ⓒ 应用数学和力学编委会, ISSN 1000-0887

http://www.applmathmech.cn

基于辛精细积分方法的三维屈曲结构动力学分析*

谢雨欣[1]，　毕皓皓[1]，　张欣刚[1]，　姚文莉[1]，　王　博[2]

（1. 青岛理工大学 理学院，山东 青岛 266520；
2. 西北工业大学 工程力学系，西安 710072）

摘要： 基于压缩屈曲原理的三维结构在微机电系统中具有巨大应用潜力，精准预测其动力学响应是实现其广泛工程应用需要解决的关键问题之一.本文首先基于能量法计算了“+”型三维屈曲结构的总能量；随后，通过 Lagrange 方程推导了该结构的线性振动控制方程，并采用辛精细积分方法对其进行数值求解.数值分析表明，辛精细积分法在长时间积分中能有效保持动力学系统的 Hamilton 能量，其数值解具备长期稳定性，为分析该类三维屈曲的动力学行为提供了一种高效的数值分析方法.数值结果表明，三维屈曲结构的振动响应对结构参数有显著依赖性.本文结果有助于三维屈曲结构的动力学优化设计.

关　键　词： 三维屈曲结构；　精细积分方法；　辛算法

中图分类号： O231；O34　　**文献标志码：** A　　DOI：10.21656/1000-0887.460105

Dynamic Analysis of 3D Buckling Structures Based on the Symplectic Precise Integration Method

Xie Yuxin[1]，　Bi Haohao[1]，　Zhang Xingang[1]，
Yao Wenli[1]，　Wang Bo[2]

（1. *School of Science*, *Qingdao University of Technology*,
Qingdao, *Shandong* 266520, *P.R. China*;
2. *Department of Engineering Mechanics*, *Northwestern Polytechnical University*,
Xi'an 710072, *P.R. China*）

Abstract: The 3D structures based on the principle of compression-induced buckling possess significant potential in micro-electro-mechanical systems and other engineering applications. Accurately predicting their dynamic response is one of the key challenges in enabling their widespread practical use. The total energy of a “+”-shaped 3D buckling structure is first evaluated with the energy method. Then, the nonlinear vibration governing equation was derived through the Lagrangian formulation and numerically solved with the precise symplectic integration method. Numerical analysis shows that, the symplectic precise integration method can effectively preserve the Hamiltonian energy of dynamical systems over long-term integration. Its numerical solutions remain stable over time, providing an efficient tool for analyzing the dynamic behaviors of such 3D buckling systems.

* **收稿日期：** 2025-05-26；**修订日期：** 2026-07-03

基金项目： 国家自然科学基金（12402002；12172282；12272197）；山东省自然科学基金（ZR2024QA062；ZR2022MA066）；青岛市自然科学基金（24-4-4-zrjj-7-jch）

作者简介： 谢雨欣（2004—），女，硕士生（E-mail：xieyuxinnn111@outlook.com）；
毕皓皓（1993—），男，讲师，博士，硕士生导师（通信作者. E-mail：bihaohao@mail.nwpu.edu.cn）.

引用格式： 谢雨欣，毕皓皓，张欣刚，姚文莉，王博. 基于辛精细积分方法的三维屈曲结构动力学分析[J]. 应用数学和力学，2026，**47**(10)：1349-1363.

The vibration responses of 3D buckling structures are significantly dependent on structural parameters. The findings contribute to the dynamic optimization design of 3D buckling structures.

Key words: 3D buckling structure; precise integration method; symplectic algorithm

0 引 言

屈曲结构在现代材料科学与工程领域中具有重要地位,其独特的几何设计与多功能性使其在微机电系统[1-3]、超材料[4-8]、柔性电子[9-10]和生物医疗器件[11-12]等领域展现出巨大的应用潜力.近年来,力学引导的二维到三维转化技术[13],通过受控屈曲实现了平面薄膜向复杂三维结构的转变,为高性能可调材料的设计提供了新的思路.

