

微通道中偶应力流体的非 Fourier 传热研究^{*}

薛 博, 赵光普, 张佳莉, 张 越, 王 晗

(内蒙古工业大学 理学院, 呼和浩特 010051)

摘要: 研究了偶应力流体在微通道中的非 Fourier 热传导特性, 分析了偶应力参数、Hartmann 数、Joule 热效应和双相滞后时间参数对流体温度分布和热传递特性的影响。通过建立相关的控制方程, 结合非 Fourier 热传导模型, 研究了不同物理效应的作用。结果表明, 偶应力流体的流动性和热扩散特性受到上述参数的显著影响。偶应力参数的增大加剧了温度梯度的变化, Hartmann 数则增强了磁场对流体的约束, 抑制了热传导; Joule 热效应促进了温度梯度的增大, 突出了非 Fourier 效应; 双相滞后时间参数的变化对温度峰值及响应速度具有明显调控作用。

关 键 词: 微通道; 偶应力流体; 非 Fourier 热传导; 温度分布

中图分类号: O357.1 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.460076

Non-Fourier Heat Transfer Study of Couple Stress Fluids in Microchannels

Xue Bo, Zhao Guangpu, Zhang Jiali, Zhang Yue, Wang Han

(College of Science, Inner Mongolia University of Technology,
Hohhot 010051, P.R. China)

Abstract: The non-Fourier heat transfer characteristics of couple stress fluid in a microchannel were investigated, and effects of the couple stress parameters, the Hartmann number, the Joule heating effect and the 2-phase lag time parameters on the temperature distributions and heat transfer characteristics of the fluid were analyzed through establishment of the relevant governing equations combined with the non-Fourier heat transfer model. The results show that, the above parameters significantly influence the fluidity and heat diffusion characteristics of the couple stress fluid. The increase of the couple stress parameter aggravates the temperature gradient; the Hartmann number enhances the magnetic field confinement and inhibits the heat conduction; the Joule heating effect promotes the temperature gradient and highlights the non-Fourier effect; and the change of the biphasic hysteresis time parameter has a significant modulation effect on the temperature peak and the response speed.

Key words: microchannel; couple stress fluid; non-Fourier heat transfer; temperature distribution

^{*} 收稿日期: 2025-04-14; 修订日期: 2025-09-02

基金项目: 国家自然科学基金(12562028;11802147);内蒙古自治区高校科研项目基金(NJZZ23076);内蒙古自治区直属高校基本科研业务费(JY20230031);内蒙古自治区自然科学基金(2023MS01012)

作者简介: 薛博(2000—),男,硕士(E-mail: 1950377630@qq.com);
赵光普(1984—),男,副教授,博士,硕士生导师(通信作者, E-mail: zhaoguangu105@sina.com)。

引用格式: 薛博, 赵光普, 张佳莉, 张越, 王晗. 微通道中偶应力流体的非 Fourier 传热研究[J]. 应用数学和力学, 2026, 47(7): 845-857.

0 引言

微纳尺度流体传热问题在现代工程与科学领域具有重要的研究意义,其应用范围涵盖微通道、微处理器、热交换器以及生物医用设备等.随着电子设备不断向小型化发展,微纳尺度热管理需求日益增长,提高微尺度传热性能已成为该领域的研究热点.传统 Fourier 热传导定律在描述微通道内流体热传输时逐渐暴露出局限性:在微小尺度下,由于流体分子间相互作用及温度场不均匀性的影响,热量扩散行为偏离了 Fourier 定律的基本假设,从而使非 Fourier 热传导效应成为亟待深入探讨的问题.

偶应力流体(CSF)模型是最重要的非 Newton 流体模型之一.近年来,CSF 因其独特的力学特性及广泛的工程应用前景而受到广泛关注.最早由 Stokes^[1]提出的 CSF,由悬浮在黏性介质中的刚性且随机取向的颗粒构成,其与经典 Navier-Stokes 方程描述的黏性流体相比,呈现出偶应力、体偶耦合及非对称应力张量等特性^[2-3].该理论的主要重点是考虑在 Newton 黏性理论中通常被忽略的粒径效应.该模型通过假设流体在运动学水平上没有微观结构,运动的运动学完全由速度场决定,从而说明了偶应力(即由微元素自旋产生的应力)的完全影响.因此,应力张量是非对称的,这与传统的连续介质理论相冲突.CSF 模型由于其能够适配多种流体边界条件且数学形式简单而被广泛使用.CSF 理论有许多工程、工业和科学应用.此外,该模型可以有效地描述由液晶、合成液、浆液、润滑剂、动物血液、电流变液和聚合物添加剂等由子结构组成的流体的流态.在微纳尺度下,CSF 的热传导特性较为复杂,不仅受到流体内部温度场不均匀性的影响,还受到外部磁场、Joule 热效应等多重因素的共同作用.Kumar 等^[4]对旋转微通道中 CSF 的传热特性展开了系统分析,揭示了偶应力参数、Hartmann 数及转速对温度分布的显著影响.结果表明,适当调控偶应力参数可提高微通道的热传递效率.Roja 等^[5]关注垂直微通道内可变导热率 CSF 的流动与传热特性,同时考虑了内热源和催化反应对温度场的影响.结果表明,偶应力参数与导热率变化对局部温度峰值和热耗散有显著调控作用.此工作作为微通道化学反应器的热管理提供了理论依据.Siva 等^[2]以偶应力模型刻画非 Newton 流体在旋转微通道中的 MHD 和电渗流传热特性,并给出能量方程精确解.结果显示,偶应力参数、Hartmann 数及 Joule 加热显著影响温度场.该工作作为微通道非 Newton 流体传热提供了完整的理论框架.

随着电磁流体动力学理论的发展,磁场对流体传热影响的研究逐渐成为热点问题.Hartmann 数作为描述磁场对导电液体流动影响的重要参数,其变化直接影响流体流动性和热扩散特性^[6-9].此外,电渗流动在微通道流体动力学研究中也备受关注.长龙等^[10]利用同伦摄动法结合 Chebyshev 谱配置方法获得了流体速度分布及体积流率的近似解析解,并系统分析了溶液 pH 值、盐浓度及流体黏性比对电渗流动的影响.Joule 热效应在微通道内同样扮演着关键角色^[11-13],其主要通过改变局部温度分布,在高电流密度或高热流密度条件下导致温度场显著非均匀.

综上所述,尽管已有大量工作针对微通道中的电磁流动传热开展了机理与参数敏感性分析^[7],研究了 CSF 在微通道/受磁场条件下的动量与能量传输特性^[14-15],以及双相滞后或其他非 Fourier 模型在微尺度瞬态热传导问题上的应用^[16],但目前文献中很少有工作将 CSF 的电磁流体动力学驱动与双相滞后非 Fourier 热传导模型以及 Joule 加热与偶应力相关耗散同时耦合并给出可分析的温度场解.已有关于 CSF 考虑 Joule 热或黏性耗散的研究通常基于 Fourier 传热假设或只考虑局部单一热源项,未能系统揭示非 Fourier 效应与偶应力参数、Hartmann 数、Joule 热参数间的耦合效应对瞬态温度峰值与响应速度的影响.本文基于 CSF 的非 Fourier 热传导模型,结合理论分析,系统研究了偶应力参数、Hartmann 数、Joule 热参数及双相滞后时间参数对流体温度分布与热传递特性的影响.通过建立并求解相应的控制方程,深入解析了流动系统中的温度梯度及热传导特性,为微通道中 CSF 热传递问题的研究提供了新的理论视角,同时为微通道热交换器优化设计及微尺度热管理系统工程应用提供理论指导.

