

绳驱连续型机器人准静态建模与路径跟踪研究^{*}

张 轲^{1,2}, 张树翠¹, 赵佳源¹,
张欣刚¹, 姚文莉¹, 王贵飞¹

(1. 青岛理工大学 理学院, 山东 青岛 266525;
2. 中通客车股份有限公司, 山东 聊城 252000)

摘要: 绳-孔滑动摩擦造成的驱动迟滞效应是制约绳驱连续型机器人多功能、多领域应用的关键难题之一。在轨迹跟踪过程中, 驱动绳索经历密集的收、放绳切换, 滑动摩擦力在过线孔内频繁换向, 导致柔性臂的当前构型因驱动历史的不同而产生明显差异。本文基于多柔体系统动力学理论开展绳驱连续型机器人的准静态建模, 构建了刚、柔运动解耦的节点力平衡方程, 详细推导了节点力、绳索驱动力的切线刚度矩阵, 提高节点力平衡方程的收敛速度。将轨迹跟踪问题解释为多体系统的伺服约束问题, 采用非线性最小二乘求解器嵌套 Newton-Raphson 迭代算法, 开展有、无末端负载两种条件下的路径跟踪仿真, 得到了连续型机器人的构型演化规律。

关键词: 绳驱连续型机器人; 准静态建模; 迟滞; 滑动摩擦; 路径跟踪

中图分类号: O313.7 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.460093

Study on Quasi-Static Modeling and Path Tracking of Cable-Driven Continuum Robots

Zhang Ke^{1,2}, Zhang Shucui¹, Zhao Jiayuan¹,
Zhang Xingang¹, Yao Wenli¹, Wang Guifei¹

(1. School of Science, Qingdao University of Technology,
Qingdao, Shandong 266525, P.R. China;

2. Zhongtong Bus Holding Co., Ltd., Liaocheng, Shandong 252000, P.R. China)

Abstract: The actuation hysteresis effect caused by cable-hole sliding friction is one of the critical challenges limiting the multi-functional and multi-domain applications of cable-driven continuum robots. During trajectory tracking, the driving cables undergo frequent switching between winding and unwinding, leading to repeated reversals of sliding friction within the guiding holes. As a result, the current configuration of the flexible arm varies significantly depending on the actuation history. A quasi-static model for the cable-driven continuum robot was developed based on the dynamics theory of flexible multibody systems. A nodal force equilibrium equation with decoupled rigid and flexible motions was established, and the tangent stiffness matrices for both nodal forces and cable driving forces were rigorously derived to enhance the convergence rate of the equilibrium equa-

^{*} 收稿日期: 2025-05-09; 修订日期: 2025-10-11

基金项目: 国家自然科学基金(12202224;12272197); 山东省自然科学基金(ZR2022MA066; ZR2025MS76; ZR2025MS13)

作者简介: 张轲(1998—), 男, 硕士生(E-mail: zhangke6011@163.com);

张树翠(1986—), 女, 副教授, 硕士生导师(通信作者, E-mail: zhangshucui@qut.edu.cn)。

引用格式: 张轲, 张树翠, 赵佳源, 张欣刚, 姚文莉, 王贵飞. 绳驱连续型机器人准静态建模与路径跟踪研究[J]. 应用数学和力学, 2026, 47(7): 869-885.

tion. The trajectory tracking problem was formulated as a servo constraint problem in multibody systems. A nonlinear least-squares solver incorporating the Newton-Raphson iterative algorithm was employed to conduct path tracking simulations under both loaded and unloaded end-effector conditions. The configuration evolution law of the continuum robot was thereby obtained.

Key words: cable-driven continuum robot; quasi-static modeling; hysteresis; sliding friction; path tracking

0 引言

绳驱连续型机器人凭借其机电分离、刚柔共融、进退灵巧的结构特色,在微创手术^[1-2]、发动机无损检测^[3]等非结构化环境中具有切实的应用前景.驱动绳索质量在整个机器人系统中占比一般低于5%,故绳索的质量和惯性效应可忽略不计,从而大幅降低绳索系统的建模难度.但绳索的弹性变形和滑动摩擦诱导的绳驱迟滞行为^[4-6]对精确控制带来很大的不确定性.目前,针对柔性机器人几何非线性建模的研究已经从低保真度的等曲率模型^[7]、分段等曲率模型^[8]发展到高保真度的 Cosserat 杆理论^[9]、ANCF 梁理论^[10]以及几何精确梁理论^[11]等,为后续非线性迟滞问题的研究奠定了建模基础.Bhattacharjee 等^[12]提出了一种基于域分解方法的准静态建模框架,通过调整载荷参数实现连续型机器人的构型变化.高保真方法在建模精度方面具有优势,但求解代价也随之增大.常曲率或分段常曲率模型在某些特定场景下仍然具有不可替代的优势^[13].Wang 等^[14]采用分段常曲率模型对双关节末端执行器进行运动学建模,构建从操作手柄到末端执行器的完整运动学传递模型.Yang 等^[15]采用 Hermite 插值方法描述柔性梁的形状,避免了常应变的奇异性 and 附加约束问题.超冗余机械臂通常存在逆运动学解的不唯一性问题^[16].张宇等^[17]提出了一种多段臂逆运动学数值解法,以运动能耗最小为优化目标,得到的最优位姿可降低机械臂的运动能耗和抖振幅度,使机械臂运动更加平稳.Huczala 等^[18]提出了一种基于自适应进化粒子群算法的冗余机械臂逆运动学求解方法,以位姿误差及能耗最小为目标建立综合优化模型,提高了逆运动学的求解精度.Yang 等^[19]提出了一种针对绳驱多段连续体机械臂的动态运动规划方法,将问题转化为带避障与输入约束的非线性规划问题,将工作空间划分为安全、警告子区域,分别采用混合互补问题建模与改进粒子群算法进行求解.

上述建模理论为当前热点的数据驱动建模和实时控制提供了丰富的理论储备,但绳-孔滑动摩擦诱导的驱动迟滞和回差问题对机器人关节重复定位误差产生严重影响,仍然是制约绳驱连续型机器人多功能、多领域应用的关键难题之一.该研究基于多柔体系统动力学理论开展考虑绳孔滑动摩擦特性的准静态建模研究,简化对绳-孔之间共形约束的描述,采用 Capstan 摩擦模型反映驱动过程中的绳索张力衰减特性,得到重力、弹性力的节点力平衡方程及其切线刚度矩阵.将连续型机器人末端点的轨迹跟踪问题归结为对末端点的伺服约束,在非线性最小二乘求解器中内嵌 Newton-Raphson 迭代算法,开展有、无末端负载两种条件下的路径跟踪仿真,并与常曲率模型进行对比,验证所提模型的准确性和有效性.

1 绳驱连续型机器人系统描述

1.1 绳驱连续型机器人构型

图1给出了一种绳驱连续型机器人的构型图.该机器人由驱动箱、柔性支撑杆、刚性节盘和驱动绳索等部件组成.柔性支撑杆是连续型机器人的主体臂节,其上布置等间隔的刚性节盘,相邻节盘之间的柔性支撑杆离散为一个空间梁单元,计算单元的重力、弹性力等节点力参数.通过驱动组件带动驱动绳索绕过节盘上的过线孔,将驱动力传递到每处节盘,带动连续型机器人完成各种可行的空间运动.

1.2 单元坐标系

将相邻节盘之间的柔性梁划分为一个空间梁单元,单元坐标系由节点参数定义并随单元运动,由此建立的单元坐标系可以最大限度地消除单元体相对该坐标系的刚体运动成分,缓解因几何非线性问题造成的建模困难.建立上述单元坐标系有很多形式,例如,可在单元左节点端面上选取参考点 k , k 节点相对左节点的

矢径为 ρ , 如图 2 所示。

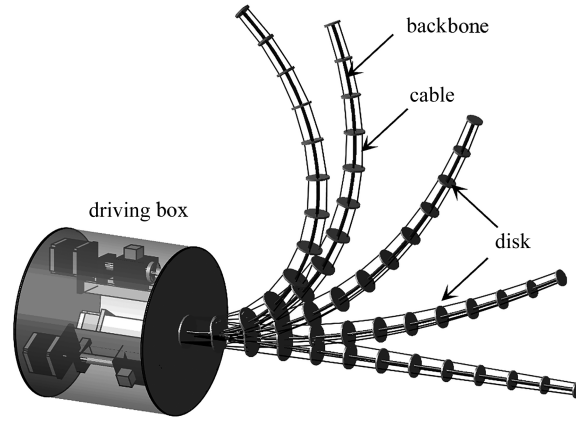


图 1 连续型机器人空间构型

Fig. 1 The spatial configuration of a continuum robot

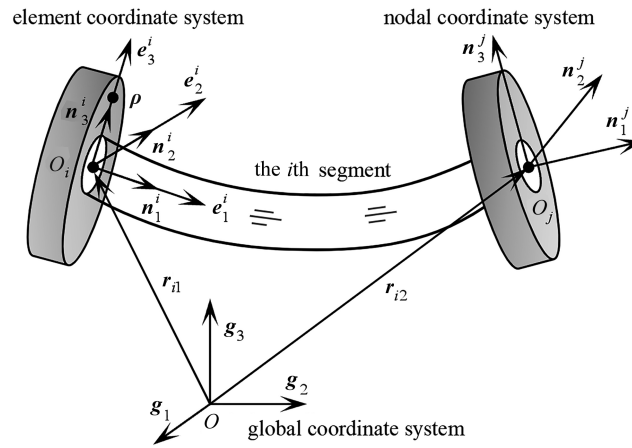


图 2 全局和局部坐标系

Fig. 2 Global and local coordinate systems

单元坐标系的三个基矢量可由左、右节点和参考点表示为

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{r}_{i2} - \mathbf{r}_{i1}}{\|\mathbf{r}_{i2} - \mathbf{r}_{i1}\|}, \mathbf{e}_2 = \frac{\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{e}_1}{\|\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{e}_1\|}, \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2, \quad (1)$$

式中, $\mathbf{r}_{i1}, \mathbf{r}_{i2}$ 是单元左、右节点的位置向量。定位矢量 $\boldsymbol{\rho}$ 在该坐标系的 $\mathbf{e}_2$ 轴上没有分量, 则

$$\boldsymbol{\rho} = \rho_1 \mathbf{e}_1 + \rho_3 \mathbf{e}_3, \quad (2)$$

式中, ρ_1, ρ_3 分别是定位矢量 $\boldsymbol{\rho}$ 在 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$ 轴上的投影。

基于虚功率原理推导等效节点力, 需要单元坐标系的虚角速度 $\boldsymbol{\omega}_s$, 其定义方式如下:

$$\boldsymbol{\omega}_s = (\dot{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_1 + (\dot{\mathbf{e}}_3 \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_2 + (\dot{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_3. \quad (3)$$

将式(1)、式(2)代入到式(3)中, 可将单元坐标系角速度表示为

$$\boldsymbol{\omega}_{si} = \mathbf{D}_u(\dot{\mathbf{r}}_{i2} - \dot{\mathbf{r}}_{i1}) + \mathbf{D}_\theta \boldsymbol{\omega}_{i1}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

式中, 系数矩阵可表示为

$$\mathbf{D}_u = \frac{1}{\rho_3 \|\mathbf{r}_{i2} - \mathbf{r}_{i1}\|} \boldsymbol{\rho} \mathbf{e}_2^T - \frac{1}{\|\mathbf{r}_{i2} - \mathbf{r}_{i1}\|} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3^T, \mathbf{D}_\theta = -\frac{1}{\rho_3} \mathbf{e}_1 \boldsymbol{\rho}^T \tilde{\mathbf{e}}_2, \quad (5)$$

式中, $\mathbf{e}^T$ 表示矢量 $\mathbf{e}$ 的转置, $\tilde{\mathbf{e}}_2$ 表示矢量 $\mathbf{e}_2$ 对应的反对称矩阵。

2 等效节点力

使用节点坐标系的速度和角速度作为系统整体描述参数

$$\dot{\mathbf{u}}_i = [\dot{\mathbf{u}}_{i1}^T \quad \boldsymbol{\omega}_{i1}^T \quad \dot{\mathbf{u}}_{i2}^T \quad \boldsymbol{\omega}_{i2}^T]^T, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

式中, $\dot{\mathbf{u}}_{i1}, \boldsymbol{\omega}_{i1}$ 是单元左节点坐标系的速度和角速度, $\dot{\mathbf{u}}_{i2}, \boldsymbol{\omega}_{i2}$ 是单元右节点坐标系的速度和角速度.

