

修正轴向移动 Timoshenko 梁的自由振动^{*}

梁晋涛, 王 则, 郭江源, 张延超

(太原科技大学 应用科学学院, 太原 030024)

摘要: 考虑了剪切效应引起的转动惯量, 应用物质坐标系下的 Newton 第二定理建立了修正的轴向移动 Timoshenko 梁模型. 求解了系统的固有频率, 并分析了固有频率随梁长、梁高、轴向速度等参数变化的规律. 并将该文模型得到的结果与传统的轴向移动 Euler-Bernoulli 梁理论模型、轴向移动 Rayleigh 梁理论模型和轴向移动 Timoshenko 梁理论模型的结果进行对比. 结果表明: 当轴向移动梁的长高比大于 10 时, 四种模型得到的结果一致. 当长高比较小时, 该文的结果与经典的轴向移动 Timoshenko 梁模型基本一致. 此外, 剪切效应引起的转动惯量对高阶频率的影响更大. 因此, 在轴向移动梁的动力学分析中应加以考虑剪切效应引起的转动惯量的影响.

关键词: 修正 Timoshenko 梁; 剪切效应; 转动惯量; 自由振动; 固有频率

中图分类号: O322 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.460039

Free Vibration of Modified Axially Moving Timoshenko Beams

Liang Jintao, Wang Ze, Guo Jiangyuan, Zhang Yanchao

(School of Applied Science, Taiyuan University of Science and Technology,
Taiyuan 030024, P.R. China)

Abstract: The rotational inertia caused by the shear effect was considered, and a modified axial motion Timoshenko beam model was established under Newton's 2nd law in the material coordinate system. The natural frequencies of the system were solved, and the laws of the natural frequencies changing with parameters such as the beam length, the beam height and the axial velocity, were analyzed. The results obtained by this model were compared with those by the traditional axially moving Euler-Bernoulli beam theoretical model, the axially moving Rayleigh beam theoretical model and the axially moving Timoshenko beam theoretical model. The results show that, when the length-to-height ratio of the axially moving beam is greater than 10, the results obtained by the 4 models are consistent. When the length-to-height ratio is relatively small, the present results are basically consistent with those by the classical axially moving Timoshenko beam model. In addition, the rotational inertia caused by the shear effect has a greater impact on higher-order frequencies. Therefore, the influence of the moment of inertia due to the shear effect shall be considered in the dynamic analysis of axially moving beams.

Key words: modified Timoshenko beam; shear effect; moment of inertia; free vibration; natural frequency

* 收稿日期: 2025-03-03; 修订日期: 2025-10-20

基金项目: 山西省博士生启动基金(20222062); 山西省基础研究计划(202203021212303)

作者简介: 梁晋涛(1997—), 男, 硕士生(E-mail: liangjintao6283@qq.com);

王则(1988—), 男, 副教授, 博士(通信作者. E-mail: wangzty@yeah.net).

引用格式: 梁晋涛, 王则, 郭江源, 张延超. 修正轴向移动 Timoshenko 梁的自由振动[J]. 应用数学和力学, 2026, 47(8): 1086-1092.

0 引言

轴向移动系统广泛应用于航空航天、土木、机械、军事等领域,其横向振动问题的研究受到了广大研究人员的关注^[1-3].这类结构通常建模为轴向移动梁模型,精确建模是研究其横向振动的基础.经过众多研究人员对轴向移动梁结构的研究,发展成了轴向移动 Euler-Bernoulli 梁理论模型^[4-5]、轴向移动 Rayleigh 梁理论模型^[6-7]和轴向移动 Timoshenko 梁理论模型^[8-9]三种经典模型.基于经典模型,研究人员在研究过程中考虑特殊因素进行建模,特别是转动惯量.Ding 等^[10]研究了转动惯量对轴向移动梁亚临界和超临界自由振动的影响,并分析比较了有无转动惯量的相对差异.Ghayesh 等^[11]研究了转动惯量和温度对时变速度轴向移动梁的非线性振动、稳态响应和稳定性的影响.Wang^[12]研究了转动惯量对轴向加速黏弹性 Rayleigh 梁稳定性的影响.以上研究表明,转动惯量对轴向移动梁横向振动的分析有着重要影响.