1 建模和解决方案

问题的物理描述如图 1 所示.我们考虑的是 CSF 在狭窄/微流体通道中的非稳态电磁流体动力学流动.流动的轴向方向沿 X 轴, Z 轴指向外部流动平面, Y 轴垂直于相距 $2H$ 的通道壁.假设通道的长度远大于宽度($L \gg W$),宽度远大于高度($W \gg 2H$).顶壁还考虑了指定的 zeta 电位 ζ .此外,通道壁面接收均匀和恒定的

壁面热通量(q_w),其在流向流体时为正.流动由沿 X 轴和 Z 轴的外加电场 $\mathbf{E} = (E_x, 0, E_z)$ 引发,沿 Y 轴(即流动方向的法线)存在强度 $\mathbf{B} = (0, B_0, 0)$ 的恒定均匀磁场,沿轴向存在恒定压力梯度 $-dP/dX$.

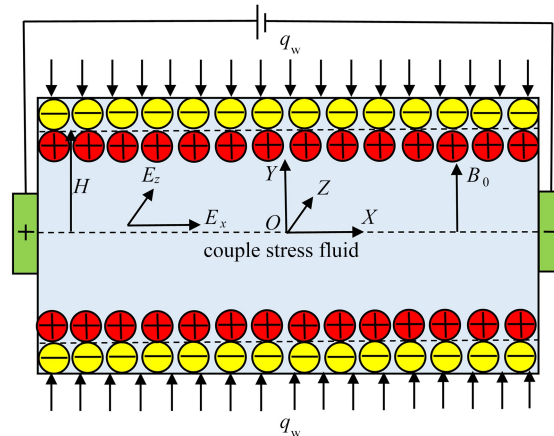


图 1 平行板微通道示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the parallel plate microchannels

1.1 速度分布

速度场方程为^[14]

$$\rho \frac{\partial U}{\partial T} = -\frac{dP}{dX} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - \eta \frac{\partial^4 U}{\partial Y^4} - \kappa^2 \varepsilon E_x \zeta \times \frac{\cosh(\kappa Y)}{\cosh(\kappa H)} + \sigma E_z B_0 - \sigma B_0^2 U, \quad (1)$$

式中, ρ 为流体密度, μ 为黏性系数, η 为偶应力黏性系数, ε 为电解质溶液的介电常数, σ 为电导率, 其中 $\kappa = (2n_0 e^2 y^2 / (\varepsilon k_B T_{ab}))^{1/2}$ 为 Debye-Hückel 参数的倒数, n_0 为溶液离子体积浓度, e 为自由电子电荷, k_B 为 Boltzmann 常数, T_{ab} 为绝对温度. 相关的初始条件和边界条件为

$$U(Y, T) \big|_{T=0} = 0, \quad (2)$$

$$U(Y, T) \big|_{Y=\pm H} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \bigg|_{Y=\pm H} = 0. \quad (3)$$

无量纲变量是

$$\begin{cases} y = \frac{Y}{H}, u = \frac{U}{U_{HS}}, t = \frac{T}{\rho H^2 / \mu}, K = \kappa H, S = \frac{E_z H}{U_{HS}} \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}, \\ Ha = B_0 H \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}, \Omega = -\frac{(dP/dX) H^2}{\mu U_{HS}}, \gamma = \sqrt{\frac{\mu H^2}{\eta}}, \end{cases} \quad (4)$$

其中 Ha 为 Hartmann 数(也称磁场参数), K 为双电层的电动宽度, S 是无量纲横向电场参数, $U_{HS} = -\varepsilon E_x \zeta / \mu$ 是 Helmholtz-Smoluchowski 电渗速度, Ω 为无量纲压力梯度参数, γ 为偶应力参数.

然后使用 Laplace 变换法推导出速度分布为^[14]

$$\begin{aligned} u(y, t) = A_{21} & \left[C_{21} \cosh \left(\sqrt{\frac{\gamma^2 - \sqrt{\gamma^4 - 4\gamma^2 Ha^2}}{2}} y \right) + \right. \\ & \left. C_{22} \cosh \left(\sqrt{\frac{\gamma^2 + \sqrt{\gamma^4 - 4\gamma^2 Ha^2}}{2}} y \right) + C_{23} \cosh(Ky) + C_{24} \right] + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos \left[\left(\frac{2n-1}{2} \right) \pi y \right] \times e^{s_n t} + \sum_{m=1}^{\infty} F_m \cos \left[\left(\frac{2m-1}{2} \right) \pi y \right] \times e^{s_m t}, \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$A_{21} = \frac{1}{2Ha^2(K^4 - \gamma^2 K^2 + \gamma^2 Ha^2) \sqrt{\gamma^4 - 4\gamma^2 Ha^2}}, \quad (6)$$

$$C_{21} = [(\gamma^2 K^2 Ha^2 (2K^2 - (\gamma^2 + \sqrt{\gamma^4 - 4\gamma^2 Ha^2}))) - (\gamma^2 + \sqrt{\gamma^4 - 4\gamma^2 Ha^2})(\Omega + SHa)(K^4 - \gamma^2 K^2 + \gamma^2 Ha^2)] / \cosh\left(\sqrt{\frac{\gamma^2 - \sqrt{\gamma^4 - 4\gamma^2 Ha^2}}{2}}\right), \quad (7)$$

$$C_{22} = [(\gamma^2 K^2 Ha^2 ((\gamma^2 - \sqrt{\gamma^4 - 4\gamma^2 Ha^2}) - 2K^2)) + (\gamma^2 - \sqrt{\gamma^4 - 4\gamma^2 Ha^2})(\Omega + SHa)(K^4 - \gamma^2 K^2 + \gamma^2 Ha^2)] / \cosh\left(\sqrt{\frac{\gamma^2 + \sqrt{\gamma^4 - 4\gamma^2 Ha^2}}{2}}\right), \quad (8)$$

$$C_{23} = \frac{2\gamma^2 K^2 Ha^2 \sqrt{\gamma^4 - 4\gamma^2 Ha^2}}{\cosh K}, \quad (9)$$

$$C_{24} = 2\sqrt{\gamma^4 - 4\gamma^2 Ha^2}(\Omega + SHa)(K^4 - \gamma^2 K^2 + \gamma^2 Ha^2), \quad (10)$$

$$E_n = \left(\frac{16(-1)^{n+1}\gamma^2(2n-1)\pi}{(2n-1)^4\pi^4 + 4\gamma^2\pi^2(2n-1)^2 + 16\gamma^2 Ha^2} \right) \times \left[\frac{K^2 \left(K^2 - \gamma^2 - \left(\frac{2n-1}{2} \right)^2 \pi^2 \right)}{\left(\gamma^2 - K^2 + \left(\frac{2n-1}{2} \right)^2 \pi^2 \right) \left(K^2 + \left(\frac{2n-1}{2} \right)^2 \pi^2 \right)} - \frac{\Omega + SHa}{\left(\frac{2n-1}{2} \right)^2 \pi^2} \right], \quad (11)$$

$$F_m = \frac{16(-1)^m\gamma^2(2m-1)\pi}{(2m-1)^4\pi^4 + 4\gamma^2\pi^2(2m-1)^2 + 16\gamma^2 Ha^2} \times \left[\frac{K^2}{K^2 + \left(\frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2} + \frac{\Omega + SHa}{\left(\frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2} \right], \quad (12)$$

$$s_n = \frac{1}{4\gamma^2} \left[\gamma^4 - 4\gamma^2 Ha^2 - \left(\gamma^2 + 2 \left(\frac{2n-1}{2} \right)^2 \pi^2 \right)^2 \right], \quad (13)$$

$$s_m = \frac{1}{4\gamma^2} \left[\gamma^4 - 4\gamma^2 Ha^2 - \left(\gamma^2 + 2 \left(\frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2 \right)^2 \right]. \quad (14)$$