杆的弹性变形虚功率 δp_E 在单元坐标系下度量, 可由单元刚度矩阵 $\mathbf{k}_E$ 表示为^[20]

$$\delta p_{Ei} = \int_v \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \boldsymbol{\sigma} dv = \delta \dot{\mathbf{u}}_i^T (\mathbf{k}_E \bar{\mathbf{u}}_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

式中, 截面坐标系相对于单元坐标系的弹性运动变化率可表示为

$$\dot{\bar{\mathbf{u}}}_i = [\dot{\mathbf{u}}_{i1}^T \quad \dot{\boldsymbol{\theta}}_{i1}^T \quad \dot{\mathbf{u}}_{i2}^T \quad \dot{\boldsymbol{\theta}}_{i2}^T]^T, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

将弹性力的等效节点力转换到总体坐标系下, 需给出整体参数 $\dot{\mathbf{u}}_i$ 和局部参数 $\dot{\bar{\mathbf{u}}}_i$ 的变换关系. 节点弹性位移和整体位移的关系可表示为

$$\mathbf{r}_{i2} - \mathbf{r}_{i1} = \mathbf{R}_{si}(\bar{\mathbf{r}}_{i2} + \bar{\mathbf{u}}_{i2}) \Rightarrow \bar{\mathbf{u}}_{i2} = \mathbf{R}_{si}^T(\mathbf{r}_{i2} - \mathbf{r}_{i1}) - \bar{\mathbf{r}}_{i2}, \quad (9)$$

式中, $\bar{\mathbf{r}}_{i2}$ 为单元右侧节点相对共旋标架原点的矢径, $\mathbf{R}_{si}$ 是共旋标架与总体坐标系的转动矩阵. 对式(9)求导可得到

$$\dot{\mathbf{r}}_{i2} - \dot{\mathbf{r}}_{i1} = \boldsymbol{\omega}_{si} \times (\mathbf{r}_{i2} - \mathbf{r}_{i1}) + \mathbf{R}_{si} \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{i2} \Rightarrow \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{i2} = \mathbf{R}_{si}^T(\dot{\mathbf{r}}_{i2} - \dot{\mathbf{r}}_{i1} + (\tilde{\mathbf{r}}_{i2} - \tilde{\mathbf{r}}_{i1}) \boldsymbol{\omega}_{si}), \quad (10)$$

式中, $\boldsymbol{\omega}_{si}$ 是单元坐标系的角速度, $\tilde{\mathbf{r}}_{i1}, \tilde{\mathbf{r}}_{i2}$ 分别是位置向量 $\mathbf{r}_{i1}, \mathbf{r}_{i2}$ 的反对称矩阵.

左节点是单元坐标系的原点, 其弹性位移和速度自然为零:

$$\bar{\mathbf{u}}_{i1} = \mathbf{0}, \quad \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{i1} = \mathbf{0}. \quad (11)$$

单元左、右端面截面坐标系与总体坐标系之间的转动矩阵可以由两种相继转动来度量: ① 截面坐标系随节点坐标系的转动; ② 由截面坐标系相对单元坐标系的转动, 以及单元坐标系相对总体坐标系的转动构成的相继转动, 可以表示为

$$\mathbf{R}_{\theta_{i1}} \mathbf{S}_{i10} = \mathbf{R}_{si} \mathbf{R}_{\bar{\theta}_{i1}} \bar{\mathbf{S}}_{i10}, \quad \mathbf{R}_{\theta_{i2}} \mathbf{S}_{i20} = \mathbf{R}_{si} \mathbf{R}_{\bar{\theta}_{i2}} \bar{\mathbf{S}}_{i20}, \quad (12)$$

式中, $\mathbf{R}_{\theta_{i1}}, \mathbf{R}_{\theta_{i2}}$ 分别是单元左、右节点坐标系相对总体坐标系的转动矩阵, $\mathbf{S}_{i10}, \mathbf{S}_{i20}$ 分别是单元左右端面截面坐标系相对总体坐标系的转动矩阵, $\bar{\mathbf{S}}_{i10}, \bar{\mathbf{S}}_{i20}$ 分别是单元左右端面截面坐标系相对单元坐标系的初始转动矩阵, $\mathbf{R}_{\bar{\theta}_{i1}}, \mathbf{R}_{\bar{\theta}_{i2}}$ 分别是单元左右端面截面坐标系相对共旋标架的瞬时转动矩阵.

截面坐标系的角速度 $\boldsymbol{\omega}_{i1}, \boldsymbol{\omega}_{i2}$ 与单元坐标系角速度 $\boldsymbol{\omega}_{si}$ 以及弹性角速度 $\bar{\boldsymbol{\omega}}_{i1}, \bar{\boldsymbol{\omega}}_{i2}$ 的关系为

$$\boldsymbol{\omega}_{i1} = \boldsymbol{\omega}_{si} + \mathbf{R}_{si} \bar{\boldsymbol{\omega}}_{i1}, \quad \boldsymbol{\omega}_{i2} = \boldsymbol{\omega}_{si} + \mathbf{R}_{si} \bar{\boldsymbol{\omega}}_{i2}. \quad (13)$$

考虑到单元左、右端面的转动是小转动, 弹性角速度和转动矢量变化率的关系可近似为

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}_{i1} = \mathbf{T}_{\bar{\theta}_{i1}} \dot{\boldsymbol{\theta}}_{i1}, \quad \mathbf{T}_{\bar{\theta}_{i1}} \approx \mathbf{E} + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{i1}, \quad \mathbf{T}_{\bar{\theta}_{i1}}^{-1} \approx \mathbf{E} - \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{i1}, \quad (14)$$

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}_{i2} = \mathbf{T}_{\bar{\theta}_{i2}} \dot{\boldsymbol{\theta}}_{i2}, \quad \mathbf{T}_{\bar{\theta}_{i2}} \approx \mathbf{E} + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{i2}, \quad \mathbf{T}_{\bar{\theta}_{i2}}^{-1} \approx \mathbf{E} - \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{i2}. \quad (15)$$

结合式(4)、(10)、(11)、(14)和(15), 整体参数变化率和局部参数变化率的转换关系为

$$\dot{\bar{\mathbf{u}}} = \mathbf{T}_{\theta i} \mathbf{T}_{ui} \dot{\mathbf{u}}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (16)$$

式中, 系数矩阵 $\mathbf{T}_u, \mathbf{T}_\theta$ 可具体表示为

$$\mathbf{T}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{si}^T \mathbf{D}_u & \mathbf{R}_{si}^T (\mathbf{E} - \mathbf{D}_\theta) & -\mathbf{R}_{si}^T \mathbf{D}_u & \mathbf{0} \\ -\mathbf{R}_{si}^T (\mathbf{E} + \tilde{\mathbf{r}}_i \mathbf{D}_\theta) & \mathbf{R}_{si}^T \tilde{\mathbf{r}}_i \mathbf{D}_\theta & \mathbf{R}_{si}^T (\mathbf{E} + \tilde{\mathbf{r}}_i \mathbf{D}_\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{si}^T \mathbf{D}_u & -\mathbf{R}_{si}^T \mathbf{D}_\theta & -\mathbf{R}_{si}^T \mathbf{D}_u & \mathbf{R}_{si}^T \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$\mathbf{T}_\theta = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{\theta_{i1}}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{\theta_{i2}}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

式中, $\tilde{\mathbf{r}}_i = \tilde{\mathbf{r}}_{i2} - \tilde{\mathbf{r}}_{i1}$.

在开展地面作业时,还需要考虑重力的虚功率 δp_g , 可表示为

$$\delta p_{gi} = \int_{v_i} \delta \dot{\mathbf{u}}_{v_i}^T \rho dv_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (19)$$

式中, ρ 表示材料密度, $\dot{\mathbf{u}}_{v_i}$ 是单元内任意一点在总体坐标系下的速度, 可表示为

$$\dot{\mathbf{u}}_{v_i} = \dot{\mathbf{u}}_{i1} - (\tilde{\mathbf{r}}_{v_i} - \tilde{\mathbf{r}}_{i1}) \boldsymbol{\omega}_{si} + \mathbf{R}_{si} \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_{v_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (20)$$

将式(20)代入到式(19)中, 可以得到重力虚功率的表达式为

$$\delta p_{gi} = \delta \dot{\mathbf{u}}_{i1}^T \mathbf{M}_i \mathbf{g} + \delta \boldsymbol{\omega}_{si}^T \mathbf{M}_i \mathbf{g}_{ci} + \delta \bar{p}_{gi}, \quad (21)$$

式中, $\delta \bar{p}_{gi} = \delta \dot{\mathbf{u}}_{i1}^T ({}^u \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{M}_i \bar{\mathbf{g}})$ 表示在单元坐标系下度量的重力虚功率, $\mathbf{M}_i$ 表示节点质量, $\mathbf{g}$ 表示重力加速度, $\mathbf{g}_{ci} = \mathbf{R}_{si} \tilde{\mathbf{r}}_{ci} \mathbf{R}_{si}^T \mathbf{g}$, ${}^u \tilde{\mathbf{N}}$ 是重力影响系数矩阵, 可表示为

$${}^u \tilde{\mathbf{N}} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & L & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -L \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -L & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & L & 0 \end{bmatrix} = [(\mathbf{I}_1^u)^T \quad (\mathbf{I}_1^\theta)^T \quad (\mathbf{I}_2^u)^T \quad (\mathbf{I}_2^\theta)^T], \quad (22)$$

式中, L 是单元长度.