"+"型三维屈曲结构因其在多维力学响应中的优异表现,成为国内外研究的热点[13-24],其屈曲模式与结构的几何参数、边界条件及材料属性密切相关.针对三维屈曲结构的几何建模问题,Liu 等分析了在受控压缩条件下三维屈曲结构的组装行为,提出了不同几何参数条件下三维屈曲构型的能量方法,并通过有限元分析和实验进行验证[13].Zeng 等提出了一种基于力学组装技术的三维屈曲结构制造方法,该方法利用可释放的多层先进材料,通过精确控制屈曲和折叠行为,将二维前驱体结构转化为具有复杂几何形状的三维目标结构[3].Su 等研究了柔性电子设备中的三维屈曲结构在机械变形下的稳定性和电学性能,建立了三维屈曲结构在压缩和拉伸载荷下的理论模型,并通过实验和有限元分析证明了在复杂变形下三维屈曲结构的稳定性和可靠性,为可穿戴设备、柔性传感器等领域的应用提供了重要的技术支持[14].Liu 等基于三维屈曲结构开发了仿生电子皮肤,并通过结合深度学习算法,使电子皮肤能够高灵敏度地感知和区分不同的机械刺激,实现了对压力、剪切力和应变的解耦测量,在物体属性判别与智能监测领域展现出潜力[15].在光检测和成像领域,Lee 等针对三维屈曲结构在复杂载荷条件下的屈曲行为,研究了二维材料在功能性三维架构中的应用[16].此外,李清禄等建立了考虑几何非线性和材料特性的数学模型,并利用辛方法分析了三维波纹型可延展结构的振动特性[17].

然而,三维屈曲结构在实际应用中会出现振动情形,其振动特性直接影响使用性能,因此,深入研究三维屈曲结构的动态行为具有重要意义.传统方法如四阶 Runge-Kutta 法在求解三维屈曲结构的振动控制方程的长时间积分中易出现能量耗散和数值不稳定等问题,针对此问题,本文采用辛精细积分方法求解,已有研究证实该方法具备良好的长期守恒性[25-31].刘晓梅等将精细积分方法嵌入辛差分格式,提出了基于相位误差的精细辛算法,该算法在保持系统辛结构的同时可实现大步长、不增计算量即可精准模拟高低混频及刚性系统[25].徐明毅等进一步发展出显式递推形式与高效辛格式,优化了计算过程,显著降低了矩阵运算成本,同时确保了辛与误差可控性[26].鲍四元等将精细积分法与分数阶差分格式结合,成功应用于分数阶微分方程求解,在降低内存需求的同时保持高精度和步长放大优势[27].姚伟岸等系统地总结了精细积分方法在结构动力学中的发展路径,指出其在非线性、耦合系统中的低耗散与快速响应特性,使其适用于复杂结构的长期动力分析[28].因此,本文将辛精细积分方法应用于"+"型三维屈曲结构的动力学分析,系统研究其振动特性,为工程优化提供了可靠的理论工具.

本文的第 1 节,基于能量方法和 Lagrange 方程,建立了该结构的振动控制方程;然后,在第 2 节,简要介绍了辛精细积分方法的数值格式;在第 3 节,通过数值试验,验证了辛精细积分方法的优越性,并分析了"+"型结构的振幅特性.第 4 节,给出了本文主要结论.

1 "+"型三维屈曲结构控制方程

1.1 模型描述

在本研究中,"+"型三维屈曲结构由两条直带组成,并通过力学引导的方式实现二维结构到三维结构的转变,如图 1 所示,本文研究该三维结构的后屈曲动力学特性.在压缩应变 $\varepsilon_{\text{appl}}$ 下,二维结构发生失稳,并沿带状方向屈曲,最终形成稳定的三维结构,其中 $L_0^{(1)}$ 和 $L_0^{(2)}$ 分别为带(1)和带(2)的屈曲前长度; $l_0^{(1)}$ 和 $l_0^{(2)}$ 分别为带(1)和带(2)的屈曲后长度; $P_1(0,0,-L_1^{(2)}/2)$, $P_2(0,0,L_1^{(2)}/2)$ 为条带(2)的最大面外位移点; $L_1^{(2)}$

为条带(2)的最大面外位移点之间的距离; $l_1^{(2)}$ 为屈曲后 P_1 和 P_2 的投影长度; $\bar{Z}^{(1)}$,$\bar{Z}^{(2)}$ 是直带的长度方向坐标; E,b,h,ρ 分别是直带的弹性模量、厚度、宽度和密度; $A_1(t)$ 和 $A_2(t)$ 分别代表带(1)和带(2)的振幅随时间的变化.图 2 展示了"+"型三维屈曲结构在多稳态三维铁磁结构重构中的应用实例.