1.2 温度分布

一维 Fourier 热传导定律可表示为^[17]

$$q(Y, T) = -k \frac{\partial \Theta(Y, T)}{\partial Y}, \quad (15)$$

其中, k 为热导率, Θ 为温度, q 为热流量. 将 Fourier 定律中的热流量 q 和温度 Θ 看作时间 T 和空间 Y 的函数, 并引入双相滞后时间 τ_t 和 τ_q , 式(6)变为

$$q(Y, T + \tau_q) = -k \frac{\partial \Theta(Y, T + \tau_t)}{\partial Y}. \quad (16)$$

对很小的滞后时间 τ_t 和 τ_q , 将方程两边分别在 T 点进行 Taylor 展开, 并保留一阶偏导数, 得

$$q + \tau_q \frac{\partial q}{\partial T} = -k \frac{\partial}{\partial Y} \left(\Theta + \tau_t \frac{\partial \Theta}{\partial T} \right). \quad (17)$$

对不可压缩流体, 忽略辐射与外源(仅考虑黏性耗散与 Joule 热)时, 能量方程为

$$\rho c \left(\frac{\partial \Theta}{\partial T} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right) = -\frac{\partial q}{\partial Y} + \Phi_{\text{visc}} + Q_{\text{Joule}}, \quad (18)$$

其中, 对于以轴向剪切为主的单向流, 耗散近似为 Newton 黏性部分, 即 $\mu \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2$. CSF 会引入与二阶速度曲

率相关的额外耗散项, 在弱剪切近似下, 可写为 $\eta \left(\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right)^2$, 于是总耗散可近似表示为

$$\Phi_{\text{visc}} = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 + \eta \left(\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right)^2, \quad (19)$$

此外,体积电功率密度为 $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$, 而 Ohm 定律在流体中常写为

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B}), \quad (20)$$

则 Joule 加热项为

$$Q_{\text{Joule}} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E} = \sigma E_x^2 + \sigma B_0^2 U^2. \quad (21)$$

在微通道问题中,横向尺寸远小于轴向,研究关注时间响应而非轴向传输,于是假设轴向温度梯度可忽略,从而去除对流项.结合式(15)、(18)–(21)可得热能输运的控制方程为

$$\rho c \frac{\partial \Theta}{\partial T} = k \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} + \sigma (E_x^2 + B_0^2 U^2) + \mu \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 + \eta \left(\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right)^2, \quad (22)$$

式中左端为内能变化项,右端第一项为横向导热项,第二项为 Joule 加热项,第三项为 Newton 黏性耗散项,第四项为偶应力耗散项.

联立式(17)和式(22)得

$$\begin{aligned} \tau_q \rho c \frac{\partial^2 \Theta}{\partial T^2} + \rho c \frac{\partial \Theta}{\partial T} &= k \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} + k \tau_1 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial Y^2 \partial T} + \sigma (E_x^2 + B_0^2 U^2) + \mu \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 + \\ &\quad \eta \left(\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right)^2 + 2\tau_q \left(\sigma B_0^2 U \frac{\partial U}{\partial T} + \mu \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial Y \partial T} + \eta \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \frac{\partial^3 U}{\partial Y^2 \partial T} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

初始条件满足

$$\Theta|_{T=0} = \Theta_0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial T} \Big|_{T=0} = 0; \quad (24)$$

边界条件满足

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Y} \Big|_{Y=0} = 0, \quad \Theta|_{Y=H} = \Theta_0. \quad (25)$$

引入如下的无量纲变量:

$$\begin{cases} \theta = \frac{\Theta - \Theta_0}{q_w H/k}, \quad \tau_q^* = \frac{\tau_q}{\rho H^2/\mu}, \quad \tau_1^* = \frac{\tau_1}{\rho H^2/\mu}, \\ J = \frac{\sigma E_x^2 H}{q_w}, \quad Br = \frac{\mu U_{\text{HS}}^2}{q_w H}, \quad Pr = \frac{\mu c}{k}, \end{cases} \quad (26)$$

则控制方程、初始条件和边界条件(23)–(25)化为

$$A \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + B \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + D \frac{\partial^3 \theta}{\partial y^2 \partial t} + Q, \quad (27)$$

$$\theta|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (28)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \theta|_{y=1} = 0, \quad (29)$$

其中

$$A = \tau_q^* Pr, \quad B = Pr, \quad D = \tau_1^*, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} Q &= Br Ha^2 u^2 + Br \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{Br}{\gamma^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \\ &\quad 2\tau_q^* Br \left(Ha^2 u \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial t} \right) + J. \end{aligned} \quad (31)$$

对式(27)使用特征函数法进行求解,将方程的自由项 $Q(y, t)$ 和 $\theta(y, t)$ 按特征函数系 $\left\{ \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} y\right) \right\} (n=0,1,2,\dots)$ 展开,设

$$\theta(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(t) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} y\right), \quad (32)$$

$$Q(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(t) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} y\right). \quad (33)$$

将式(32)和式(33)代入到式(27)–(29)并化简后可以得到

$$A\theta_n''(t) + \left(B + \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4}D\right)\theta_n'(t) + \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4}\theta_n(t) = Q_n(t), \quad (34)$$

$$\theta_n(t)|_{t=0} = 0, \quad \theta_n'(t)|_{t=0} = 0. \quad (35)$$

设

$$L[\theta_n(t)] = \int_0^{\infty} \theta_n(t) e^{-Pt} dt = \theta_n(P), \quad (36)$$

$$L[Q_n(t)] = \int_0^{\infty} Q_n(t) e^{-Pt} dt = Q_n(P), \quad (37)$$

其中 L 是 Laplace 变换算子.

$$Q_n(t) = 2 \int_0^1 Q(y, t) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} y\right) dy. \quad (38)$$

对式(34)进行 Laplace 变换得

$$AP^2\theta_n(P) + \left(B + \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4}D\right)P\theta_n(P) + \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4}\theta_n(P) = Q_n(P), \quad (39)$$

$$\theta_n(P) = \frac{1}{A\omega} L[e^{-at} \sin(\omega t)] Q_n(P), \quad (40)$$

其中

$$a = \frac{4B + (2n+1)^2\pi^2 D}{8A}, \quad \omega = \sqrt{\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4A} - a^2}. \quad (41)$$

对式(40)进行 Laplace 逆变换得

$$\theta_n(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{A\omega} L[e^{-at} \sin(\omega t)] Q_n(P)\right] = \frac{1}{A\omega} (e^{-at} \sin(\omega t)) Q_n(t). \quad (42)$$

最后解得

$$\begin{aligned} \theta(y, t) = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{A\omega} (e^{-at} \sin(\omega t)) \left(2 \int_0^1 \left(BrHa^2 u^2 + Br \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{Br}{\gamma^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. 2\tau_q^* Br \left(Ha^2 u \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial t} \right) + J \right) \times \right. \\ & \left. \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} y\right) dy \right) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} y\right). \end{aligned} \quad (43)$$