综合式(7)和式(21), 并考虑式(16)~(18), 可将单元的弹性力和重力虚功率表示为

$$\delta p_{Ei} - \delta p_{gi} = \delta \dot{\mathbf{u}}_i^T \mathbf{F}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (23)$$

式中, 弹性力、重力的等效节点力 $\mathbf{F}_i$ 及其分量可表示为

$$\mathbf{F}_i = (\mathbf{T}_{\theta i} \mathbf{T}_{ui})^T \mathbf{f}_i - \mathbf{F}_{ig}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (24)$$

式中, 各分量可具体表示为

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{k}_E \bar{\mathbf{u}}_i - {}^u \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{R}_{si}^T \mathbf{M}_i \mathbf{g}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (25)$$

$$\mathbf{F}_{ig} = [\mathbf{F}_{ig1}^T \quad \mathbf{F}_{ig2}^T \quad \mathbf{F}_{ig3}^T \quad \mathbf{F}_{ig4}^T]^T, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (26)$$

$$\mathbf{F}_{ig1} = \mathbf{M}_i \mathbf{g} - \mathbf{M}_i \mathbf{D}_u^T \mathbf{g}_c, \quad \mathbf{F}_{ig2} = \mathbf{M}_i \mathbf{D}_\theta^T \mathbf{g}_c, \quad \mathbf{F}_{ig3} = \mathbf{M}_i \mathbf{D}_u^T \mathbf{g}_c, \quad \mathbf{F}_{ig4} = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (27)$$

式中, $\mathbf{F}_i$ 就是未考虑绳索拉力的连续型机器人梁单元的等效节点力. 参照任意空间梁单元两侧刚性节盘的自由度索引编号, 可进一步组装连续型机器人整体等效节点力 $\mathbf{F}$.

3 切线刚度矩阵

系统描述参数是节点坐标系的速度和角速度. 式(24)的节点力平衡方程是关于整体参数的非线性函数. 如果能给出节点力平衡方程的切线刚度矩阵, 将显著提高求解效率. 柔性支撑梁节点力平衡方程的时间导数可表示为

$$\dot{\mathbf{F}}_i = \frac{(\mathbf{T}_{\theta i} \mathbf{T}_{ui})^T \dot{\mathbf{f}}_i}{\boldsymbol{\theta}_1} + \frac{(\mathbf{T}_{\theta i} \dot{\mathbf{T}}_{ui})^T \mathbf{f}_i}{\boldsymbol{\theta}_2} + \frac{(\dot{\mathbf{T}}_{\theta i} \mathbf{T}_{ui})^T \mathbf{f}_i}{\boldsymbol{\theta}_3} - \frac{\dot{\mathbf{F}}_{ig}}{\boldsymbol{\theta}_4}. \quad (28)$$

对上式逐项分析, 第 1 项中弹性力和重力的时间变化率可表示为

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{K}_E \dot{\mathbf{u}}_E - \mathbf{I} \dot{\mathbf{R}}_s^T \mathbf{g}, \quad (29)$$

由角速度的定义式

$$\dot{\mathbf{R}}_s \mathbf{R}_s^T = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_s \Rightarrow (\dot{\mathbf{R}}_s \mathbf{R}_s^T)^T = \mathbf{R}_s \dot{\mathbf{R}}_s^T = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}_s, \quad (30)$$

可将重力的等效节点力的时间变化率表示为

$$\dot{\mathbf{R}}_s^T \mathbf{g} = \mathbf{R}_s^T \tilde{\mathbf{g}} \boldsymbol{\omega}_s, \quad (31)$$

$$\mathbf{I} \dot{\mathbf{R}}_{si}^T M_i \mathbf{g} = M_i \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_1^u \mathbf{R}_{si}^T \tilde{\mathbf{g}} D_u & \mathbf{I}_1^u \mathbf{R}_{si}^T \tilde{\mathbf{g}} D_\theta & \mathbf{I}_1^u \mathbf{R}_{si}^T \tilde{\mathbf{g}} D_u & 0 \\ -\mathbf{I}_1^\theta \mathbf{R}_{si}^T \tilde{\mathbf{g}} D_u & \mathbf{I}_1^\theta \mathbf{R}_{si}^T \tilde{\mathbf{g}} D_\theta & \mathbf{I}_1^\theta \mathbf{R}_{si}^T \tilde{\mathbf{g}} D_u & 0 \\ -\mathbf{I}_2^u \mathbf{R}_{si}^T \tilde{\mathbf{g}} D_u & \mathbf{I}_2^u \mathbf{R}_{si}^T \tilde{\mathbf{g}} D_\theta & \mathbf{I}_2^u \mathbf{R}_{si}^T \tilde{\mathbf{g}} D_u & 0 \\ -\mathbf{I}_2^\theta \mathbf{R}_{si}^T \tilde{\mathbf{g}} D_u & \mathbf{I}_2^\theta \mathbf{R}_{si}^T \tilde{\mathbf{g}} D_\theta & \mathbf{I}_2^\theta \mathbf{R}_{si}^T \tilde{\mathbf{g}} D_u & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_i = \mathbf{T}_s \dot{\mathbf{u}}. \quad (32)$$

故式(28)的第1项可表示为

$$\boldsymbol{\Theta}_1 = \mathbf{T}_{ui}^T \mathbf{T}_{\theta i}^T \dot{\mathbf{f}} = \mathbf{T}_{ui}^T \mathbf{T}_{\theta i}^T (\mathbf{K}_E \mathbf{T}_{\theta i} \mathbf{T}_{ui} - \mathbf{T}_{gi}) \dot{\mathbf{u}}_i = \mathbf{K}_{fi} \dot{\mathbf{u}}_i, \quad (33)$$

式(28)的第2项可表示为

$$\boldsymbol{\Theta}_2 = (\mathbf{T}_{\theta i} \dot{\mathbf{T}}_{ui})^T \mathbf{f}_i = \dot{\mathbf{T}}_{ui}^T \mathbf{T}_{\theta i}^T \mathbf{f}_i. \quad (34)$$

首先对 $\dot{\mathbf{T}}_{ui}$ 进行分析,得到

$$(\dot{\mathbf{T}}_{ui})_{2,1} = \dot{\mathbf{R}}_{si}^T D_u + \mathbf{R}_{si}^T \dot{D}_u, \quad \dot{\mathbf{R}}_{si}^T D_u = -\mathbf{R}_{si}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{si} D_u, \quad (35)$$

$$(-\dot{\mathbf{T}}_{ui})_{3,1} = -\mathbf{R}_{si}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{si} (E + \tilde{\mathbf{r}}_i D_u) + \mathbf{R}_{si}^T (\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_i D_u + \tilde{\mathbf{r}}_i \dot{D}_u), \quad (36)$$

$$(\dot{\mathbf{T}}_{ui})_{2,2} = -\mathbf{R}_{si}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{si} (E - D_\theta) - \mathbf{R}_{si}^T \dot{D}_\theta, \quad (37)$$

$$(\dot{\mathbf{T}}_{ui})_{3,2} = -\mathbf{R}_{si}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{si} \tilde{\mathbf{r}}_i D_\theta + \mathbf{R}_{si}^T \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_i D_\theta + \mathbf{R}_{si}^T \tilde{\mathbf{r}}_i \dot{D}_\theta, \quad (38)$$

$$(\dot{\mathbf{T}}_{ui})_{4,2} = -\mathbf{R}_{si}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{si} D_\theta + \mathbf{R}_{si}^T \dot{D}_\theta, \quad (39)$$

容易得出

$$\mathbf{T}_\theta^T \mathbf{f} = [(\mathbf{f}_1)^T \quad (\mathbf{T}_{\theta i1}^{-T} \mathbf{m}_1)^T \quad (\mathbf{f}_2)^T \quad (\mathbf{T}_{\theta i2}^{-T} \mathbf{m}_2)^T]^T, \quad (40)$$

其中, $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ 为节点力矩.

为了将式(34)写成紧凑形式,可令

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{R}_{si} \mathbf{f}_2, \quad \boldsymbol{\beta}_1 = \mathbf{R}_{si} \mathbf{T}_{\theta i1}^{-T} \mathbf{m}_1, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{R}_{si} \mathbf{T}_{\theta i2}^{-T} \mathbf{m}_2, \quad (41)$$

则式(34)中的第一个元素可改写为

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\Theta}_2)_1 &= (\mathbf{D}_u^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{si} + \dot{D}_u^T) \mathbf{R}_{si} \mathbf{T}_{\theta i1}^{-T} \mathbf{m}_1 - \\ & \quad ((E - \mathbf{D}_u^T \tilde{\mathbf{r}}_i) \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{si} - \mathbf{D}_u^T \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_i - \dot{D}_u^T \tilde{\mathbf{r}}_i) \mathbf{R}_{si} \mathbf{f}_2 + (\mathbf{D}_u^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{si} + \dot{D}_u^T) \mathbf{R}_{si} \mathbf{T}_{\theta i2}^{-T} \mathbf{m}_2 = \\ & \quad \dot{D}_u^T (\mathbf{R}_{si} \mathbf{T}_{\theta i1}^{-T} \mathbf{m}_1 + \tilde{\mathbf{r}}_i \mathbf{R}_{si} \mathbf{f}_2 + \mathbf{R}_{si} \mathbf{T}_{\theta i2}^{-T} \mathbf{m}_2) + \mathbf{D}_u^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{si} \mathbf{R}_{si} \mathbf{T}_{\theta i1}^{-T} \mathbf{m}_1 - (E - \mathbf{D}_u^T \tilde{\mathbf{r}}_i) \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{si} \mathbf{R}_{si} \mathbf{f}_2 + \\ & \quad \mathbf{D}_u^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{si} \mathbf{R}_{si} \mathbf{T}_{\theta i2}^{-T} \mathbf{m}_2 + \mathbf{D}_u^T \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_i \mathbf{R}_{si} \mathbf{f}_2 = \\ & \quad \dot{D}_u^T (\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \tilde{\mathbf{r}}_i \boldsymbol{\alpha}) + (\tilde{\boldsymbol{\alpha}} - \mathbf{D}_u^T (\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1 + \tilde{\boldsymbol{\beta}}_2 + \tilde{\mathbf{r}}_i \tilde{\boldsymbol{\alpha}})) \boldsymbol{\omega}_{si} - \mathbf{D}_u^T \tilde{\boldsymbol{\alpha}} (\dot{\mathbf{r}}_{i2} - \dot{\mathbf{r}}_{i1}), \end{aligned} \quad (42)$$

进一步写为压缩形式

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \tilde{\mathbf{r}}_i \boldsymbol{\alpha}, \quad \boldsymbol{\beta}^* = \tilde{\boldsymbol{\beta}}_1 + \tilde{\boldsymbol{\beta}}_2 + \tilde{\mathbf{r}}_i \tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \quad (43)$$

则式(42)可写为如下紧凑形式:

$$(\boldsymbol{\Theta}_2)_1 = \dot{D}_u^T \boldsymbol{\beta} + (\tilde{\boldsymbol{\alpha}} - \mathbf{D}_u^T \boldsymbol{\beta}^*) \boldsymbol{\omega}_{si} - \mathbf{D}_u^T \tilde{\boldsymbol{\alpha}} (\dot{\mathbf{r}}_{i2} - \dot{\mathbf{r}}_{i1}). \quad (44)$$