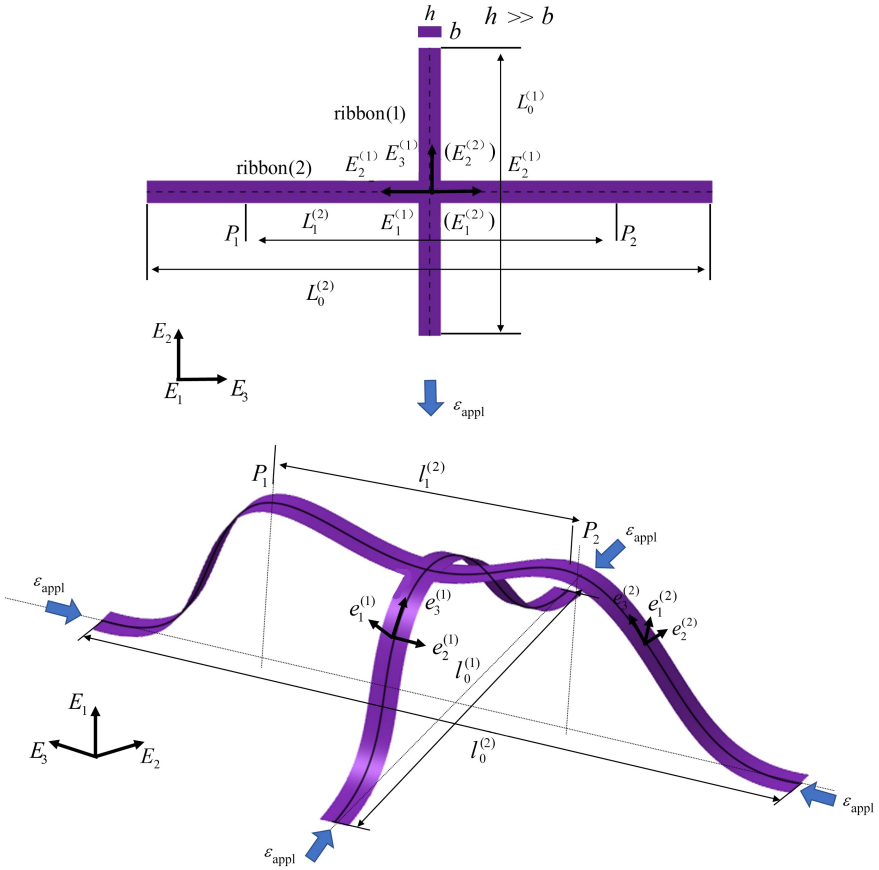
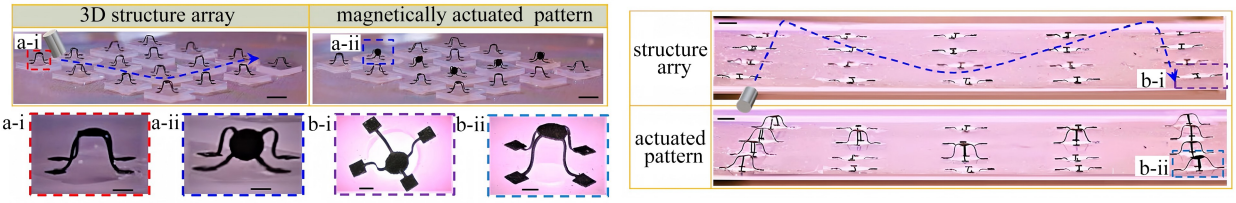


图 1　"+"型结构的二维结构转变为三维屈曲结构过程图

Fig. 1　The transformation process of the "+"-shaped structure from a 2D configuration to a 3D buckling structure



(a) 一个 4×4 多稳态三维铁磁结构阵列　　(b) 一个 4×5 多稳态三维铁磁结构阵列

(a) A 4×4 array of multistable 3D ferromagnetic structure　　(b) A 4×5 array of multistable 3D ferromagnetic structure

图 2　"+"型结构在多稳态三维铁磁结构重构中的应用[32]

Fig. 2　Application of the "+"-shaped structure in the reconfiguration of multistable 3D ferromagnetic structures

注　为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同.

采用能量方法,计算系统的动能 E_k 和势能 U.