2 结果与讨论

目前为止已经得到了 CSF 在电场、磁场和压力梯度作用下通过微通道时的速度分布和温度分布.这部分用图形反映了一组无量纲参数引起的变化.这些无量纲参数的取值和变化范围为^[14,18]: 流体黏度 $\mu = 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, 微通道半高 H 的范围从 $10 \text{ } \mu\text{m}$ 到 $500 \text{ } \mu\text{m}$, 特征电渗流动速度 $U_{\text{HS}} = 5 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 电导率 σ 的范围从 $2.2 \times 10^{-4} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ 到 $4 \times 10^3 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$, 外加磁场强度 B_0 的范围从 0.01 T 到 5 T , 横向电场强度 E_x 的范围从 0 到 $30 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Hartmann 数 Ha 的取值范围从 0 到 10 , 横向电场参数 S 的范围从 0 到 6×10^3 . 其他参数的顺序依次为: 偶应力参数 γ 的范围从 0.5 到 10 , 电渗参数 K 的范围从 0 到 30 , 外加压力梯度 Ω 的范围从 -1 到 1 , Prandtl 数 Pr 的取值范围为 30 到 100 , Brinkman 数 Br 的取值范围从 0 到 0.1 , Joule 热参数 J 的取值范围为 0 到 10 .

在描述当前的结果之前,将当前的速度和温度场与文献中报道的进行比较是重要的.我们将速度和温度与 Banerjee 等^[19]的研究进行了比较(见图 2),他们在考虑滑移相关 zeta 势的情况下,使用 Newton 流体在压力和电渗透力的联合作用下研究了微通道中的传热分析.通过将 CSF 转化为 Newton 流体并将 Banerjee 等^[19]的模型设置为无滑移条件,我们可以比较当前的速度和温度场.在本研究的结果和现有的结果之间图 2 显示了很好的一致性,证实了模型的准确性.此外,图 3 展示了采用 Gauss-Jacobi 数值积分方法得到的结果与本研究的结果对比,二者吻合良好,这反映了本研究结果的有效性.

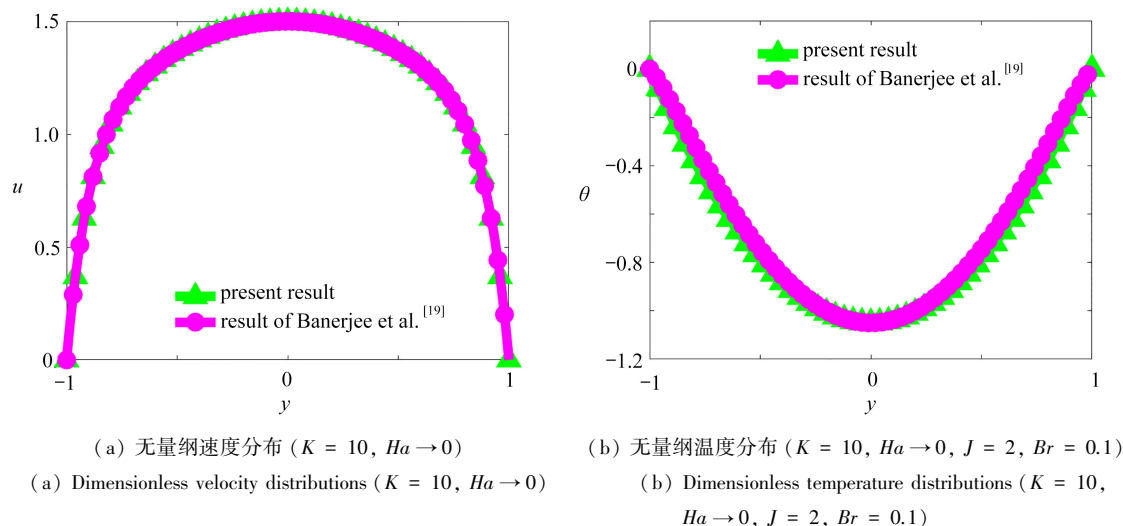


图 2 本模型的验证

Fig. 2 The validation of the present model

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同。

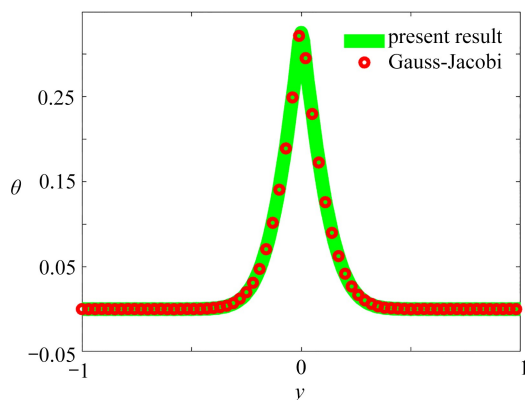


图 3 本研究的无量纲温度分布与 Gauss-Jacobi 数值积分结果对比 ($K = 10, Ha = 3, J = 3, Br = 0.01, \gamma = 5, Pr = 30, \tau_q^* = 2, \tau_t^* = 1$)

Fig. 3 Comparison of the dimensionless temperature distributions from this study with the results from the Gauss-Jacobi numerical integration ($K = 10, Ha = 3, J = 3, Br = 0.01, \gamma = 5, Pr = 30, \tau_q^* = 2, \tau_t^* = 1$)

图 4 展示了在其他参数固定时, Fourier 传热与非 Fourier 传热的温度场差异.可以看到,在图 4(a)中温度在很早的时间就显著升高,域内大部分区域迅速接近高温,且靠近右壁处出现极陡的温度梯度;而在图 4(b)中温度随时间呈明显的分层上升,整个场域的温度增长被延迟且瞬时峰值明显被抑制.此行为的物理机制可归结为非 Fourier 模型中的弛豫效应,弛豫时间使热扰动以有限速度传播,能量不能瞬时分布到全域,而是在源区附近首先累积,随后以热波形式向内传播.数学上,弛豫项在温度方程中引入了高阶时间导数项,使温度演化具有延迟与波动特征.因此在相同的无量纲时间下,非 Fourier 模型预测的域平均温度以及峰值温度均低于 Fourier 预测.

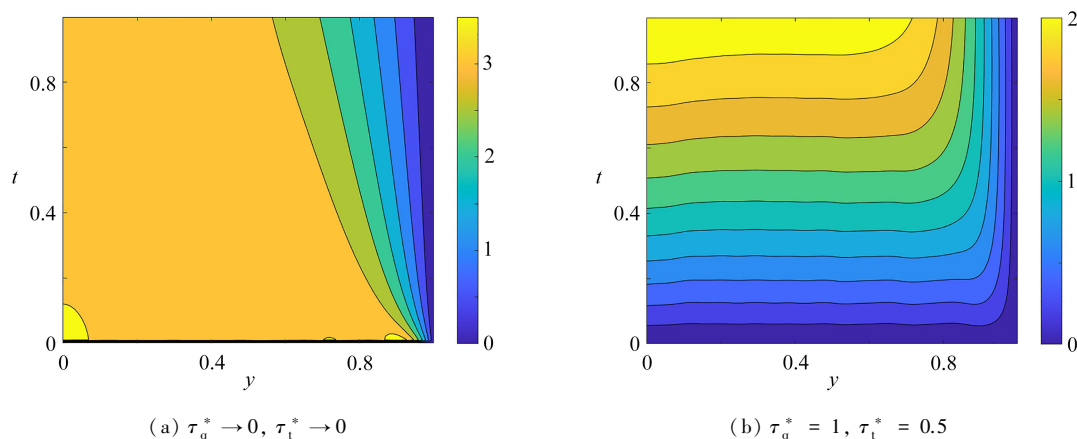


图4 非 Fourier 传热与 Fourier 传热对比 ($K = 10, Ha = 1, Br = 0.000\ 1, J = 1, Pr = 30, \gamma = 5$)

Fig. 4 Comparison of non-Fourier heat transfer and Fourier heat transfer ($K = 10, Ha = 1, Br = 0.000\ 1, J = 1, Pr = 30, \gamma = 5$)

图5显示了在不同的偶应力参数值(γ)下,平行板微通道中无量纲温度的剖面图变化.如图5所示,随着偶应力参数的增大,温度梯度逐渐增大.其原因是当偶应力参数增大时,偶应力黏性系数减小,流体流动阻力减小,导致无量纲速度增大,流速加快从而使热量传输加剧.我们发现温度梯度在壁面附近的变化较大.值得注意的是,较高的偶应力可能会引起更多的局部热量积累,导致温度梯度在一些区域增强,特别是靠近边界或在流动较强的区域.

