + \left(\left(\delta \frac{\partial \mathbf{r}_{p,3}}{\partial t} \right) - \left(\delta \frac{\partial \mathbf{r}_{p,2}}{\partial t} \right) \right) k\zeta \mathbf{e}_2, \quad (103)$$

式中, 轴向应变 ζ 可由变形后的绳索总长得到

$$\zeta = \frac{\|\mathbf{r}_{p,1} - \mathbf{r}_{p,2}\| + \|\mathbf{r}_{p,3} - \mathbf{r}_{p,2}\| - l_0}{l_0}, \quad (104)$$

单位向量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 表示每段绳索的连线矢径方向

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{r}_{p,2} - \mathbf{r}_{p,1}}{\|\mathbf{r}_{p,2} - \mathbf{r}_{p,1}\|}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{r}_{p,2} - \mathbf{r}_{p,3}}{\|\mathbf{r}_{p,2} - \mathbf{r}_{p,3}\|}. \quad (105)$$

图 20 给出了不同吊载 G 工况下伸长过程中, 臂节 3 端部形心竖向位移随时间变化的曲线, 以及振动频率随时间变化的曲线。可以看出: ① 端部承载越大, 挠度值变化越大, 伸长停止后, 振幅越大; ② 吊载 10 kN, 25 kN, 50 kN 工况下, 频率随时间变化曲线相差无几, 即端部振动频率基本不受吊重的影响。

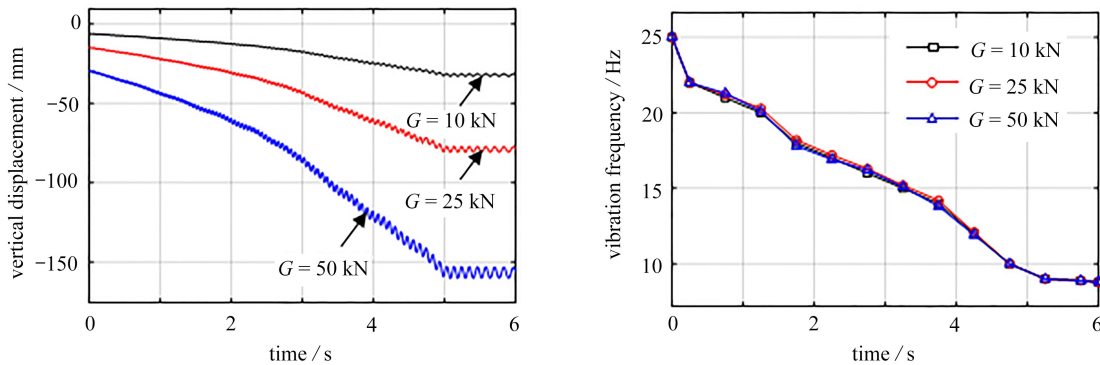


图 20 不同吊载作用下臂节 3 端部形心竖向位移及其振动频率的变化

Fig. 20 Vertical displacements of the tip and their vibration frequencies for the 3rd boom under the actions of different loads

6 结 论

1) 针对闭环多体系统的特点,在建立动力学方程阶段,排除冗余约束方程,实时检测约束方程的独立性,滤掉速度、加速度违约束量,将约束多体系统的微分代数混合方程转化为数量与派生树系统广义坐标相同的纯微分方程,可以求解冗余约束和奇异构型问题,使得位移、速度、加速度约束同时高精度满足。

2) 依据虚功率等效原理,揭示了闭环多体系统中 Lagrange 乘子在求解切断铰约束反力过程中的重要意义,可据此准确求解切断铰约束反力,进而求解派生树系统各铰约束反力。

3) 从几何的角度来看,约束可以看作是一个超曲面,它将整个空间分成两个正交的子空间,分别是法向空间和切向空间,在法向空间中的速度和加速度分量由约束条件决定,通过对约束 Jacobi 矩阵的转置进行列置换的 QR 分解,可以得到独立约束以及法切空间的正交基向量。基于这种约束的几何结构,提出了一种闭环多体系统的数值求解方法,该方法在多体系统通过奇异位置时具有足够的精度和稳定性。