近年来,国内外学者针对经典 Timoshenko 梁模型理论展开深入探究,取得了一系列新进展.Elishakoff 等^[13]发现了经典的 Timoshenko 梁理论模型中没有考虑剪切效应引起的转动惯量对其动力特性的影响.陈镭等^[14]在 Timoshenko 梁的基础上,考虑了剪切效应引起的转动惯量,提出了修正的 Timoshenko 梁模型.Liang 等^[15]研究了改进的轴向运动 Timoshenko 梁超临界区三比一内部共振的动态响应.目前还欠缺将该修正方法应用到轴向移动 Timoshenko 梁模型理论中的研究.

本文基于经典的轴向移动 Timoshenko 梁模型,考虑剪切效应引起的转动惯量,建立了修正轴向移动 Timoshenko 梁模型.利用 Newton 第二定律推导了修正模型的控制方程,求解了固有频率.通过对比修正模型和三种经典模型的一阶固有频率,分析了该修正方法对轴向移动梁模型的影响.

1 运动方程

图 1(a)为轴向移动梁的整体分析原理图,其中 E 是弹性模量, G 是剪切模量, I 是绕横轴的惯性矩, L 是梁的跨度, ρ 是梁的材料密度, γ 是梁轴向移动速度, P 是梁的轴向张力, $w(x,t)$ 为横向振动的位移.图 1(b)为梁微元受力图.剪力 V 以使得微段顺时针旋转为正,弯矩 M 以使得微段下部受拉为正,受压为负.

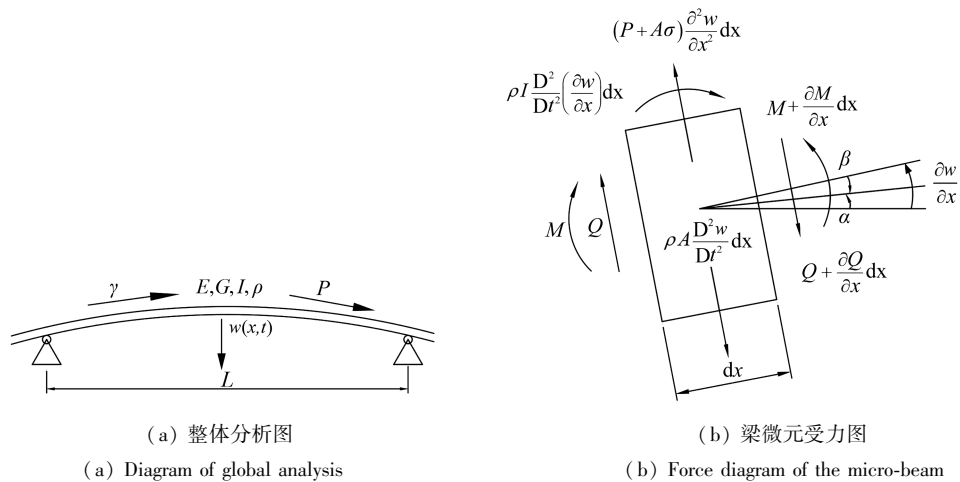


图 1 轴向移动梁的原理图

Fig. 1 Schematic diagram of an axially moving beam

应用物质坐标系下的 Newton 第二定律,在转动方向上有

$$\frac{\partial M}{\partial x} dx - Q dx = \rho I \frac{D^2}{Dt^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx; \quad (1)$$

在竖直方向上有

$$(P + A\sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx - \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \rho A \frac{D^2 w}{Dt^2} dx, \quad (2)$$

式中, M 和 Q 分别表示微元截面的弯矩和剪力, σ 是扰动导致的梁的应力,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \gamma \frac{\partial}{\partial x}. \quad (3)$$

梁的变形包含两部分:弯矩引起的变形 w_b 和剪切力引起的变形 w_s , ψ 是截面的转角, α 是由弯矩引起的截面转角, β 是剪切力引起的截面转角. 因此, 有转角方程

$$\psi = \alpha - \beta, \quad \psi = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \alpha = \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad \beta = \frac{\partial w_s}{\partial x}. \quad (4)$$

将式(4)代入式(1), 得到

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x} - \rho I \frac{D^2}{Dt^2} \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} \right) + \rho I \frac{D^2}{Dt^2} \left(\frac{\partial w_s}{\partial x} \right). \quad (5)$$