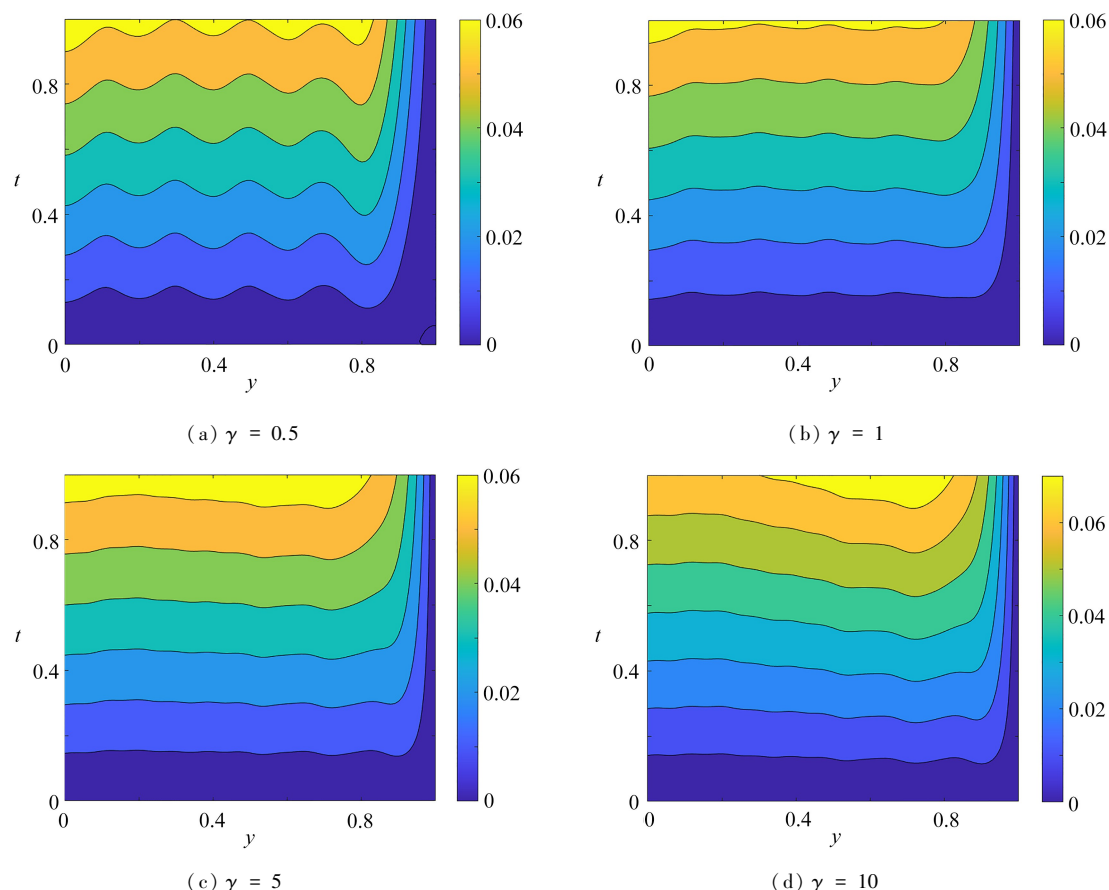


图5 不同偶应力参数 γ 的无量纲温度分布 ($K = 20, Ha = 0.1, Br = 0.000\ 1, J = 1, Pr = 100, \tau_q^* = \tau_t^* = 16$)

Fig. 5 Dimensionless temperature distributions for different coupling stress parameters γ

($K = 20, Ha = 0.1, Br = 0.000\ 1, J = 1, Pr = 100, \tau_q^* = \tau_t^* = 16$)

图6描述了无量纲温度随 Hartmann 数的变化.在低 Hartmann 数时,温度梯度相对较大,表明温度的变

化比较迅速.这是因为此时流体具有较大的流动性和较小的磁场影响,热量容易在空间中传播.随着 Hartmann 数增加,流体的流动性逐渐减弱,温度梯度变得较为平缓,表明热量的扩散和传播受到磁场的显著抑制.此时,磁场增强了流体的约束效应,导致温度变化变得更加平缓.

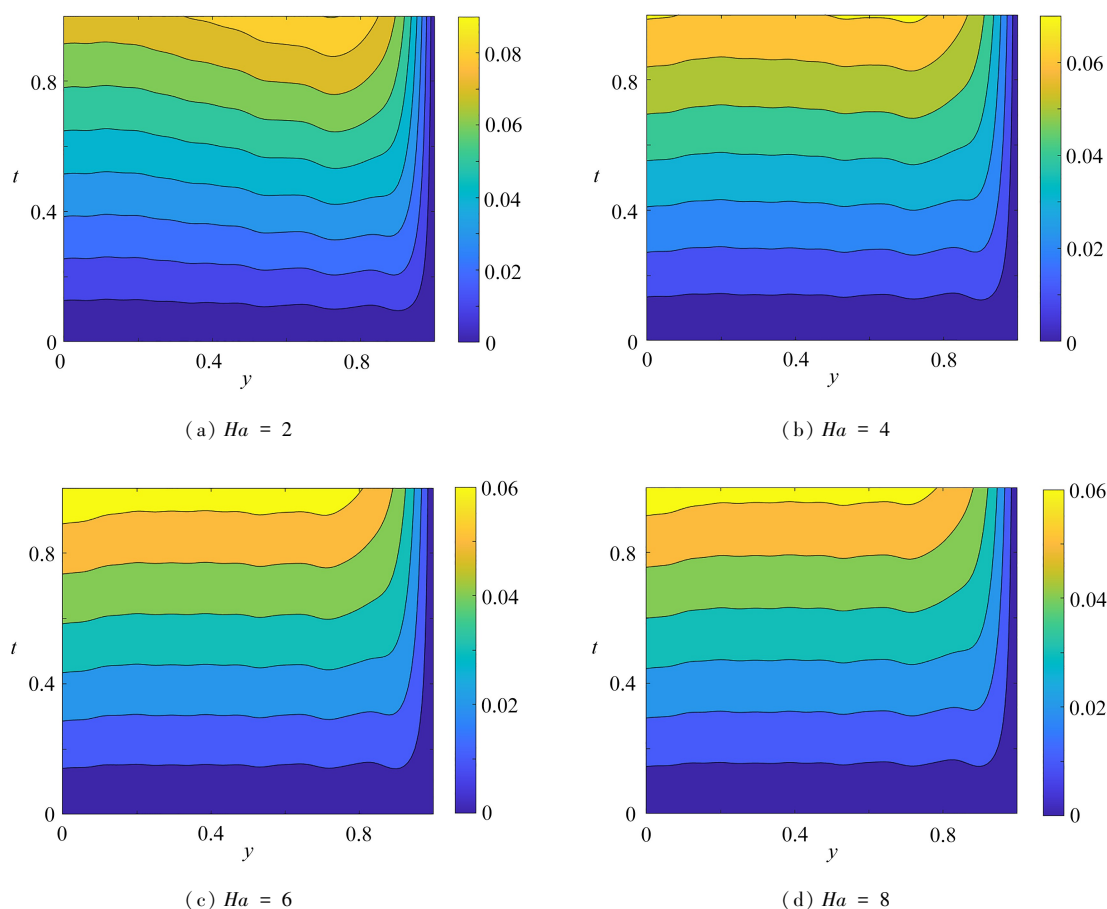


图 6 不同 Hartmann 数的无量纲温度分布 ($K = 20$, $\gamma = 10$, $Br = 0.000\ 1$, $J = 1$, $Pr = 100$, $\tau_q^* = \tau_t^* = 16$)