利用上述简化方式,就可以得到式(34)全部元素的表达式:

$$\boldsymbol{\Theta}_2 = \dot{\mathbf{T}}_{ui}^T \mathbf{T}_{\theta i}^T \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \dot{D}_u^T \boldsymbol{\beta} + (\tilde{\boldsymbol{\alpha}} - \mathbf{D}_u^T \boldsymbol{\beta}^*) \boldsymbol{\omega}_{si} - \mathbf{D}_u^T \tilde{\boldsymbol{\alpha}} (\dot{\mathbf{r}}_{i2} - \dot{\mathbf{r}}_{i1}) \\ -\dot{D}_\theta^T \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{D}_\theta^T \boldsymbol{\beta}^* - \tilde{\boldsymbol{\beta}}_1) \boldsymbol{\omega}_{si} + \mathbf{D}_\theta^T \tilde{\boldsymbol{\alpha}} (\dot{\mathbf{r}}_{i2} - \dot{\mathbf{r}}_{i1}) \\ -\dot{D}_u^T \boldsymbol{\beta} - (\tilde{\boldsymbol{\alpha}} - \mathbf{D}_u^T \boldsymbol{\beta}^*) \boldsymbol{\omega}_{si} + \mathbf{D}_u^T \tilde{\boldsymbol{\alpha}} (\dot{\mathbf{r}}_{i2} - \dot{\mathbf{r}}_{i1}) \\ -\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2 \boldsymbol{\omega}_{si} \end{bmatrix}. \quad (45)$$

在式(45)中

$$\dot{D}_u^T \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\Psi}_r (\dot{\mathbf{r}}_{i2} - \dot{\mathbf{r}}_{i1}) + \boldsymbol{\Psi}_s \boldsymbol{\omega}_{si} + \boldsymbol{\Psi}_1 \boldsymbol{\omega}_{i1}, \quad \dot{D}_\theta^T \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\Omega}_s \boldsymbol{\omega}_{si} + \boldsymbol{\Omega}_1 \boldsymbol{\omega}_{i1}, \quad (46)$$

式中各元素的具体表达式为

$$\Psi_r = \frac{(e_2^T \beta e_3 - e_3^T \beta e_2) e_1^T}{\|r_{i2} - r_{i1}\|^2} - \frac{\rho_1 e_1^T \beta e_2 e_1^T}{\rho_3 \|r_{i2} - r_{i1}\|^2}, \quad \Psi_1 = \frac{\rho^T \rho}{\rho_3^2 \|r_{i2} - r_{i1}\|} e_1^T \beta e_2 e_2^T, \quad (47)$$

$$\Psi_s = -\Psi_1 - \frac{\rho_1 (e_1^T \beta \tilde{e}_2 + e_2^T \beta \tilde{e}_1)}{\rho_3 \|r_{i2} - r_{i1}\|} + \frac{e_2^T \beta \tilde{e}_3 + e_3^T \beta \tilde{e}_2 - e_2^T \beta \tilde{e}_3 - e_3^T \beta \tilde{e}_2}{\|r_{i2} - r_{i1}\|}, \quad (48)$$

$$\Omega_s = -\Omega_1 + \frac{\rho_1}{\rho_3} (e_3^T \beta \tilde{e}_1 + e_1^T \beta \tilde{e}_3) - e_1^T \beta \tilde{e}_1 - e_1^T \beta \tilde{e}_1, \quad \Omega_1 = -\frac{\rho^T \rho}{\rho_3^2} (e_1^T \beta) e_3 e_2^T. \quad (49)$$

将式(46)代入到式(45)中,可得到

$$\Theta_2 = \dot{T}_u^T T_\theta^T f = \begin{bmatrix} \Lambda_s \omega_s + \Lambda_r (\dot{r}_2 - \dot{r}_1) + \Psi_1 \omega_1 \\ \Lambda_m \omega_s + D_\theta^T \tilde{\alpha} (\dot{r}_2 - \dot{r}_1) - \Omega_1 \omega_1 \\ -\Lambda_s \omega_s - \Lambda_r (\dot{r}_2 - \dot{r}_1) - \Psi_1 \omega_1 \\ -\tilde{\beta}_2 \omega_s \end{bmatrix}, \quad (50)$$

式中各元素的具体表达式为

$$\Lambda_s = \Psi_s + \tilde{\alpha} - D_u^T \beta^*, \quad \Lambda_r = \Psi_r - D_u^T \tilde{\alpha}, \quad \Lambda_m = D_\theta^T \beta^* - \tilde{\beta}_1 - \Omega_s. \quad (51)$$

将式(4)代入到式(50)中,化简得到

$$\Theta_2 = \dot{T}_u^T T_\theta^T f = K_u \dot{u}, \quad (52)$$

式中,系数矩阵 K_u 的具体表达式为

$$K_u = \begin{bmatrix} -\Lambda_s D_u - \Lambda_r & \Psi_1 + \Lambda_s D_\theta & \Lambda_s D_u + \Lambda_r & 0 \\ -\Lambda_m D_u - D_\theta^T \tilde{\alpha} & \Lambda_m D_\theta - \Omega_1 & \Lambda_m D_u + D_\theta^T \tilde{\alpha} & 0 \\ \Lambda_s D_u + \Lambda_r & -\Psi_1 - \Lambda_s D_\theta & -\Lambda_s D_u - \Lambda_r & 0 \\ \tilde{\beta}_2 D_u & -\tilde{\beta}_2 D_\theta & -\tilde{\beta}_2 D_u & 0 \end{bmatrix}. \quad (53)$$

对式(28)的第3项进行分析,结合式(14)可得到

$$\dot{T}_{\theta_i}^{-T} m_i = \frac{1}{2} \tilde{\theta}_i^T m_i = \frac{1}{2} \tilde{m}_i \dot{\theta}_i = -\frac{1}{2} \tilde{m}_i T_{\theta_i}^{-1} \bar{\omega}_i, \quad i = 1, 2, \quad (54)$$

$$\dot{T}_{\theta_i}^{-T} f_i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (55)$$

式(28)的第3项可表示为如下紧凑形式:

$$\Theta_3 = T_u^T \dot{T}_\theta^T f = T_u^T S_\theta T_u \dot{u} = K_\theta \dot{u}, \quad (56)$$

式中, S_θ 为分块对角矩阵,可由块对角函数“blkdiag”表示为

$$S_\theta = \frac{1}{2} \text{blkdiag}(\mathbf{0}, \tilde{m}_{i1} T_{\theta_{i1}}^{-1}, \mathbf{0}, \tilde{m}_{i2} T_{\theta_{i2}}^{-1}). \quad (57)$$

对式(28)的第4项进行分析,并结合 $g_{ci} = r_{ci} \times g$, 得到

$$\dot{g}_{ci} = (\omega_{si} \times r_{ci}) \times g = [g \otimes r_{ci} - (r_{ci} \cdot g) E] \omega_{si} = (g r_{ci}^T R_{si}^T - (r_{ci}^T R_{si}^T g) E) \omega_{si}, \quad (58)$$

$$\dot{F}_g = M \begin{bmatrix} -\dot{D}_u^T g_{ci} - D_u^T (g r_{ci}^T R_s^T - (r_{ci}^T R_{si}^T g) E) \omega_{si} \\ \dot{D}_\theta^T g_{ci} + D_\theta^T (g r_{ci}^T R_s^T - (r_{ci}^T R_{si}^T g) E) \omega_{si} \\ \dot{D}_u^T g_{ci} + D_u^T (g r_{ci}^T R_s^T - (r_{ci}^T R_{si}^T g) E) \omega_{si} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (59)$$

若记 $C_{fi} = g r_{ci}^T R_{si}^T - (r_{ci}^T R_{si}^T g) E$, 则式(59)可改写为

$$\Theta_4 = \dot{F}_g = K_c \dot{u}, \quad (60)$$

式中,系数矩阵 K_c 及其子元素可表示为

$$\mathbf{K}_c = m \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_{uu} & -\boldsymbol{\Psi}_{u\theta} & -\boldsymbol{\Psi}_{uu} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{\Omega}_{u\theta} & \boldsymbol{\Omega}_{\theta\theta} & \boldsymbol{\Omega}_{u\theta} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{\Psi}_{uu} & \boldsymbol{\Psi}_{u\theta} & \boldsymbol{\Psi}_{uu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (61)$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{uu} = \bar{\boldsymbol{\Psi}}_r + \bar{\boldsymbol{\Psi}}_s \mathbf{D}_u - \mathbf{D}_u^T \mathbf{C}_f \mathbf{D}_u, \quad (62)$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{u\theta} = \bar{\boldsymbol{\Psi}}_1 + \bar{\boldsymbol{\Psi}}_s \mathbf{D}_\theta - \mathbf{D}_u^T \mathbf{C}_f \mathbf{D}_\theta, \quad (63)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{u\theta} = \bar{\boldsymbol{\Omega}}_s \mathbf{D}_u - \mathbf{D}_\theta^T \mathbf{C}_f \mathbf{D}_u, \quad (64)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{\theta\theta} = \bar{\boldsymbol{\Omega}}_1 + \bar{\boldsymbol{\Omega}}_s \mathbf{D}_\theta - \mathbf{D}_\theta^T \mathbf{C}_f \mathbf{D}_\theta. \quad (65)$$

式(62)–(65)中,符号 $\bar{\boldsymbol{\Psi}}_r, \bar{\boldsymbol{\Psi}}_s, \bar{\boldsymbol{\Psi}}_1, \bar{\boldsymbol{\Omega}}_s, \bar{\boldsymbol{\Omega}}_1$ 与式(47)–(49)中符号的区别在于将式(47)–(49)中的 $\boldsymbol{\beta}$ 替换为 $\mathbf{g}_c$.

将式(33)、(52)、(56)、(60)代入到式(28)中,得到

$$\dot{\mathbf{F}}_i = (\mathbf{K}_{fi} + \mathbf{K}_{ui} + \mathbf{K}_{\theta i} + \mathbf{K}_{ci}) \dot{\mathbf{u}}_i. \quad (66)$$

节点力平衡方程的切线刚度矩阵可表示为

$$\frac{d\mathbf{F}_i}{d\mathbf{u}_i} = \mathbf{K}_{fi} + \mathbf{K}_{ui} + \mathbf{K}_{\theta i} + \mathbf{K}_{ci} = \mathbf{T}_{ui}^T \mathbf{T}_{\theta i}^T (\mathbf{K}_{Ei} \mathbf{T}_{\theta i} \mathbf{T}_{ui} - \mathbf{T}_{gi}) + \mathbf{K}_{ui} + \mathbf{T}_{ui}^T \mathbf{S}_{\theta i} \mathbf{T}_{ui} - \mathbf{K}_{ci}. \quad (67)$$

以上公式得到了不含绳索驱动力的节点力平衡方程及其切线刚度矩阵.进一步忽略绳索与过线孔的共形约束,只考虑绳索绕过过线孔后的张力衰减,就可使用 Capstan 模型简化摩擦力的建模过程,具体实施过程如下:

在收绳、放绳阶段,相邻两段绳索的张力满足指数衰减规律

$$\begin{cases} F_{i-1} = F_i e^{\mu\theta_i}, & \text{reeling cable, slip,} \\ F_{i-1} = F_i e^{-\mu\theta_i}, & \text{unreeling cable, slip;} \end{cases} \quad (68)$$

而在收绳、放绳切换阶段,相邻两段绳索的张力是其转折角度的集值函数

$$F_{i-1} \in [F_i e^{-\mu\theta_i}, F_i e^{\mu\theta_i}], \quad \text{release cable force, stick.} \quad (69)$$

绳索由收绳转放绳时,绳索张力在式(69)给出的区间内变化,直至小于最小张力时启滑,如图3所示.