根据 Lagrange 方程,可以得到"+"型三维屈曲结构的振动控制方程,Lagrange 方程表达式为

$$\frac{\partial L}{\partial A_1(t)} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{A}_1(t)} = 0, \tag{1}$$

其中,Lagrange 函数 L 的表达式为

$$L = E_k - U. \tag{2}$$

下面对该方程的势能和动能分别进行详细分析计算.

1.2 三维屈曲结构势能

在带状结构的屈曲过程中,势能主要由两条直带的弯曲和扭转产生,系统总应变能量由面内弯曲能、面外弯曲能和扭转能组成.由于“+”型三维屈曲结构仅发生局部弯曲而几乎无轴向的伸长或压缩,且未发生扭转,因此只需考虑面外弯曲能.本文中的势能可表示为[13]

$$U=\frac{EI}{12}\left[\int_0^{1/2}(\hat{\boldsymbol{\kappa}}_2^{(1)})^2\mathrm{d}\bar{Z}^{(1)}+\int_0^{1/2}(\hat{\boldsymbol{\kappa}}_2^{(2)})^2\mathrm{d}\bar{Z}^{(2)}\right]. \tag{3}$$

由于两个条带的弧长在屈曲过程中几乎保持不变,表明了条带的膜能量可忽略,即可得约束条件

$$2\int_0^{1/2}((U_1^{(k)'})^2+(1+U_1^{(k)'})^2)\mathrm{d}\bar{Z}^{(k)}-L_0^{(k)}=0,\qquad k=1,2, \tag{4}$$

其中,令 $\bar{Z}^{(k)}=Z^{(k)}/L_0^{(k)}(k=1,2)$ 表示无量纲坐标,$\hat{\boldsymbol{\kappa}}_2^{(1)}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\kappa}}_2^{(2)}$ 为带(1)和带(2)的弯曲共轭.

为推导 $\hat{\boldsymbol{\kappa}}_i^{(k)}$,为每个直带建立局部坐标系 $\boldsymbol{E}_i^{(k)}(i=1,2,3)$,其中 $\boldsymbol{E}_3^{(k)}$ 是带的轴向,$\boldsymbol{E}_1^{(k)}$ 和 $\boldsymbol{E}_2^{(k)}$ 则位于截面平面内.两个局部坐标系之间的单位矢量关系可以用正交矩阵 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 表示[13],即

$$\boldsymbol{E}_i^{(2)}=\boldsymbol{B}_{ij}\boldsymbol{E}_j^{(1)}, \tag{5}$$

其中

$$\boldsymbol{B}_{ij}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\beta&-\sin\beta\\0&\sin\beta&\cos\beta\end{bmatrix},$$

β 是从 $\boldsymbol{E}_3^{(2)}$ 到 $\boldsymbol{E}_3^{(1)}$ 的逆时针旋转角度.变形后沿中心轴的切向单位矢量定义为 $\boldsymbol{e}_3^{(k)}$.根据 Kirchhoff 假设,单位矢量 $\boldsymbol{e}_1^{(k)}$ 和 $\boldsymbol{e}_2^{(k)}$ 在变形过程中保持在截面平面内,且与变形前的单位矢量 $\boldsymbol{E}_i^{(k)}$ 的关系为 $\boldsymbol{e}_i^{(k)}=\boldsymbol{A}_{ij}^{(k)}\times\boldsymbol{E}_i^{(k)}$,$\boldsymbol{A}_{ij}^{(k)}$ 是变形前后单位矢量之间的方向余弦矩阵.

根据 Love 的定义[33],单位矢量在变形后的导数与曲率矢量 $\boldsymbol{\kappa}^{(k)}$ 有关,公式为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i^{(k)}}{\mathrm{d}Z^{(k)}}=\boldsymbol{\kappa}^{(k)}\times\boldsymbol{e}_i^{(k)},\qquad i=1,2,3;\ k=1,2, \tag{6}$$

其中,$\lambda^{(k)}=\mathrm{d}z^{(k)}/\mathrm{d}Z^{(k)}$ 是沿着带状构件的中心轴的伸展,$\boldsymbol{\kappa}_1^{(k)}$ 和 $\boldsymbol{\kappa}_2^{(2)}$ 分别表示在 $(\boldsymbol{e}_2^{(k)},\boldsymbol{e}_3^{(k)})$ 和 $(\boldsymbol{e}_1^{(k)},\boldsymbol{e}_3^{(k)})$ 面中的弯曲曲率,$\boldsymbol{\kappa}_3^{(k)}$ 是与截面的扭转角 $\phi^{(k)}$ 相关的扭转曲率.