Fig. 6 Dimensionless temperature distributions for different Hartmann numbers

($K = 20$, $\gamma = 10$, $Br = 0.000\ 1$, $J = 1$, $Pr = 100$, $\tau_q^* = \tau_t^* = 16$)

图 7 展示了温度随 Joule 热参数(J)的变化.我们观察到, Joule 热参数增大时,温度梯度的变化更加剧烈,温度场的变化更加显著,这表明流体在高 Joule 热下的热导率和热传输特性发生了变化,温度更容易从局部区域扩展到整个流体域.这是因为当 Joule 热参数增大时,流体内的局部温度增高,这会形成更明显的温度梯度.较大的温度梯度促使热量向低温区域扩散,增加了整个流体区域的热交换效果.随着 Joule 热效应的增强,温度梯度变得更加剧烈,流体的热传导性能也发生了变化.

图 8 展示了当空间位置 $y = 0.2$ 时,对于不同的时间参数 τ_q^* ,无量纲温度随时间的变化分布图.从图 8 中观察到,温度随时间的变化具有相同的趋势,首先快速增长并在 $t = 0.55$ 左右到达其峰值,而后开始下降.同时可以发现,在同一 τ_t^* 下,随着 τ_q^* 的增加,温度降低.其原因是 τ_q^* 越大,表示热流对温度梯度的反应越迟缓或滞后越强.对同样的加热过程而言,若热流难以及时建立,那么温度也不会快速累积到较高值,导致峰值温度更低,并且在后期,系统由于持续的传热不够及时,最终温度也更低.

图 9 展示了当时间 $t = 0.3$ 时,对于不同的时间参数 τ_q^* ,无量纲温度随空间的变化分布图.其中图 9(a) 的非 Fourier 时滞项相对较大,而图 9(b) 相对较小.我们观察到,随着 τ_q^* 的增大,稳态温度峰值降低,曲线更尖锐.当 τ_q^* 较小时,峰值更高,分布更平缓.这主要是由于滞后时间 τ_q^* 越大,热流对温度梯度的响应越迟钝,不再能形成与局部梯度相匹配的强通量去排散热量.经过足够长时间演化后,系统稳态温度场更均匀,从而峰值被削弱.

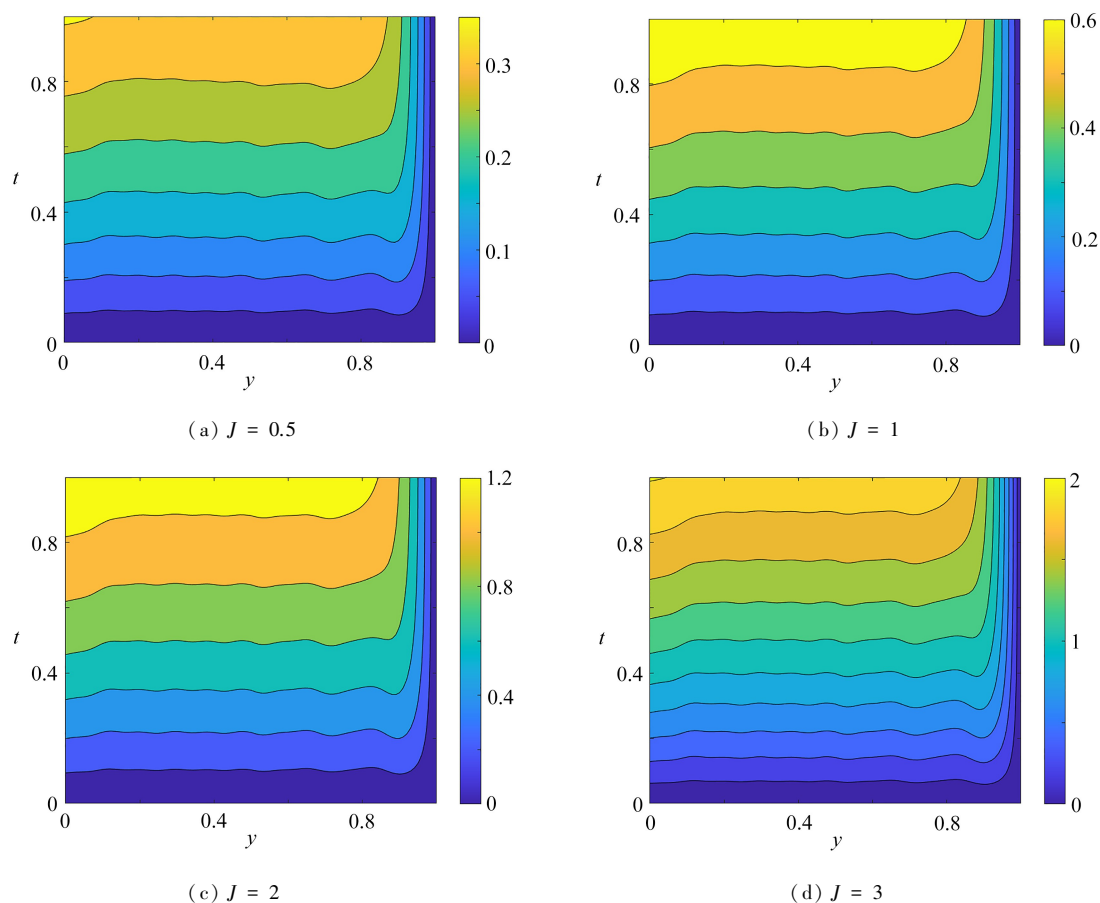


图7 不同 Joule 热参数 J 的无量纲温度分布 ($K = 20$, $Ha = 0.1$, $\gamma = 10$, $Br = 0.0001$, $Pr = 100$, $\tau_q^* = 1$, $\tau_t^* = 0.5$)

Fig. 7 Dimensionless temperature distributions for different Joule heating parameters J

($K = 20$, $Ha = 0.1$, $\gamma = 10$, $Br = 0.0001$, $Pr = 100$, $\tau_q^* = 1$, $\tau_t^* = 0.5$)

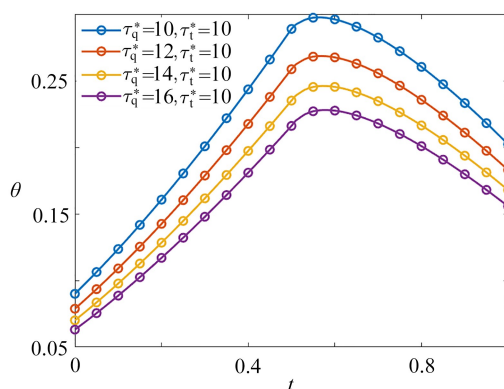


图8 不同 τ_q^* 的无量纲温度分布 ($K = 20$, $Ha = 1$, $\gamma = 4.75$, $Pr = 100$, $J = 1$)