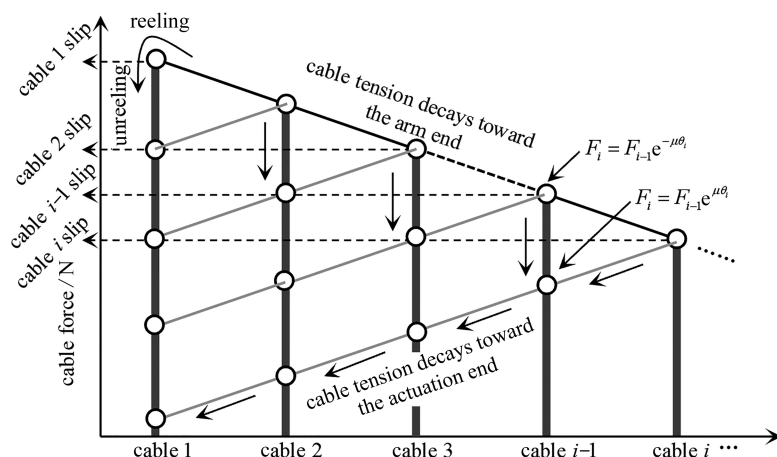


图3 绳索逐段启滑示意图

Fig. 3 Schematic diagram of segment-by-segment cable sliding

图3中,第一段绳索张力率先随放绳而衰减,下降到绳2的张力值仍处于黏滞状态,直至低于第三段绳索张力后,第二段绳索启滑.以此类推,直至最后一段绳索启滑,整段绳索摩擦力完成换向.图4给出了单次

放绳阶段绳索张力 stick-slip 状态的识别和更新,以及绳索张力更新的仿真流程图。

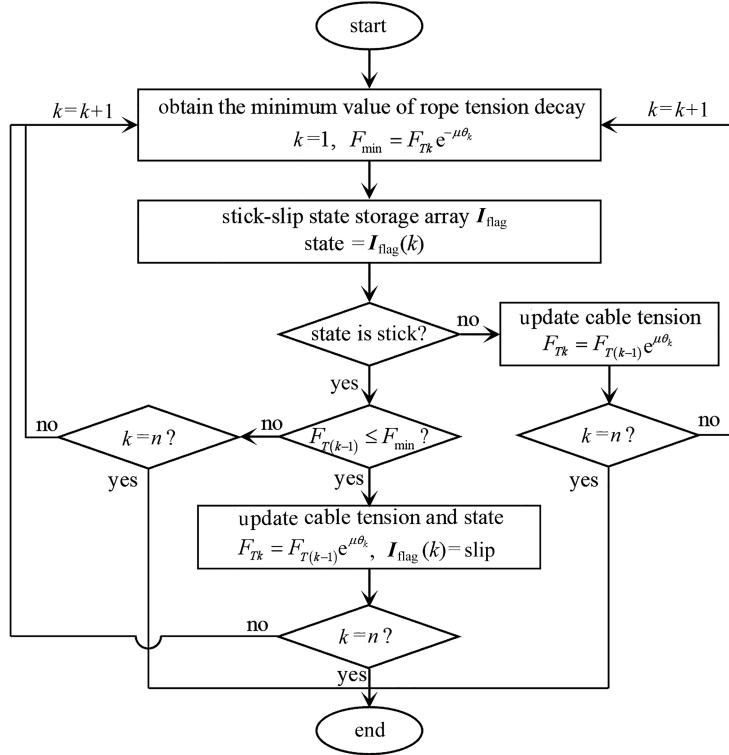


图 4 绳索张力与 stick-slip 状态更新流程图

Fig. 4 The flowchart of cable tension and stick-slip state update

4 准静态形式的路径跟踪建模

本节进一步研究准静态形式的路径跟踪问题.若期望机器人末端点跟踪一条可行轨迹,驱动电机应给绳索施加多大驱动力的问题可表述为:确定一组绳索驱动力,使平衡时的广义坐标符合末端点路径应满足的伺服约束。

当机器人末端执行器沿预设路径进行跟踪时,该伺服约束方程可表示为

$$\mathbf{E}_q = \mathbf{r}_{\text{end}} - \mathbf{r}_{ti} = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (70)$$

式中, $\mathbf{r}_{\text{end}}$ 是末端执行器的位置向量, $\mathbf{r}_{ti}$ 是目标轨迹的位置向量, i 是所生成的目标轨迹点数量。

上述约束方程可改写为系统描述参数的函数,即

$$\mathbf{E}_q = \mathbf{A}_{\text{end}} \mathbf{u} + \mathbf{b}_{\text{end}}. \quad (71)$$

对于任意给定的绳索驱动力初值 $\mathbf{F}_{Tc} = [F_{Tc1}, F_{Tc2}, F_{Tc3}]^T$, 总有唯一的构型向量 $\mathbf{u}$ 与之对应.因此绳驱连续型机器人末端执行器的空间位置向量 $\mathbf{r}_{\text{end}}$ 是绳索张力 $\mathbf{F}_{Tc}$ 的非线性函数.式(70)表示的伺服约束方程可通过非线性最小二乘问题求解

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{F}_c} \|\mathbf{E}_q(\mathbf{F}_{Tc})\|_2^2 = \min_{\mathbf{F}_c} (\mathbf{E}_{q1}(\mathbf{F}_{Tc})^2 + \mathbf{E}_{q2}(\mathbf{F}_{Tc})^2 + \dots + \mathbf{E}_{qn}(\mathbf{F}_{Tc})^2), \\ \text{s.t.} \quad \mathbf{E}_q = \mathbf{A}_{\text{end}} \mathbf{u} + \mathbf{b}_{\text{end}}, \\ \mathbf{F}_{lb} \leq \mathbf{F}_c \leq \mathbf{F}_{ub}, \end{cases} \quad (72)$$

其中, $\mathbf{A}_{\text{end}} = [\mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{I}_3, \mathbf{0}]$, $\mathbf{b}_{\text{end}} = \mathbf{r}_{\text{end}}^0 - \mathbf{r}_{ti}^0$ 是末端执行器的初始位置向量, $\mathbf{F}_{lb}, \mathbf{F}_{ub}$ 分别为绳索拉力取值的下限和上限,随着驱动过程中绳索历史数据的积累,下一步的驱动力可由历史数据预估其上、下限,从而提高收敛速度。

利用 MATLAB lsqnonlin 求解器对式(72)进行求解.在迭代的每一步,都需要计算驱动力 $\mathbf{F}_{Tc}$ 作用下的系

统构型向量 $\mathbf{u}$. 因此, 在求解函数中嵌套 Newton-Raphson 公式, 其迭代格式可表示为

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i - \xi [\partial \hat{\mathbf{F}} / \partial \mathbf{u}]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{u}_i), \quad (73)$$

直到修正量或残差足够小为止, 其中 $[\partial \hat{\mathbf{F}} / \partial \mathbf{u}]^{-1}$ 是重复使用的 Jacobi 矩阵, ξ 是松弛因子.

依据压缩不动点定理, 迭代收敛的充分条件是存在某一常数 χ 满足

$$\|I - \xi [\partial \hat{\mathbf{F}} / \partial \mathbf{u}]^{-1} \partial \hat{\mathbf{F}} / \partial \mathbf{u}(\mathbf{u}_i)\| \leq \chi < 1. \quad (74)$$

如果上述条件满足, 则由压缩映射的性质可得 $\|\mathbf{u}_{i+1+j} - \mathbf{u}_{i+j}\| \leq \chi^j \|\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i\|$, $i = 1, 2, \dots$, 对所有 $j \geq 1$ 项求和得到 $\|\mathbf{u}_* - \mathbf{u}_{i+1}\| \leq (\chi / (1 - \chi)) \|\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i\|$, 其中, $\mathbf{u}_*$ 是真实解. 由于右端项可以计算, 因此, χ 可以由下式估计得到:

$$\chi = \lim_{u \rightarrow \infty} \left\| \frac{\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}} \right\|. \quad (75)$$

在迭代过程中, 需要检测收敛速度 χ , 如果发现 $\chi > 0.9$, 应当重新计算 Jacobi 矩阵并估计 χ . 通过上述方式, 就可通过 Jacobi 复用技术, 降低每次迭代都要计算一次 Jacobi 矩阵的耗费, 提高计算效率.

5 实验验证

5.1 实验平台搭建与实验设计

如图 5 所示, 实验搭建了 CNC 加工的铝合金基座, 用于固定绳驱连续型机器人样机. 驱动绳索可通过基座上的滚珠丝杠直线模组或标准砝码施加张力, 张力传感器安装于模组并与绳索相连. 基座内设有带轴承的滑轮以改变绳索方向并减小摩擦, 使测得张力近似等于传感器值或砝码重力. 臂端可加载不同砝码以施加外载荷. 臂形构型由两台高速相机组成的视觉系统检测: 相机 I 捕捉水平面 (xOy) 偏转, 相机 II 捕捉垂直面 (xOz) 偏转, 进而获得 3D 坐标. 具体结构参数参考文献[21], 如表 1 所示.

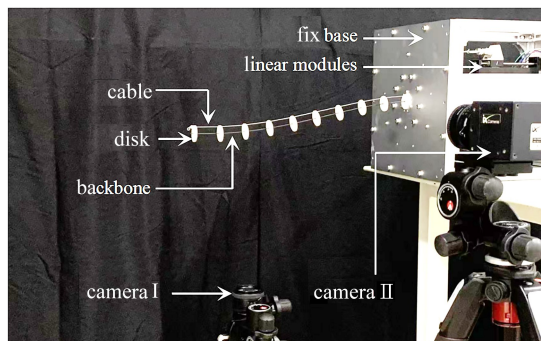


图 5 绳驱连续型机器人实验平台

Fig. 5 The experimental platform for the CDCR system

表 1 绳驱连续型机器人系统仿真参数

Table 1 Simulation parameters of continuous robot system driven by cable

parameter	value	parameter	value
backbone length/m	0.45	disk number	10
backbone diameter/mm	8.5	disk diameter/cm	3
elastic modulus/MPa	7.1×10^4	hole-to-center distance/cm	1.2
Poisson's ratio	0.4	disk quality/g	1.2

5.2 摩擦因数测定实验

绳-摩擦因数测量装置如图 6 所示. 驱动绳索左端接张力传感器, 右端经节盘过线孔和滑轮连接标准砝码. 直线模组驱动绳索时, 传感器记录驱动侧绳索张力, 外侧张力等于砝码重力, 二者差值源于过线孔的摩擦. 将两侧张力代入 Capstan 模型可得 μ . 为保证精度, 在不同滑轮位置重复测量, 滑轮摩擦较小可忽略. 开展

5 组变角度实验,每组测 20 次并取平均值,最终测定的绳-孔摩擦因数取 $\mu = 0.141$,后续开展的静载实验、收放绳实验以及路径跟踪问题均采用该摩擦因数进行仿真。