在式(5)中的第一项为 Euler-Bernoulli 梁理论产生, 第二项为 Timoshenko 梁理论产生, 第三项为考虑剪切效应引起的转动惯量产生. 对于线性材料, 弯矩 M 和曲率、剪切力 Q 和转角 α 间的关系可以表示为

$$M = EI \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad Q = \kappa AG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \alpha \right), \quad (6)$$

式中, κ 是形状因子, 在后续推导中将仅位移与弯矩引起的转角 α 存在. 采用梁的中平面拉伸引起的扰动张力的平均值^[16]:

$$A\sigma = \frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (7)$$

将式(3)、(6)和(7)代入式(1)和(2)中, 得到

$$\rho A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \gamma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - (P + A\sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \kappa AG \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) = 0, \quad (8)$$

$$\rho I \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + 2\gamma \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} + \gamma^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) - EI \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} - \kappa AG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \alpha \right) = 0. \quad (9)$$

消去截面转角 α , 得到修正的轴向移动 Timoshenko 梁横向振动控制方程:

$$\rho A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \gamma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left(P + \frac{EA}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho I \left(1 + \frac{E}{\kappa G} \right) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + 2\gamma \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial t} + \gamma^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) = 0. \quad (10)$$

简支边界条件为

$$w|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=L} = 0, \quad M|_{x=0} = 0, \quad M|_{x=L} = 0. \quad (11)$$

引入以下无量纲变量:

$$w = \frac{w}{L}, \quad x = \frac{x}{L}, \quad t = t \sqrt{\frac{P}{\rho AL^2}}, \quad \eta = \frac{E}{\kappa G}, \quad \gamma = \gamma \sqrt{\frac{\rho A}{P}}, \quad k_f = \frac{EI}{PL^2}, \quad k_1 = \frac{I}{AL^2}, \quad k_N = \frac{EA}{P}. \quad (12)$$

将式(12)代入式(10)和(11)中, 得到无量纲控制方程和边界条件:

$$(\ddot{w} + 2\gamma \dot{w}' + (\gamma^2 - 1)w'') + k_f w^{(4)} - \frac{1}{2} k_N w'' \int_0^1 (w')^2 dx - k_1 (1 + \eta) (\ddot{w}'' + 2\gamma \dot{w}^{(3)} + \gamma^2 w^{(4)}) = 0, \quad (13)$$

$$w|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=1} = 0, \quad w''|_{x=0} = 0, \quad w''|_{x=1} = 0, \quad (14)$$

式中, $(\dot{})$ 表示对时间的导数; $()'$, $()''$, $()^{(3)}$, $()^{(4)}$ 分别表示对坐标 x 的 1 次、2 次、3 次、4 次导数.

2 固有频率

为了求解其固有频率^[10], 忽略其非线性项和激励项等非线性部分, 得到

$$\ddot{w} + 2\gamma \dot{w}' + (\gamma^2 - 1)w'' + k_f w^{(4)} - k_1 (1 + \eta) (\ddot{w}'' + 2\gamma \dot{w}^{(3)} + \gamma^2 w^{(4)}) = 0. \quad (15)$$

假设横向振动的解为

$$w(x, t) = \phi_n(x) e^{i\omega_n t} + c.c., \quad (16)$$

其中 ϕ_n 为第 n 阶模态函数, ω_n 为第 n 阶固有频率, $c.c.$ 为共轭项。

将式(16)代入式(15)中,得到

$$\begin{aligned} & [k_f - k_1(1 + \eta)\gamma^2] \phi_n^{(4)} - 2i\gamma k_1(1 + \eta)\omega_n \phi_n^{(3)} + \\ & [k_1(1 + \eta)\omega_n^2 + (\gamma^2 - 1)] \phi_n'' + 2i\gamma\omega_n \phi_n' - \omega_n^2 \phi_n = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

其中模态函数的解可以写为

$$\phi_n(x) = C_{n1} e^{is_{n1}x} + C_{n2} e^{is_{n2}x} + C_{n3} e^{is_{n3}x} + C_{n4} e^{is_{n4}x}, \quad (18)$$

其中 C_{nj} 为待定常数. 将式(16)代入式(14)中得到边界条件

$$\phi_n(0) = \phi_n(1) = 0, \quad \phi_n''(0) = \phi_n''(1) = 0. \quad (19)$$

将式(18)代入式(17)中得到特征方程

$$\begin{aligned} & [k_f - k_1(1 + \eta)\gamma^2] s_{nj}^4 - 2\gamma k_1(1 + \eta)\omega_n s_{nj}^3 - \\ & [k_1(1 + \eta)\omega_n^2 + (\gamma^2 - 1)] s_{nj}^2 - 2\gamma\omega_n s_{nj} - \omega_n^2 = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