Fig. 8 Dimensionless temperature distributions for different τ_q^* ($K = 20$, $Ha = 1$, $\gamma = 4.75$, $Pr = 100$, $J = 1$)

图10描述了不同 Brinkman 数下的无量纲温度分布.可以看到,随着 Br 增大,中心处温度显著升高并形成尖峰,说明黏性耗散对温度场影响迅速增强.当 $Br \leq 10^{-3}$ 时,黏性耗散对温度场影响微弱;当 $Br \geq 10^{-2}$ 时,黏性耗散对温度的贡献变得不可忽略;至 $Br = 0.1$ 时,黏性耗散成为主导的加热源之一.有限热弛豫时间使得产生的热量难以快速扩散,从而在中心处局部累积形成尖峰.由此可见,在微通道尺度或高剪切流动条件下,若 $Br \geq 10^{-2}$ 时,则在温度预测中必须考虑黏性耗散与有关非 Fourier 效应,否则将严重低估局部温升.

图11显示了 Br 与 Pr 对通道中无量纲温度场的显著影响.首先, Br 表征流体中黏性耗散等将机械能转

换为热能的强度, Br 增大相当于增大体热源强度, 从而在通道中心产生更高的温升并使温度分布在源区更加局域化. 其次, Pr 控制热扩散与动量扩散的相对速率. 提高 Pr 会抑制相同 Br 下的无量纲温升, 这与图中 $Pr=100$ 曲线普遍低于 $Pr=30$ 的结果相一致. 结合非 Fourier 热传导中有限的热传播速度, 热量首先在中心区累积, 进一步放大了以上效应. 综上, Br 是提高通道温度的主控参数, 而 Pr 则在给定热源强度下调节温度响应的幅值.

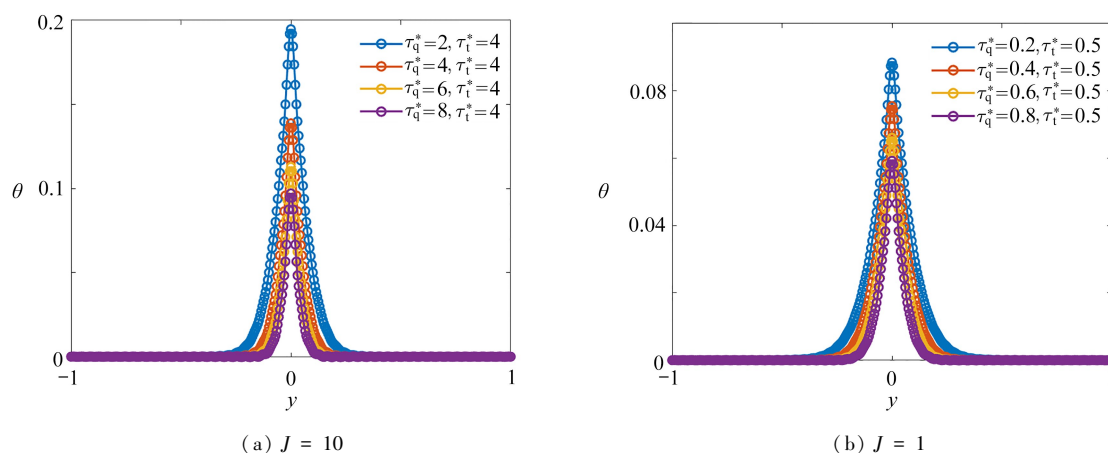


图 9 不同 τ_q^* 的无量纲温度分布 ($K=20, Ha=1, \gamma=5, Pr=100, Br=0.0001$)

Fig. 9 Dimensionless temperature distributions for different τ_q^* ($K=20, Ha=1, \gamma=5, Pr=100, Br=0.0001$)

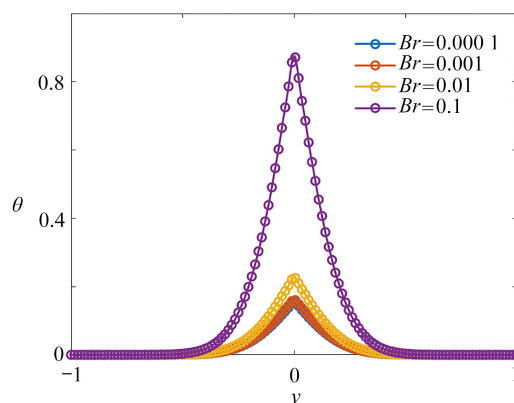


图 10 不同 Br 的无量纲温度分布 ($K=20, Ha=1, \gamma=5, Pr=30, J=1, \tau_q^*=0.5, \tau_i^*=0.5$)

Fig. 10 Dimensionless temperature distributions for different Br ($K=20, Ha=1, \gamma=5, Pr=30, J=1, \tau_q^*=0.5, \tau_i^*=0.5$)

图 12 展示了偶应力项、MHD 项、Joule 热项与非 Fourier 时滞项单独作用与全部耦合作用下的无量纲温度分布. 如图 12 所示, 当偶应力、MHD、Joule 热、非 Fourier 时滞等同时存在时, 源项与流场和应力导致的速度场变化共同把更多能量汇集在通道中心, 产生更强的局部升温. 物理上, Joule 加热和黏性耗散提供热源, 偶应力改变速度梯度从而改变耗散分布, 而 MHD 虽有阻尼但同时改变流场分布, 最终耦合产生比任一单项更大的局部能量积累. Joule 热为直接体积热源, 会在流速较大的区域或电流密度高的区域产生正温升. 单独存在时, 温度形状为中心峰但幅值有限, 因为没有其他机制 (如偶应力改变速度分布) 来放大耗散或聚集能量. 偶应力本身不直接产生大量热源, 但它改变速度梯度, 从而改变黏性耗散的局部强度. 对于所选参数, 偶应力的主要效果是微调耗散分布, 导致温度略微上升, 但幅度小于直接体积热源. MHD 势在抑制速度但同时改变流型, 因而对耗散的空间分布具有调制作用. 单独作用非 Fourier 时滞项时, 温度在中心出现局部冷却. 其原因是时滞项使热扰动以有限速度传播并出现相位滞后, 在无源或弱源情形下, 这种相位效应可以导致中心处热流被瞬时带走或出现相位反转, 从而出现局部负值.