参考文献(References):

- [1] 刘延柱,潘振宽,戈新生. 多体系统动力学[M]. 2版. 北京: 高等教育出版社, 2014. (Liu Yanzhu, Pan Zhenkuan, Ge Xinsheng. *Dynamics of Multibody Systems*[M]. 2nd ed. Beijing: Higher Education Press, 2014. (in Chinese))
- [2] 富立. 非光滑多体系统动力学 LCP 方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2016. (Fu Li. *Dynamics of Non-Smooth Multibody Systems: LCP Method*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2016. (in Chinese))
- [3] 齐朝晖. 多体系统动力学[M]. 北京: 科学出版社, 2008. (Qi Zhaohui. *Dynamics of Multibody Systems*[M]. Beijing: Science Press, 2008. (in Chinese))
- [4] Blajer W, Kołodziejczyk K. A geometric approach to solving problems of control constraints: theory and a DAE framework[J]. *Multibody System Dynamics*, 2004, **11**(4): 343-364.
- [5] Pappalardo C M, Guida D. On the computational methods for solving the differential-algebraic equations of motion of multibody systems[J]. *Machines*, 2018, **6**(2): 20.
- [6] Bottasso C L, Dopico D, Trainelli L. On the optimal scaling of index three DAEs in multibody dynamics[J]. *Multibody System Dynamics*, 2008, **19**(1): 3-20.
- [7] Sun W. Numerical algorithms for differential-algebraic equations of multibody dynamics[C]//2016 16th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS). Gyeongju, Korea (South), 2016: 786-791.
- [8] Hussein B A, Shabana A A. Sparse matrix implicit numerical integration of the stiff differential/algebraic equations: implementation[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2011, **65**(4): 369-382.
- [9] Hu J, Wang T. An efficient high-precision recursive dynamic algorithm for closed-loop multibody systems[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2019, **118**(4): 181-208.
- [10] 赵维加,潘振宽,王艺兵. 多体系统动力学微分/代数方程约束误差小扰动自我稳定方法[J]. 应用数学和力学, 2000, **21**(1): 94-98. (Zhao Weijia, Pan Zhenkuan, Wang Yibing. An automatic constraint violation stabilization method for differential/algebraic equations of motion multibody system dynamics[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2000, **21**(1): 94-98. (in Chinese))
- [11] 刘颖,马建敏,苏芳,等. 多体系统动力学方程的无违约束数值计算方法[J]. 计算力学学报, 2010, **27**(5): 942-947. (Liu Ying, Ma Jianmin, Su Fang, et al. Precise numerical solution for multi-body system's equations of motion based on algorithm without constraint violation[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2010, **27**(5): 942-947. (in Chinese))
- [12] 付士慧,王琪. 多体系统动力学方程违约修正的数值计算方法[J]. 计算力学学报, 2007, **24**(1): 44-49. (Fu Shihui, Wang Qi. A numerical method for constraint stabilization of dynamic equations of multi-body systems[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2007, **24**(1): 44-49. (in Chinese))
- [13] Kikuuwe R, Brogliato B. A new representation of systems with frictional unilateral constraints and its Baumgarte-like relaxation[J]. *Multibody System Dynamics*, 2017, **39**(3): 267-290.
- [14] Pogorelov D. Differential-algebraic equations in multibody system modeling[J]. *Numerical Algorithms*, 1998,