根据边界条件(19)得到常数 C_{nj} 的齐次代数方程

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{is_{n1}} & e^{is_{n2}} & e^{is_{n3}} & e^{is_{n4}} \\ s_{n1}^2 & s_{n2}^2 & s_{n3}^2 & s_{n4}^2 \\ s_{n1}^2 e^{is_{n1}} & s_{n2}^2 e^{is_{n2}} & s_{n3}^2 e^{is_{n3}} & s_{n4}^2 e^{is_{n4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{n1} \\ C_{n2} \\ C_{n3} \\ C_{n4} \end{pmatrix} = 0. \quad (21)$$

方程(21)解的非平凡性要求系数矩阵的行列式等于零. 因此, 我们得到以下辅助方程:

$$\begin{aligned} & [e^{i(s_{n1}+s_{n2})} + e^{i(s_{n3}+s_{n4})}] (s_{n1}^2 - s_{n2}^2)(s_{n3}^2 - s_{n4}^2) - \\ & [e^{i(s_{n1}+s_{n3})} + e^{i(s_{n2}+s_{n4})}] (s_{n1}^2 - s_{n3}^2)(s_{n2}^2 - s_{n4}^2) + \\ & [e^{i(s_{n2}+s_{n3})} + e^{i(s_{n1}+s_{n4})}] (s_{n2}^2 - s_{n3}^2)(s_{n1}^2 - s_{n4}^2) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

给出简支边界条件下的第 n 阶模态函数:

$$\begin{aligned} \phi_n(x) = C_{n1} & \left[e^{is_{n1}x} - \frac{(s_{n1}^2 - s_{n4}^2)(e^{is_{n3}} - e^{is_{n1}})}{(s_{n2}^2 - s_{n4}^2)(e^{is_{n3}} - e^{is_{n2}})} e^{is_{n2}x} - \frac{(s_{n1}^2 - s_{n4}^2)(e^{is_{n1}} - e^{is_{n2}})}{(s_{n3}^2 - s_{n4}^2)(e^{is_{n3}} - e^{is_{n2}})} e^{is_{n3}x} + \right. \\ & \left. \left(-1 + \frac{(s_{n1}^2 - s_{n4}^2)(e^{is_{n3}} - e^{is_{n1}})}{(s_{n2}^2 - s_{n4}^2)(e^{is_{n3}} - e^{is_{n2}})} - \frac{(s_{n1}^2 - s_{n4}^2)(e^{is_{n1}} - e^{is_{n2}})}{(s_{n3}^2 - s_{n4}^2)(e^{is_{n3}} - e^{is_{n2}})} \right) e^{is_{n4}x} \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

为明确该修正对轴向运动梁固有频率的影响, 定义了以下条件:

$$e_{x(E-MT)} = \frac{\omega_{nE} - \omega_{nMT}}{\omega_{nE}} \times 100\%, \quad e_{x(R-MT)} = \frac{\omega_{nR} - \omega_{nMT}}{\omega_{nR}} \times 100\%, \quad e_{x(CT-MT)} = \frac{\omega_{nCT} - \omega_{nMT}}{\omega_{nCT}} \times 100\%, \quad (24)$$

其中, ω_n 为一阶固有频率, e_x 表示一阶固有频率的相对差值, 下标 E 为轴向移动 Euler-Bernoulli 梁理论模型, 下标 R 为轴向移动 Rayleigh 梁理论模型, 下标 CT 为经典轴向移动 Timoshenko 梁理论模型, 下标 MT 为修正轴向移动 Timoshenko 梁理论模型。

3 算例分析

为定量表示理论结论, 选择系统参数: 弹性模量 $E = 200$ MPa, 剪切模量 $G = 68$ MPa, 密度 $\rho = 1\,200$ kg/m³, 轴向拉力 $P = 80$ N, 梁的跨度 $L = 0.15$ m, 梁截面宽 $a = 0.02$ m, 截面高 $h = 0.015$ m, 形状系数 $\kappa = 6/5$ 。