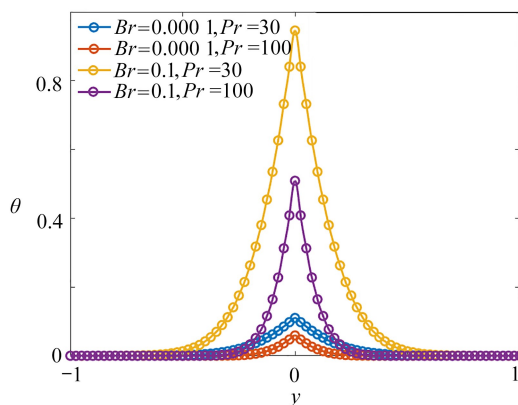


图 11 不同 Br 数与 Pr 数组合下的无量纲温度对比 ($K = 20$, $Ha = 1$, $\gamma = 10$, $J = 10$, $\tau_q^* = 16$, $\tau_t^* = 16$)

Fig. 11 Comparison of dimensionless temperatures under different combinations of Br and Pr numbers

($K = 20$, $Ha = 1$, $\gamma = 10$, $J = 10$, $\tau_q^* = 16$, $\tau_t^* = 16$)

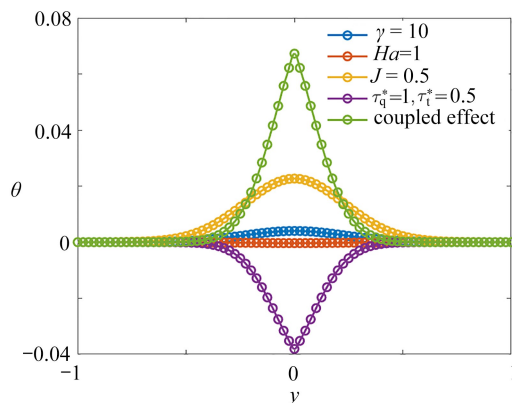


图 12 偶应力项、MHD 项、Joule 热项及非 Fourier 时滞项单独作用与耦合作用的对比

($K = 20$, $Ha = 2$, $\gamma = 10$, $Pr = 30$, $J = 0.5$, $Br = 0.0001$, $\tau_q^* = 1$, $\tau_t^* = 0.5$)

Fig. 12 Comparison of the effects of isolated and coupled contributions from the couple stress term, the MHD term, the Joule heating term, and the non-Fourier time delay term ($K = 20$, $Ha = 2$, $\gamma = 10$, $Pr = 30$, $J = 0.5$, $Br = 0.0001$, $\tau_q^* = 1$, $\tau_t^* = 0.5$)

3 结 论

本文针对微通道内 CSF 的非 Fourier 传热特性展开分析,研究了偶应力参数、Hartmann 数、Joule 热参数及 Brinkman 数对流体温度分布及热传输特性的影响.通过理论推导和图形分析,得到了如下结论:

偶应力参数的增大能够降低流体的流动阻力,从而增强流速,使得壁面附近的温度梯度更加显著;Hartmann 数的增加会增强磁场对流体的约束作用,导致流体的流动性降低,并抑制热扩散效果.随着 Joule 热参数的增大,流体内部的温度梯度显著提高,使得局部区域的热量积累与扩散现象更加明显.在考虑非 Fourier 效应的场合, τ_q^* 对温度演化起关键作用.较小的 τ_q^* 可提升峰值温度,并加快系统的热响应速度,而增大 τ_q^* 则有助于减缓系统温度的上升速率,并抑制过高的峰值温度.

上述结论对微电子冷却、生物微流控芯片与磁电控制热管理器件具有参考意义.在强电场驱动场景下,应适度降低外加磁场强度,以避免 Joule 加热项占比过高而导致局部过热,建议在典型微通道冷却场景中优先考虑 $J \leq 1$ 的工作区间.在快速热响应要求的应用中,适当引入非 Fourier 时滞效应参数,可有效抑制瞬态峰值温度,降低热冲击风险.

参考文献 (References):

- [1] Stokes V K. Couple stresses in fluids[M]//Theories of Fluids With Microstructure: an Introduction. Berlin,

- Heidelberg: Springer, 1984: 34-80.
- [2] Siva T, Jangili S, Kumbhakar B. Heat transfer analysis of MHD and electroosmotic flow of non-Newtonian fluid in a rotating microfluidic channel: an exact solution[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(7): 1047-1062.
- [3] Mekheimer K S. Effect of the induced magnetic field on peristaltic flow of a couple stress fluid[J]. *Physics Letters A*, 2008, **372**(23): 4271-4278.
- [4] Kumar B, Jangili S. Heat transfer analysis of electroosmotic flow of couple stress fluid through a rotating circular microchannel[J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 2025, **208**: 109359.
- [5] Roja A, Khan U, Sollapur S B, et al. Impact of variable thermal conductivity on couple-stress Casson fluid flow through a microchannel with catalytic cubic reactions[J]. *High Temperature Materials and Processes*, 2025, **44**: 20250077.
- [6] Kundu B, Saha S. Review and analysis of electro-magnetohydrodynamic flow and heat transport in microchannels[J]. *Energies*, 2022, **15**(19): 7017.
- [7] Ramesh G K, Gireesha B J, Shehzad S A, et al. Analysis of heat transfer phenomenon in magnetohydrodynamic casson fluid flow through cattaneo-christov heat diffusion theory[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2017, **68**(1): 91.
- [8] Ramesh K, Devakar M. Magnetohydrodynamic peristaltic transport of couple stress fluid through porous medium in an inclined asymmetric channel with heat transfer[J]. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2015, **394**: 335-348.
- [9] Yadav P K, Yadav N. Impact of heat and mass transfer on the magnetohydrodynamic two-phase flow of couple stress fluids through a porous walled curved channel using homotopy analysis method[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2024, **183**: 114961.
- [10] 长龙, 布仁满都拉, 娜仁, 等. pH 调节的纳米平行通道中 Powell-Eyring 流体的电渗流动[J]. *应用数学和力学*, 2025, **46**(1): 72-83. (Chang Long, Buren Mandula, Na Ren, et al. Electroosmotic flows of Powell-Eyring fluids in pH-regulated parallel plate nanochannels[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2025, **46**(1): 72-83. (in Chinese))
- [11] Shit G C, Mondal A, Sinha A, et al. Electro-osmotic flow of power-law fluid and heat transfer in a microchannel with effects of Joule heating and thermal radiation[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2016, **462**: 1040-1057.
- [12] Mondal A, Shit G C. Electro-osmotic flow and heat transfer in a slowly varying asymmetric micro-channel with Joule heating effects[J]. *Fluid Dynamics Research*, 2018, **50**(6): 065502.
- [13] Alipour Lalami A, Hassanzadeh Afrouzi H, Moshfegh A, et al. Investigation of nanofluid heat transfer in a microchannel under magnetic field via lattice Boltzmann method: effects of surface hydrophobicity, viscous dissipation, and joule heating[J]. *Journal of Heat Transfer*, 2019, **141**(6): 062403.
- [14] Siva T, Jangili S, Kumbhakar B, et al. Unsteady electromagnetohydrodynamic flow of couple stress fluid through a microchannel: a theoretical analysis[J]. *European Journal of Mechanics B*, 2022, **95**: 83-93.
- [15] Rana A, Reza M, Shit G C, et al. Electromagnetohydrodynamic flow and thermal performance in a rotating rough surface microchannel[J]. *Physics of Fluids*, 2024, **36**(9): 092012.
- [16] Jha B K, Oyelade I O. The role of dual-phase-lag (DPL) heat conduction model on transient free convection flow in a vertical channel[J]. *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, 2022, **5**: 100266.
- [17] Talaei M R, Kabiri A. Analytical solution of hyperbolic bioheat equation in spherical coordinates applied in radiofrequency heating[J]. *Journal of Mechanics in Medicine and Biology*, 2017, **17**(4): 1750072.
- [18] Zhang J, Zhao G, Farooq U, et al. Thermal convective transport of nanofluids in a microannulus under electromagnetohydrodynamic and time-periodic pressure gradient[J]. *Numerical Heat Transfer (Part A): Applications*, 2025, **86**(23): 8387-8407.
- [19] Banerjee D, Mehta S K, Pati S, et al. Analytical solution to heat transfer for mixed electroosmotic and pressure-driven flow through a microchannel with slip-dependent zeta potential[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2021, **181**: 121989.