曲率矢量的分量与位移分量和扭转角之间的关系为[13]

$$\hat{\boldsymbol{\kappa}}_i^{(k)}=\begin{bmatrix}0\\U_1^{(k)''}\\\phi^{(k)'}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\phi^{(k)}U_1^{(k)''}-U_2^{(k)''}\\0\\0\end{bmatrix},\qquad i=1,2,3;\ k=1,2. \tag{7}$$

将式(7)代入式(3),该三维屈曲结构势能表示为

$$U=\frac{Eb^3h}{12}\left[\int_0^{1/2}U_1^{(1)''2}\mathrm{d}\bar{Z}^{(1)}+\int_0^{1/2}U_1^{(2)''2}\mathrm{d}\bar{Z}^{(2)}\right], \tag{8}$$

其中,条带(1)的面外位移函数为

$$U_1^{(1)}=a_1^{(1)}\cos(\pi\bar{Z}^{(1)})^2L_0^{(1)}\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{appl}}},\qquad -\frac{1}{2}\leqslant\bar{Z}^{(1)}\leqslant\frac{1}{2}; \tag{9}$$

条带(2)的面外位移函数为

$$U_1^{(2)}=\begin{cases}a_1^{(2)}L_0^{(2)}\varepsilon_{\mathrm{appl}}\cos\left(\pi\dfrac{\bar{Z}^{(2)}+\bar{L}_1^{(2)}/2}{1-\bar{L}_1^{(2)}}\right)^2, & -\dfrac{1}{2}\leqslant\bar{Z}^{(1)}<-\dfrac{\bar{L}_1^{(2)}}{2},\\[2ex]\left(a_1^{(2)}-a_2^{(2)}\cos\left(\pi\dfrac{\bar{Z}^{(2)}}{\bar{L}_1^{(2)}}\right)^2\right)L_0^{(2)}\varepsilon_{\mathrm{appl}}, & -\dfrac{\bar{L}_1^{(2)}}{2}\leqslant\bar{Z}^{(1)}\leqslant\dfrac{\bar{L}_1^{(2)}}{2},\\[2ex]a_1^{(2)}L_0^{(2)}\varepsilon_{\mathrm{appl}}\cos\left(\pi\dfrac{\bar{Z}^{(2)}-\bar{L}_1^{(2)}/2}{1-\bar{L}_1^{(2)}}\right)^2, & \dfrac{\bar{L}_1^{(2)}}{2}<\bar{Z}^{(1)}\leqslant\dfrac{1}{2}.\end{cases} \tag{10}$$

条带(1)和条带(2)的轴向位移[13]分别为

$$U_3^{(1)} = [a_2^{(1)}\sin(4\pi\bar{Z}^{(1)}) - \bar{Z}^{(1)}]L_0^{(1)}\sqrt{\varepsilon_{\text{appl}}}, \qquad -\frac{1}{2} \leqslant \bar{Z}^{(1)} \leqslant \frac{1}{2}, \tag{11}$$

$$U_3^{(2)} = \begin{cases} \left[a_3^{(2)}\left(\dfrac{1}{4\pi}\sin\left(4\pi\dfrac{\bar{Z}^{(2)} + \bar{L}_1^{(2)}/2}{1-\bar{L}_1^{(2)}}\right) - \dfrac{\bar{Z}^{(2)} + \bar{L}_1^{(2)}/2}{1-\bar{L}_1^{(2)}}\right) - \dfrac{a_4^{(2)}}{2}\right]L_0^{(2)}\varepsilon_{\text{appl}}, \\ \qquad\qquad -\dfrac{1}{2} \leqslant \bar{Z}^{(1)} < -\dfrac{\bar{L}_1^{(2)}}{2}, \\ a_4^{(2)}\left(\dfrac{1}{4\pi}\sin\left(4\pi\dfrac{\bar{Z}^{(2)}}{\bar{L}_1^{(2)}}\right) - \dfrac{\bar{Z}^{(2)}}{\bar{L}_1^{(2)}}\right)L_0^{(2)}\varepsilon_{\text{appl}}, \qquad -\dfrac{\bar{L}_1^{(2)}}{2} \leqslant \bar{Z}^{(1)} \leqslant \dfrac{\bar{L}_1^{(2)}}{2}, \\ \left[a_3^{(2)}\left(\dfrac{1}{4\pi}\sin\left(4\pi\dfrac{\bar{Z}^{(2)} - \bar{L}_1^{(2)}/2}{1-\bar{L}_1^{(2)}}\right) - \dfrac{\bar{Z}^{(2)} - \bar{L}_1^{(2)}/2}{1-\bar{L}_1^{(2)}}\right) - \dfrac{a_4^{(2)}}{2}\right]L_0^{(2)}\varepsilon_{\text{appl}}, \\ \qquad\qquad \dfrac{\bar{L}_1^{(2)}}{2} < \bar{Z}^{(1)} \leqslant \dfrac{1}{2}, \end{cases} \tag{12}$$