图 2(a) 给出了四种轴向移动梁模型的第一阶固有频率随梁长高比的变化; 图 2(b) 给出了修正模型同三种经典模型一阶固有频率相对差值随梁长高比的变化. 由图 2(a) 可知, 当梁的长高比大于 10 时, 本文中修正 Timoshenko 梁模型得到的结果与经典 Timoshenko 梁的结果基本一致. 随着梁长高比的增加, 四种模型得到的第一阶固有频率趋于相同. 由图 2(b) 可知, 当梁的长高比较小时, 本文中修正 Timoshenko 梁模型与经典 Timoshenko 梁的相对差值较小. 随着梁长高比的增加, 本文模型同三种经典模型的相对差值均减小到 1% 附近。

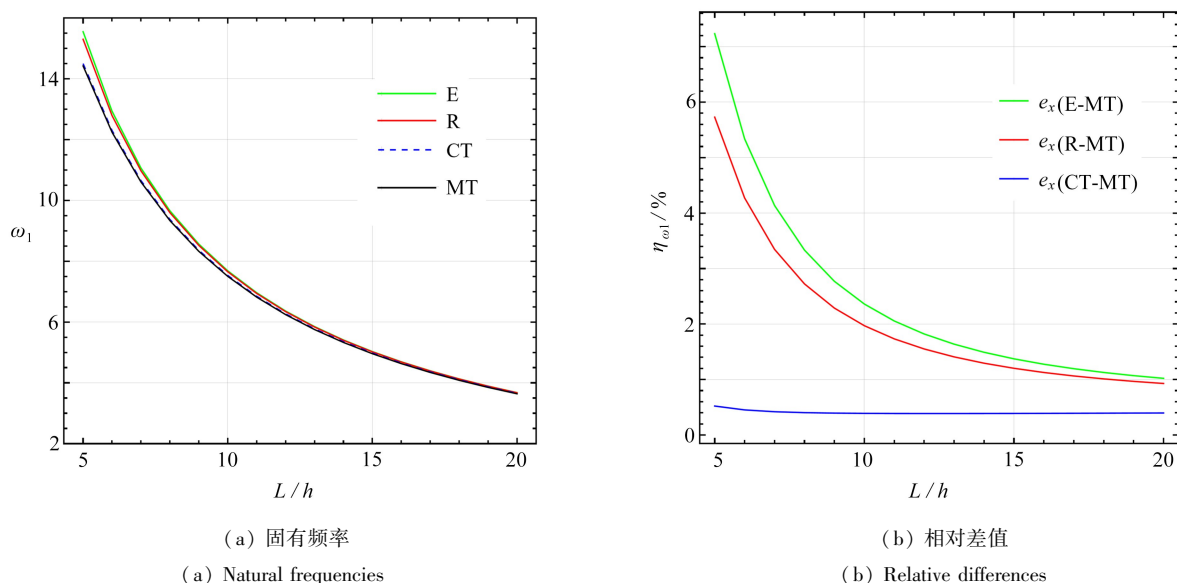


图2 不同梁长高比条件下四种轴向移动模型的一阶固有频率
Fig. 2 The 1st-order natural frequencies of 4 models with different beam length-height ratios