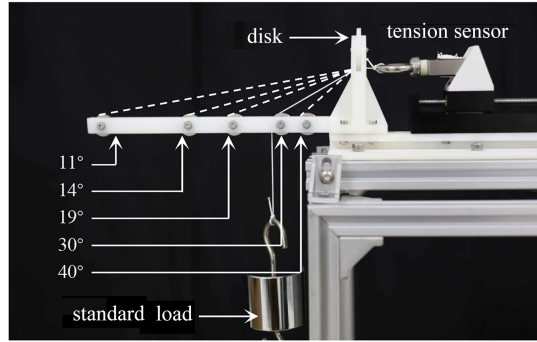


图 6 摩擦因数测定装置

Fig. 6 The friction coefficient measuring device

5.3 静载实验

图 7 展示了连续型机器人在不同绳索张力下的实际构型,将实验结果与仿真结果进行对比,并与无摩擦的情况进行对照(本文中 $g = 10 \text{ m/s}^2$)。从定性分析的角度来看,图 7(a)中的实验结果与仿真结果基本相当。驱动端砝码增加后,绳索张力逐渐增大,机器人构型逐步变化:在小变形下,孔间夹角较小,摩擦衰减效应并不显著,故有、无摩擦情况对构型影响较小;而在大变形情况下,若忽略摩擦则会产生明显误差。另外,考虑到实验样机的装配存在初始误差,且镍-钛合金杆的抗扭能力随着臂节长度的增大而减小,实验载荷进一步提高后,柔性臂容易在弯曲平面外产生侧倾失稳,导致实验结果与仿真结果误差增大。本文开展多组实验取最理想情况列出,并在表 2 中列出了两种计算结果误差的定量分析。进一步在臂端加砝码,如图 7(b)所示,末端负载降低弯曲程度,减缓绳索弯折程度,从而减弱摩擦对张力的衰减效应,故对构型影响不显著。总体来看,准静态模型与实验结果具有一致性。

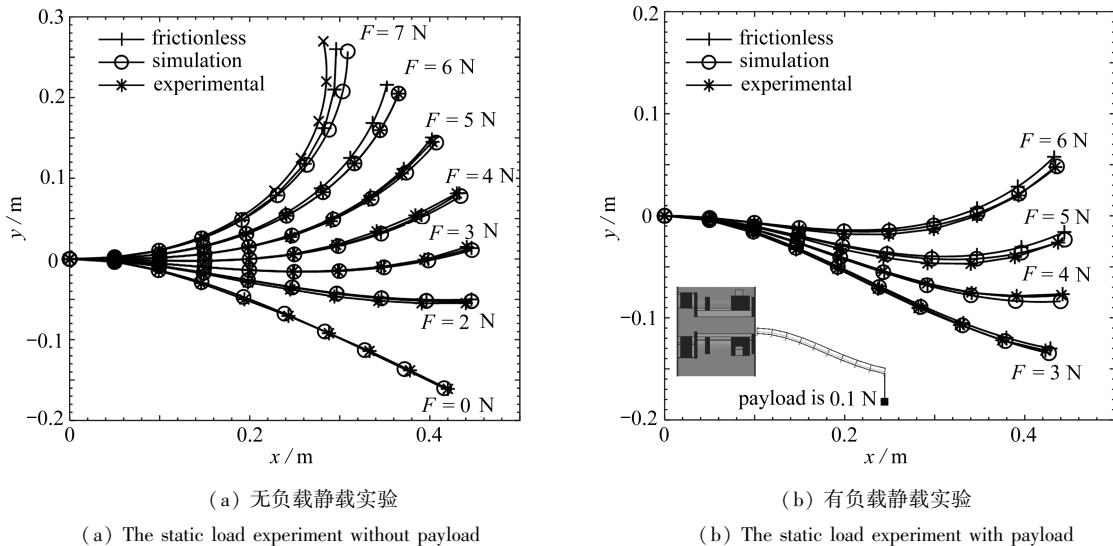


图 7 绳驱连续型机器人系统静载实验

Fig. 7 The static load experiment for the CDCR system

5.4 收、放绳实验

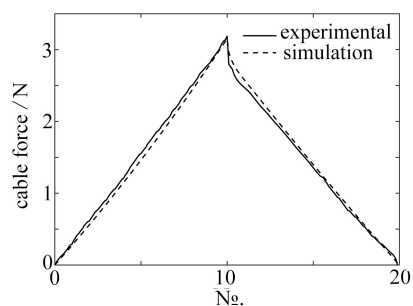
绳-孔滑动摩擦会造成驱动力的迟滞效应,尤其在往复收、放绳过程中,因绳索滑动方向的切换会产生显著的回差。本小节开展了收、放绳实验,并与仿真对比,结果如图 8 所示,其中, S_{out} 表示步进电机的驱动长度。在之前的研究中,基于修正的 Coulomb 摩擦模型建立了绳孔摩擦关系,这类摩擦的特点是在速度零点处摩擦力也为零,不能反映摩擦力在速度零点的黏滞行为,故这类模型所预测的迟滞环包络区域明显小于实验

结果.由此推测,绳-孔摩擦换向时的非光滑行为是关键因素.图8所示的实验结果表明,驱动绳索在放绳阶段存在逐段启滑现象,考虑非光滑因素后,迟滞环的仿真结果与实验结果基本一致.由此可见,由于在非结构环境执行交互任务的绳驱连续型机器人的驱动速度一般较低,在模拟绳孔之间的滑动摩擦时,还应考虑非光滑因素对驱动迟滞的影响.

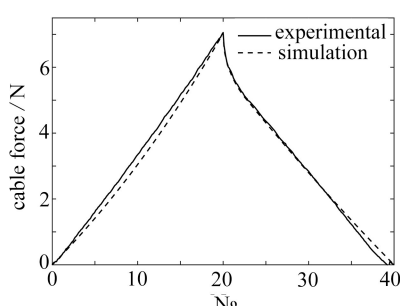
表2 误差分析

Table 2 Error analysis

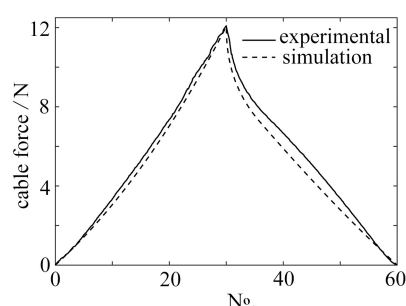
load/N	Euclidean distance/mm								
	node 2	node 3	node 4	node 5	node 6	node 7	node 8	node 9	node 10
0	1.59	0.68	1.49	3.15	5.33	5.12	5.39	6.35	4.21
2	0.26	0.57	1.25	2.86	3.36	4.49	4.56	5.88	6.54
3	0.14	0.20	0.41	0.55	1.41	1.42	3.26	4.53	6.94
4	0.13	0.05	0.07	0.91	5.42	2.81	5.72	7.77	5.26
5	0.14	0.82	0.76	1.15	2.64	3.53	3.76	4.88	4.14
6	0.45	1.20	1.79	2.23	2.99	3.40	5.38	7.65	10.30
7	0.80	0.06	0.84	0.33	1.73	2.82	5.35	9.58	13.09



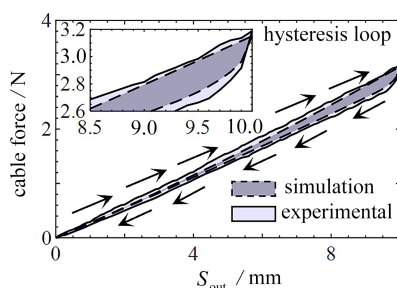
(a) 绳索张力历程 ($S_{\text{out}} = 10 \text{ mm}$)
(a) Cable force histories ($S_{\text{out}} = 10 \text{ mm}$)



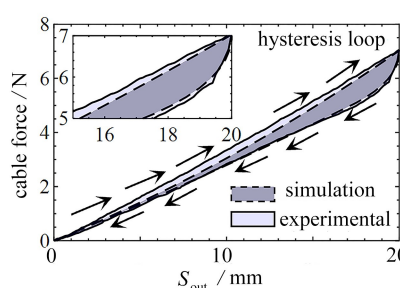
(b) 绳索张力历程 ($S_{\text{out}} = 20 \text{ mm}$)
(b) Cable force histories ($S_{\text{out}} = 20 \text{ mm}$)



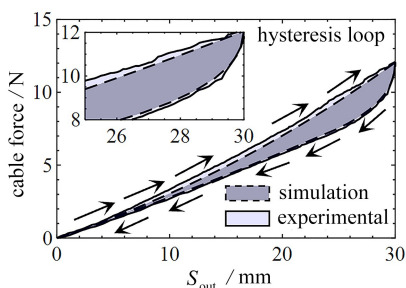
(c) 绳索张力历程 ($S_{\text{out}} = 30 \text{ mm}$)
(c) Cable force histories ($S_{\text{out}} = 30 \text{ mm}$)



(d) 迟滞环 ($S_{\text{out}} = 10 \text{ mm}$)
(d) The hysteresis loop ($S_{\text{out}} = 10 \text{ mm}$)



(e) 迟滞环 ($S_{\text{out}} = 20 \text{ mm}$)
(e) The hysteresis loop ($S_{\text{out}} = 20 \text{ mm}$)



(f) 迟滞环 ($S_{\text{out}} = 30 \text{ mm}$)
(f) The hysteresis loop ($S_{\text{out}} = 30 \text{ mm}$)

图8 收、放绳实验

Fig. 8 The cable reeling and unreeling experiment

5.5 工作空间分析

根据常曲率模型,若机器人轴线沿 x 方向,则机器人末端点 A 的空间坐标^[17]可由弯曲角 θ 和偏转角 φ 表示为

$$x_A = \frac{L}{\theta} \sin \theta, y_A = \frac{L}{\theta} (1 - \cos \theta) \cos \varphi, z_A = \frac{L}{\theta} (1 - \cos \theta) \sin \varphi. \quad (76)$$

考虑摩擦后,绳索绕过线孔后张力按照式(68)的方式呈指数级衰减,但相邻臂节之间弹性杆的变形仍然是小变形.因此,臂段的曲率和绳索张力呈比例变化,亦即:若张力按指数级衰减,则相邻臂段的曲率也按指数级衰减,并可由非线性方程表示为

$$f(\theta_i) = \theta_{i-1} e^{-\mu(\theta_{i-1} + \theta_i)/2} - \theta_i = 0. \quad (77)$$

采用 Newton-Raphson 迭代方法可快速解算任一臂段的弯曲角,并由式(76)得到每段臂节的末端点坐标.图 9(a)给出了在某弯曲方向上,无摩擦以及变摩擦因数对工作空间的影响.图 9(b)给出了机器人逐段启滑位置的构型图.设弯曲角为 $\pi/2$,则无摩擦情况下收、放绳路径重叠,工作空间为该弧线绕转轴 x 旋转一圈构成的曲面.在考虑摩擦后,受到绳索逐段启滑行为的影响,黏滞段的臂节跟随滑移段的臂节做刚体运动,直至所有臂节绳索全部滑移.放绳阶段的路径偏离收绳阶段的路径,导致工作空间呈现对“驱动历史的依赖性”特征.这意味着收绳阶段可达的任务点,单纯依靠放绳则不可达.在图 9(b)中,摩擦因数取 0.60 时,驱动绳索从黏滞状态切换到全部启滑接近整个行程的一半.图 9(c)—9(e)列出了摩擦因数从 0.15 增大到 0.45 时的构型演变情况和绳索递次启滑的具体位置.随着摩擦因数逐渐增大,黏滞区域,即式(69)的范围随之增大,导致递次启滑的位姿间隔逐渐增大.换言之,受驱动历史依赖性的影响,绳驱连续型机器人有可能无法在驱动过程中任意精确地达到其历史任务点.