- 19(1): 183-194.
- [15] 潘振宽, 赵维加, 洪嘉振, 等. 多体系统动力学微分/代数方程组数值方法[J]. 青岛大学学报, 1996, 9(1): 83-96. (Pan Zhenkuan, Zhao Weijia, Hong Jiazhen, et al. Numerical algorithms for differential/algebraic equations of motion of multibody system[J]. *Journal of Qingdao University*, 1996, 9(1): 83-96. (in Chinese))
- [16] Pennestri E, Vita L. Strategies for the numerical integration of DAE systems in multibody dynamics[J]. *Computer Applications in Engineering Education*, 2004, 12(2): 106-116.
- [17] Bayo E, Avello A. Singularity-free augmented Lagrangian algorithms for constrained multibody dynamics[J]. *Nonlinear Dynamics*, 1994, 5(2): 209-231.
- [18] Uchida T, Mcphee J. Triangularizing kinematic constraint equations using Gröbner bases for real-time dynamic simulation[J]. *Multibody System Dynamics*, 2011, 25(3): 335-356.
- [19] Blajer W, Schiehlen W, Schirm W. A projective criterion to the coordinate partitioning method for multibody dynamics[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 1994, 64(2): 86-98.
- [20] Carpinelli M, Gubitosa M, Mundo D, et al. Automated independent coordinates' switching for the solution of stiff DAEs with the linearly implicit Euler method[J]. *Multibody System Dynamics*, 2016, 36(1): 67-85.
- [21] Wehage K T, Wehage R A, Ravani B. Generalized coordinate partitioning for complex mechanisms based on kinematic substructuring[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2015, 92: 464-483.
- [22] Bauchau O A, Laulusa A. Review of contemporary approaches for constraint enforcement in multibody systems[J]. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2008, 3(1): 011005.
- [23] Kurdila A J, Junkins J L, Hsu S. Lyapunov stable penalty methods for imposing holonomic constraints in multibody system dynamics[J]. *Nonlinear Dynamics*, 1993, 4(1): 51-58.
- [24] Yu Q, Chen I M. A direct violation correction method in numerical simulation of constrained multibody systems[J]. *Computational Mechanics*, 2000, 26(1): 52-57.
- [25] Blajer W. A geometric unification of constrained system dynamics[J]. *Multibody System Dynamics*, 1997, 1(1): 3-21.
- [26] Zhang J, Liu D, Liu Y. A constraint violation suppressing formulation for spatial multibody dynamics with singular mass matrix[J]. *Multibody System Dynamics*, 2016, 36(1): 87-110.
- [27] Eich E. Convergence results for a coordinate projection method applied to mechanical systems with algebraic constraints[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1993, 30(5): 1467-1482.
- [28] Yoon S, Howe R M, Greenwood D T. Geometric elimination of constraint violations in numerical simulation of Lagrangian equations[J]. *Journal of Mechanical Design*, 1994, 116(4): 1058-1064.
- [29] Blajer W. Elimination of constraint violation and accuracy aspects in numerical simulation of multibody systems[J]. *Multibody System Dynamics*, 2002, 7: 265-284.
- [30] Aghili F, Piedbceuf J C. Simulation of motion of constrained multibody systems based on projection operator[J]. *Multibody System Dynamics*, 2003, 10(1): 3-16.
- [31] Marques F, Souto A P, Flores P. On the constraints violation in forward dynamics of multibody systems[J]. *Multibody System Dynamics*, 2017, 39(4): 385-419.
- [32] Bayo E, Garcia De Jalon J, Serna M A. A modified Lagrangian formulation for the dynamic analysis of constrained mechanical systems[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988, 71(2): 183-195.
- [33] Blajer W. Augmented Lagrangian formulation: geometrical interpretation and application to systems with singularities and redundancy[J]. *Multibody System Dynamics*, 2002, 8(2): 141-159.
- [34] Zhang J, Liu D, Liu Y. A constraint violation suppressing formulation for spatial multibody dynamics with singular mass matrix[J]. *Multibody System Dynamics*, 2016, 36(1): 87-110.
- [35] Neto M A, Ambrósio J. Stabilization methods for the integration of DAE in the presence of redundant constraints[J]. *Multibody System Dynamics*, 2003, 10: 81-105.