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同。

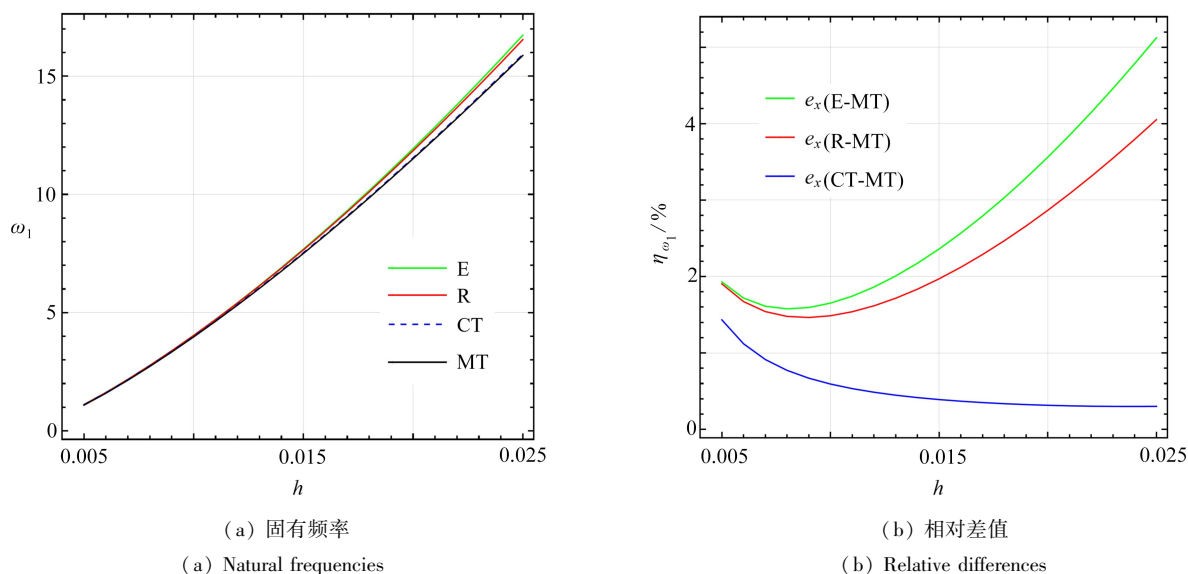


图3 不同梁高度条件下四种轴向移动模型的一阶固有频率
Fig. 3 The 1st-order natural frequencies of 4 models with different beam heights

图3(a)给出了四种轴向移动梁模型的第一阶固有频率随梁高的变化;图3(b)给出了修正模型同三种经典模型一阶固有频率相对差值随梁高的变化.由图3(a)可知,当梁的高度较小时,本文中修正 Timoshenko 梁模型得到的结果与经典 Timoshenko 梁的结果基本一致.随着梁高度的增加,四种模型得到的第一阶固有频率趋于发散.由图3(b)可知,当梁的高度较小时,本文中修正 Timoshenko 梁模型与经典 Timoshenko 梁的相对差值较小.随着梁高度的增加,本文模型同经典 Timoshenko 梁模型的相对差值逐渐减小,本文模型同轴向移动 Euler-Bernoulli 梁理论模型和轴向移动 Rayleigh 梁理论模型的相对差值逐渐增大.

图4(a)给出了四种轴向移动梁模型的第一阶固有频率随梁轴向速度的变化;图4(b)给出了修正模型同三种经典模型一阶固有频率相对差值随梁轴向速度的变化.由图4(a)可知,当梁的轴向速度较小时,本文中修正 Timoshenko 梁模型得到的结果与经典 Timoshenko 梁的结果基本一致.随着梁轴向速度的增加,四种模型得到的第一阶固有频率遵循相同的趋势减小.由图4(b)可知,当梁的轴向速度较小时,本文中修正

Timoshenko 梁模型与经典 Timoshenko 梁的相对差值较小,随着梁轴向速度的增加,本文模型同三种经典模型的相对差值均逐渐增加,四种模型的轴向速度越接近临界速度,其相对差值越大。

图 5(a) 给出了四种轴向移动梁模型的前三阶固有频率随梁长的变化;图 5(b) 给出了修正模型同三种经典模型第三阶固有频率相对差值随梁长的变化。由图 5(a) 可知,当梁的长较小时,本文中修正 Timoshenko 梁模型得到的结果与经典 Timoshenko 梁的结果基本一致。随着梁长的增加,四种模型得到的前三阶固有频率遵循相同的趋势减小。固有频率的阶数越高,修正模型同三种经典模型的差距越大。由图 5(b) 可知,当梁长较小时,本文中修正 Timoshenko 梁模型与经典 Timoshenko 梁的相对差值较小。随着梁长的增加,本文模型同三种经典模型的相对差值均逐渐减小,且梁第三阶固有频率的差值明显大于前两阶。