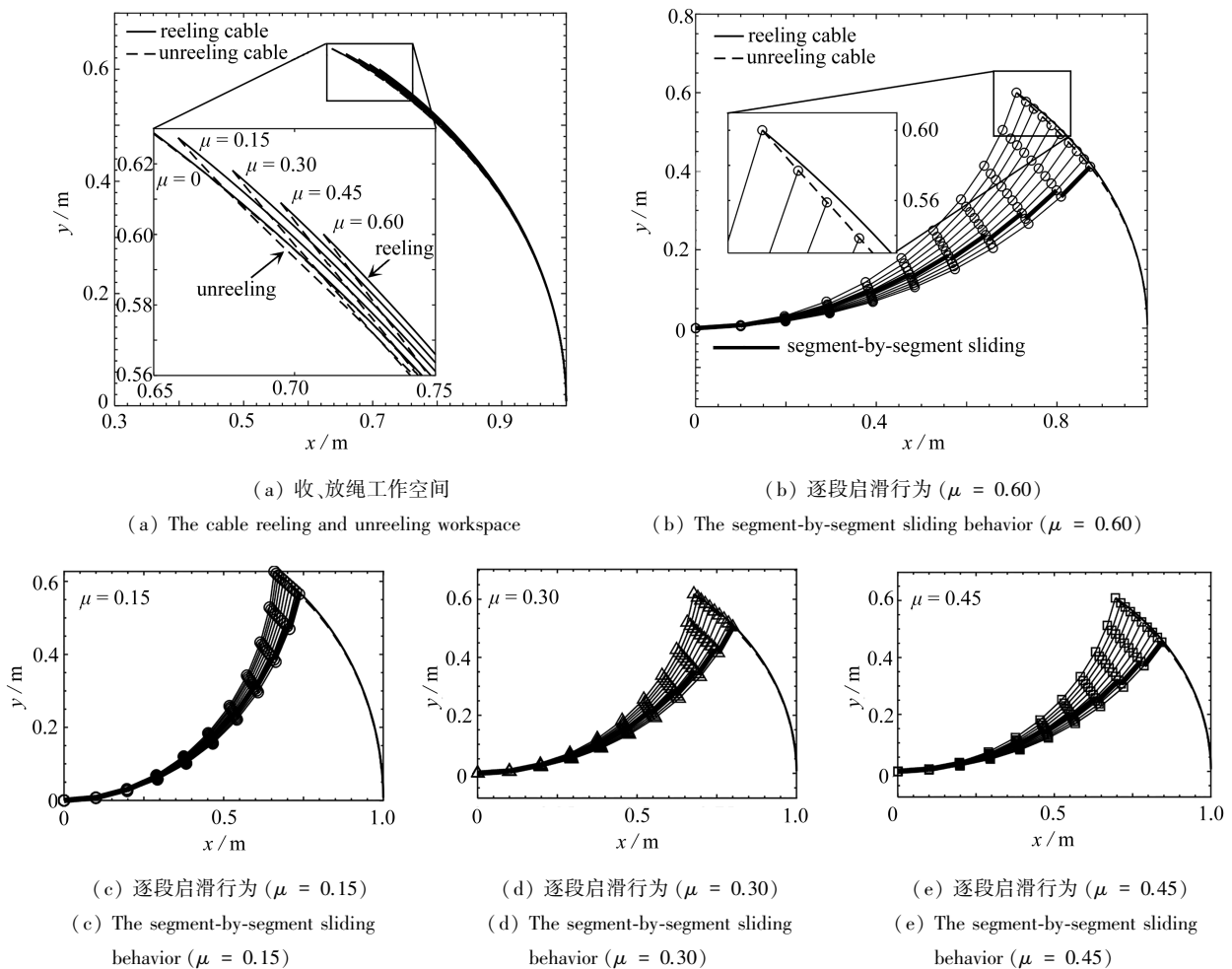
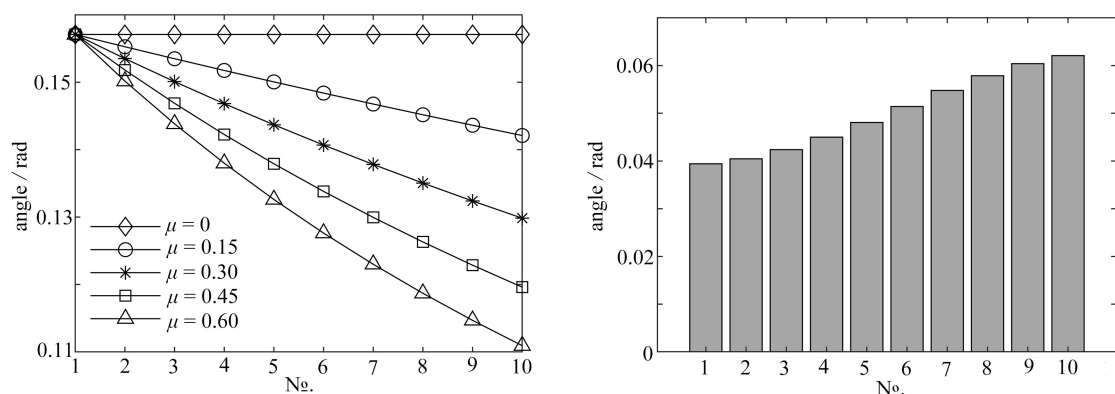


图 9 摩擦因数对工作空间的影响

Fig. 9 Influences of the friction coefficient on the workspace

下面分析图 9 中,各段臂节的弯曲角随摩擦因数的变化情况,结果在图 10(a)中列出.可见,在摩擦因数为零时,各臂段的曲率一致.摩擦因数越大,绳索张力沿过线孔衰减越快,各臂段的曲率递次衰减.此外,节盘的自重对各臂段曲率也有直接影响.设重力方向沿镍钛合金杆轴线方向,绳孔无摩擦,驱动绳索使端部节盘旋转 $\pi/6$,结果如图 10(b)所示.其曲率沿轴线方向增加,呈现出与图 10(a)不同的特点.重力是作用在系统上的外力,因而打破了常曲率模型的假设.尽管此时绳索张力无衰减,但臂段变形是重力和绳索张力共同作用的结果.本例中,外侧节盘的重力对内侧镍钛合金杆截面处产生的力偶矩逐渐增大,导致根部臂段所受的合力偶矩小于端部臂段,使曲率沿臂段外侧方向递增.



(a) 摩擦因数对弯曲角的影响

(b) 重力对弯曲角的影响

(a) Influences of the friction coefficient on the bending angle

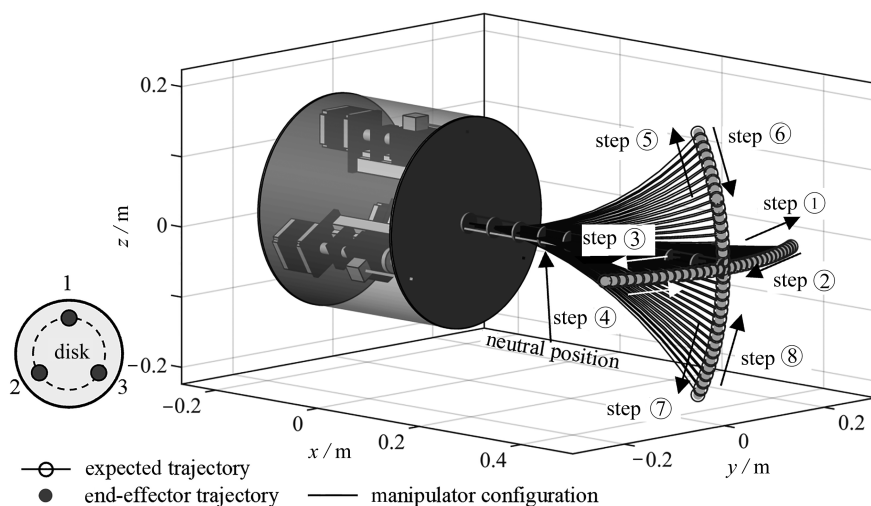
(b) Influences of the gravity coefficient on the bending angle

图 10 变曲率情况分析

Fig. 10 Analysis of variable curvature scenarios

5.6 路径跟踪算例

设计一组十字形路径跟踪算例,阐明循环驱动过程中绳-孔滑动摩擦力的换向对连续型机器人空间构型的影响,以期揭示驱动构型和驱动力对驱动历史的依赖性.如图 11(a)所示,连续型机器人的末端点从其所处的平衡位置出发,沿着 step ①—⑧的十字形路径进行运动,最后回到初始位置.图 11(b)和图 11(c)分别给出了运动过程中连续型机器人构型历史的俯视图和侧视图.从图中可见,在循环驱动过程中,相同轨迹点处呈现不同的运动构型,说明在绳孔滑动摩擦(特别是放绳阶段的逐段启滑行为)的作用下,连续型机器人的当前构型及其驱动力受其驱动历史的影响,在去程、返程阶段呈现出不同的特征.综合图 11(d)和图 11(e)结果可见,在 step ①阶段 1、3 号绳索收绳,2 号绳做无拉力辅助释放.如果绳-孔间无摩擦,则 3 号绳索沿原驱动力历史返回即可.但受摩擦力换向的影响,2 号绳开始施加张力,1、3 号绳配合释放,使满足位置伺服约束的驱动力转向另一组平衡解答.末端点回归到初始位置后,驱动力并未归零,而是收敛到 30 N 附近,且三根绳索拉力相同,显然是满足静平衡条件的一组解.受其影响,在后继的 step ③—⑧阶段,三根绳索在回到初始位置时的张力总是收敛到一组非零解.一方面,数值迭代的初值一般参考前一迭代步的结果,虽然满足当前构型平衡条件的解有无穷多个,但考虑驱动历史后,呈现局部收敛性.另一方面,将绳索视为刚性,没有考虑实际绳索的弹性变形,也是驱动力无法在初始位置恢复到零值的原因之一.