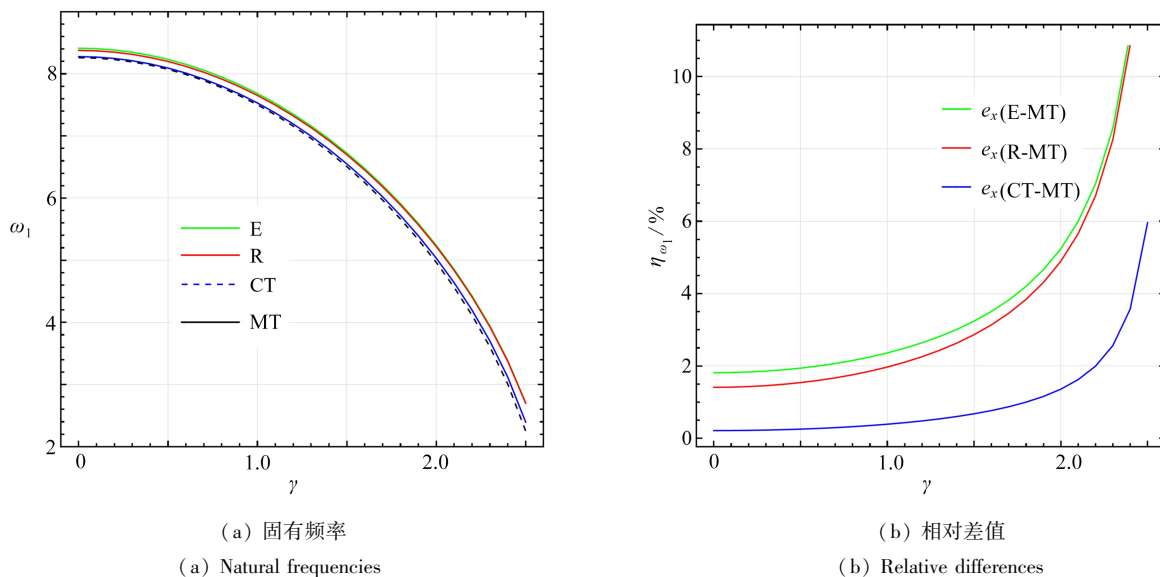


图 4 不同轴向速度条件下四种轴向移动模型的一阶固有频率
Fig. 4 The 1st-order natural frequencies of 4 models with different axial velocities

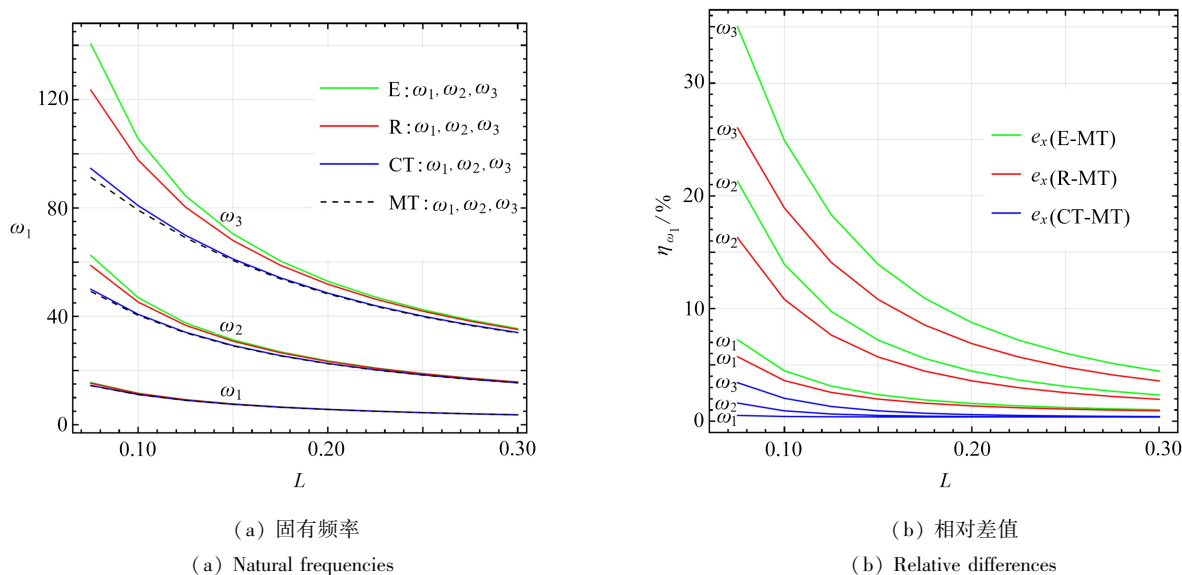


图 5 不同长高比条件下四种轴向移动模型的高阶固有频率
Fig. 5 High-order natural frequencies of 4 models with different aspect ratios

4 结 论

本文以轴向移动梁为研究对象,考虑剪切效应引起的转动惯量,对经典的轴向移动 Timoshenko 梁模型

进行了修正.应用物质坐标系下的 Newton 第二定理,建立运动微分方程.求解系统的第一阶固有频率,并比较了本文模型与经典模型的结果,得到以下结论:

- 1) 相较于经典的轴向移动 Timoshenko 梁模型,本文的修正模型更加简单.
- 2) 当梁的长高比大于 10 时,本文模型的结果与传统的 Euler-Bernoulli 模型、Rayleigh 梁模型和 Timoshenko 模型的结果趋于一致.当梁的长高比较小时,本文提出的模型与经典的模型的结果一致.
- 3) 剪切效应引起的转动惯量对轴向移动梁系统的高阶固有频率有较大影响.
- 4) 剪切效应引起的转动惯量对轴向移动梁系统的动力学特性有较大影响,因此在轴向移动梁的动力学分析中应该加以考虑.