(a) 十字形路径跟踪

(a) The cross-shaped path tracking

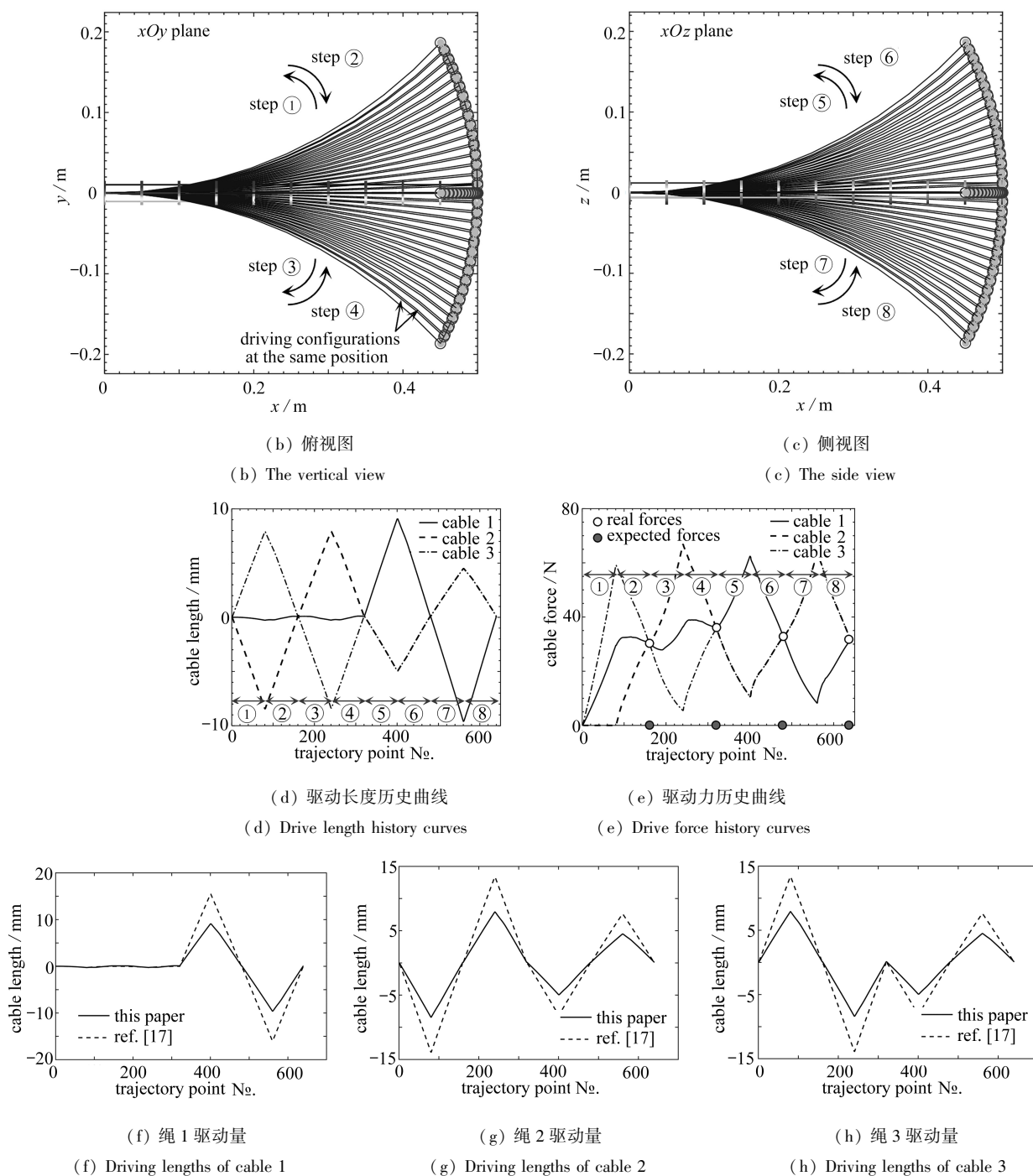


图 11 空间十字形路径跟踪

Fig. 11 The spatial cross-shaped path tracking

进一步采用文献[17]给出的常曲率模型对相同算例进行仿真.图 11(f)—11(h)列出了三根驱动绳索的驱动长度变化情况.采用无摩擦的常曲率模型得到的收绳量和放绳量均大于有摩擦的准静态模型.不考虑摩擦,则准静态模型得到的结果与常曲率模型一致.

在迭代效率方面,由于在非线性最小二乘求解器中内嵌了高效的 Newton-Raphson 迭代算法,且解析地获得了节点力平衡方程的切线刚度矩阵以及伺服约束方程的 Jacobi 矩阵,一次 Newton-Raphson 迭代就可步进到目标位置附近,并在 5 步之内收敛到 10^{-6} 的精度要求.为减少计算规模,使用 Jacobi 复用技术,不必在每个迭代步都求解一次 Jacobi 矩阵,提高计算效率.算法收敛性分析如表 3 所示.

表3 收敛性分析
Table 3 Convergence analysis

No.	maximum absolute error							
	initial	step ①	step ②	step ③	step ④	step ⑤	step ⑥	step ⑦
1	1.22×10^{-2}	2.34×10^{-3}	4.43×10^{-3}	8.16×10^{-5}	1.40×10^{-5}	5.73×10^{-8}	0	0
2	1.52×10^{-2}	8.60×10^{-4}	1.50×10^{-4}	6.16×10^{-6}	1.10×10^{-7}	0	0	0
3	1.12×10^{-2}	4.11×10^{-3}	7.10×10^{-4}	1.85×10^{-3}	1.92×10^{-4}	1.11×10^{-5}	1.30×10^{-6}	1.07×10^{-7}
4	1.49×10^{-2}	1.04×10^{-3}	1.68×10^{-3}	1.02×10^{-5}	2.08×10^{-7}	0	0	0

6 结 论

将绳驱连续型机器人的路径跟踪视为准静态过程,基于多柔体系统动力学理论进行准静态建模,消除单元刚体运动带来的几何非线性问题,推导了柔性支撑梁弹性力、重力的等效节点力平衡方程及其切线刚度矩阵.给出了末端点跟踪指定路径满足的伺服约束方程、Jacobi 矩阵复用以及收敛准则,通过样机实验对绳-孔摩擦因数进行辨识,验证准静态建模的准确性,主要结论如下:

1) 基于收、放绳实验获得循环驱动过程的迟滞环,其包络区域和考虑非光滑摩擦的准静态模型所得结果一致,揭示了放绳阶段过线孔内绳索的逐段启滑机制.该结果表明,如果摩擦模型不能反映绳孔摩擦的非光滑机制,将难以准确反映循环摩擦力换向引入的非线性迟滞行为.

2) 在小曲率运动情况下,驱动绳索的弯折角度小,绳孔摩擦对驱动力的衰减程度低,即便不考虑摩擦效应,对仿真结果的影响也较小.大曲率情况下,驱动绳索的弯折角度大,张力衰减效应显著,忽略摩擦将显著降低求解精度.

3) 开展十字形路径的循环跟踪仿真,利用所提方法5步即可收敛,分析结果揭示了绳-孔滑动摩擦导致的驱动力对驱动历史的依赖性.这种结论是在忽略绳索柔性的前提下得到的,后续研究将进一步讨论绳索柔性和绳-孔滑动摩擦对路径问题的耦合作用机制.

本文研究的连续型机器人采用同孔穿绳方式,故臂节运动形式简单,与分段常曲率模型具有一致的计算精度.所提方法可直接获得力-位混合信息,且考虑了驱动过程中的非光滑迟滞行为,相较传统运动学方法具有一定优势.后续研究将进一步研究多臂节、复杂穿绳方式的准静态建模及其复杂路径跟踪方法,验证模型抗干扰能力.

参考文献(References):

- [1] Mao L, Yang P, Tian C, et al. Magnetic steering continuum robot for transluminal procedures with programmable shape and functionalities[J]. *Nature Communications*, 2024, **15**: 3759.
- [2] Peyron Q, Boehler Q, Rougeot P, et al. Magnetic concentric tube robots: introduction and analysis[J]. *The International Journal of Robotics Research*, 2022, **41**(4): 418-440.
- [3] 齐飞, 葛奕玮, 刘先军, 等. 航空发动机叶片原位检测的可吸附连续体机器人运动建模及控制研究[J]. 仪器仪表学报, 2024, **45**(10): 97-109. (Qi Fei, Ge Yiwei, Liu Xianjun, et al. Motion modeling and control study of an adsorbable continuum robot for in-situ inspection of aero-engine blades[J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2024, **45**(10): 97-109. (in Chinese))
- [4] 刘忠振, 蔡志勤, 彭海军, 等. 位-力驱动的线驱连续型机器人的动力学建模及实验验证[J]. 机器人, 2022, **44**(4): 410-417. (Liu Zhongzhen, Cai Zhiqin, Peng Haijun, et al. Dynamic modeling and experimental validation of cable-driven continuum robots actuated in position-force mode[J]. *Robot*, 2022, **44**(4): 410-417. (in Chinese))
- [5] Liu Z, Cai Z, Peng H, et al. Morphology and tension perception of cable-driven continuum robots[J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2023, **28**(1): 314-325.
- [6] 杨太玮, 郑旭东, 徐文福, 等. 考虑迟滞及变形影响的主被动混合驱动绳驱空间机械臂运动学建模及求解[J]. 机器人, 2022, **44**(1): 45-54. (Yang Taiwei, Zheng Xudong, Xu Wenfu, et al. Kinematics modeling and solution of hybrid active-passive cable-driven space manipulator considering the effects of hysteresis and deformation of hybrid active-passive cable-driven space manipulator considering the effects of hysteresis and deformation[J]. *Robot*, 2022, **44**(1): 45-54.)

- tion[J]. *Robot*, 2022, **44**(1): 45-54. (in Chinese))
- [7] Yang J, Yu H. Robust motion control synthesis with essential dynamics for hybrid-driven continuum robots [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2025, **209**: 105973.
- [8] Wang H, Wang X, Yang W, et al. Construction of controller model of notch continuum manipulator for laryngeal surgery based on hybrid method[J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2021, **26**(2): 1022-1032.
- [9] Cammarata A, Greco L, Castello D, et al. An implicit time integrator for Cosserat rods based on the spherical Bézier interpolation[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2025, **445**: 118195.
- [10] Yu Z, Liu S, Tian Q. Kalman filter based state estimation for the flexible multibody system described by ANCF [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2025, **41**(5): 524373.
- [11] Sonnevile V, G radin M. Two-field formulation of the inertial forces of a geometrically-exact beam element [J]. *Multibody System Dynamics*, 2023, **59**(2): 239-254.
- [12] Sabari Nathan A, Bhattacharjee S, Bhaumik S. Quasi static analysis of multi-segment continuum robot using domain decomposition method[J]. *Procedia Computer Science*, 2018, **133**: 887-894.
- [13] Miyasaka M, Haghighipناه M, Li Y, et al. Modeling cable-driven robot with hysteresis and cable-pulley network friction[J]. *ASME Transactions on Mechatronics*, 2020, **25**(2): 1095-1104.
- [14] Wang C, Zhou Y, Wang X. Design and analytical modeling of a double-joint flexible surgical instrument with hand-held isomorphic actuation[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2024, **203**: 105804.
- [15] Yang J, Peng H, Zhou W, et al. A modular approach for dynamic modeling of multisegment continuum robots [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2021, **165**: 104429.
- [16] Shakerimov A, Altymbek M, Koganezawa K, et al. Machine learning-based inverse kinematics scalability for prismatic tensegrity structural manipulators[J]. *Robotics and Autonomous Systems*, 2025, **193**: 105102.
- [17] 张宇, 汪田鸿, 金滔, 等. 空间连续体机械臂运动学分析与末端控制方法[J]. 机械工程学报, 2025, **61**(1): 13-29. (Zhang Yu, Wang Tianhong, Jin Tao, et al. Kinematics analysis and end control method of space soft manipulator[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2025, **61**(1): 13-29. (in Chinese))
- [18] Huczala D, Mair A, Postulka T. Direct kinematics, inverse kinematics, and motion planning of 1-DoF rational linkages[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2025, **213**: 106074.
- [19] Yang J, Peng H, Wu S, et al. A combined kinodynamic motion planning method for multisegment continuum manipulators in confined spaces[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2024, **112**(4): 2721-2744.
- [20] Wang G, Qi Z, Xu J. A high-precision co-rotational formulation of 3D beam elements for dynamic analysis of flexible multibody systems [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, **360**: 112701.
- [21] Liu Z, Zhang X, Cai Z, et al. Real-time dynamics of cable-driven continuum robots considering the cable constraint and friction effect[J]. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2021, **6**(4): 6235-6242.