参考文献(References):

- [1] Scheidl J, Vetyukov Y. Review and perspectives in applied mechanics of axially moving flexible structures[J]. *Acta Mechanica*, 2023, **234**(4): 1331-1364.
- [2] Zhu H, Zhu W D, Fan W. Dynamic modeling, simulation and experiment of power transmission belt drives: a systematic review[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2021, **491**: 115759.
- [3] 段应昌, 段壮志, 刘义, 等. 轴向运动梁动力学研究综述[J]. 兵器装备工程学报, 2021, **42**(6): 20-26. (Duan Yingchang, Duan Zhuangzhi, Liu Yi, et al. Review of research on dynamics of axially moving beam[J]. *Journal of Ordnance Equipment Engineering*, 2021, **42**(6): 20-26. (in Chinese))
- [4] Liu M, Yao G. Nonlinear forced vibration and stability of an axially moving beam with a free internal hinge[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2024, **112**(9): 6877-6896.
- [5] 马国亮, 陈立群. 轴向运动梁的横向随机响应[J]. 振动与冲击, 2014, **33**(9): 78-82. (Ma Guoliang, Chen Liqun. Transverse random response of an axially moving beam[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2014, **33**(9): 78-82. (in Chinese))
- [6] Chang J R, Lin W J, Chen Y C, et al. Vibration and stability of an axially moving and spinning Rayleigh beam[J]. *Journal of the Chinese Society of Mechanical Engineers*, 2023, **44**(1): 1-10.
- [7] 王波, 蒋敏. 非线性轴向运动黏弹性 Rayleigh 梁受迫振动的微分求积法[J]. 机械设计与制造, 2020(4): 62-65. (Wang Bo, Jiang Min. Forced vibration of nonlinear axially moving viscoelastic Rayleigh beams with differential quadrature approach comparison[J]. *Machinery Design & Manufacture*, 2020(4): 62-65. (in Chinese))
- [8] Li Y, Ding J, Ding H, et al. Nonlinear parametric vibration and stability analysis of axially moving belt with non-homogeneous boundaries[J]. *European Journal of Mechanics A: Solids*, 2026, **115**: 105837.
- [9] Ding H, Tan X, Zhang G C, et al. Equilibrium bifurcation of high-speed axially moving Timoshenko beams[J]. *Acta Mechanica*, 2016, **227**(10): 3001-3014.
- [10] Ding H, Li Y, Chen L Q. Effects of rotary inertia on sub- and super-critical free vibration of an axially moving beam[J]. *Meccanica*, 2018, **53**(13): 3233-3249.
- [11] Ghayesh M H, Khadem S E. Rotary inertia and temperature effects on non-linear vibration, steady-state response and stability of an axially moving beam with time-dependent velocity[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2008, **50**(3): 389-404.
- [12] Wang B. Effect of rotary inertia on stability of axially accelerating viscoelastic Rayleigh beams[J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2018, **39**(5): 717-732.
- [13] Elishakoff I, Hache F, Challamel N. Variational derivation of governing differential equations for truncated version of Bresse-Timoshenko beams[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2018, **435**: 409-430.
- [14] 陈镭, 万春风, 薛松涛, 等. Timoshenko 梁运动方程的修正及其影响[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2005, **33**(6): 711-715. (Chen Rong, Wan Chunfeng, Xue Songtao, et al. Modification of motion equation of Timoshenko beam and its effect[J]. *Journal of Tongji University (Natural Science)*, 2005, **33**(6): 711-715. (in Chinese))
- [15] Liang J T, Wang Z, Zhang Y C, et al. Three-to-one internal resonance in supercritical modified axially moving Timoshenko beams[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2025, **113**(17): 22507-22533.
- [16] Chen L Q, Yang X D. Steady-state response of axially moving viscoelastic beams with pulsating speed: comparison of two nonlinear models[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, **42**(1): 37-50.