其中, $\bar{L}_1^{(2)} = L_1^{(2)}/L_0^{(2)}$ 是条带(2)的无量纲长度,无量纲参数 $a_1^{(1)}$ 和 $a_1^{(2)}$ 分别表示条带(1)和条带(2)的最大面外位移的幅值, $a_2^{(1)}$ 表示带(1)轴向位移的非均匀部分的幅值, $a_3^{(2)}$ 和 $a_4^{(2)}$ 表示带(2)轴向位移的分段函数的幅值,且满足约束条件 $a_3^{(2)} + a_4^{(2)} = 1$.

将 $U_3^{(1)}$ 和 $U_3^{(2)}$ 代入式(4),可得到条带(1)约束条件为

$$2L_0^{(1)}\varepsilon_{\text{appl}} - L_0^{(1)} - \frac{3}{2}L_0^{(1)^2}\varepsilon_{\text{appl}}^2 - \frac{1}{2}a_1^{(1)^2}L_0^{(1)^2}\varepsilon_{\text{appl}}\pi^2 - 1 = 0; \tag{13}$$

条带(2)的约束条件为

$$\frac{\bar{L}_1^{(2)}}{2} - L_0^{(2)}a_4^{(2)}\varepsilon_{\text{appl}} + \frac{L_0^{(1)^2}\varepsilon_{\text{appl}}\pi^2\bar{L}_1^{(2)^3}}{4(1-2\bar{L}_1^{(2)})^2}a_1^{(1)^2} + \frac{L_0^{(2)}\varepsilon_{\text{appl}}^2\pi^2 3a_4^{(2)^2}}{4\bar{L}_1^{(2)}} - L_0^{(2)} = 0, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &\frac{(1-\bar{L}_1^{(2)})^3 L_0^{(1)^2}\varepsilon_{\text{appl}}\pi}{2(1-2\bar{L}_1^{(2)})^2}a_1^{(1)^2}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{1-\bar{L}_1^{(2)}}\right)\right) + \\ &\frac{L_0^{(2)^2}a_3^{(2)^2}\varepsilon_{\text{appl}}^2}{4\pi(1-\bar{L}_1^{(2)})}\left(\frac{3\pi}{1-\bar{L}_1^{(2)}} + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{4\pi}{1-\bar{L}_1^{(2)}}\right) - 2\sin\left(\frac{2\pi}{1-\bar{L}_1^{(2)}}\right)\right) + \\ &\frac{L_0^{(2)^2}a_3^{(2)^2}\varepsilon_{\text{appl}}}{2\pi}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{1-\bar{L}_1^{(2)}}\right) - \frac{2\pi}{1-\bar{L}_1^{(2)}}\right) + \frac{1-\bar{L}_1^{(2)}}{2} - L_0^{(2)} = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

所以,该三维屈曲结构势能可表示为

$$U = \frac{Eb^3h}{12}A_1(t)^2L_0^{(1)^2}\varepsilon_{\text{appl}}\left[\pi^4 + \frac{\bar{L}_1^{(2)^2}\pi^4}{(1-2\bar{L}_1^{(2)})^2} - \frac{(1-\bar{L}_1^{(2)})\pi^3(\sin(2\pi - 2\pi\bar{L}_1^{(2)}) - 2\pi)}{2(1-2\bar{L}_1^{(2)})^2}\right]. \tag{16}$$

1.3　动能分析

带(1)的位移函数为 $U_1^{(1)}$, 其中 $A_1(t)$ 表示带(1)的振动幅度函数:

$$U_1^{(1)} = A_1(t)\cos(\pi\bar{Z}^{(1)})^2L_0^{(1)}\sqrt{\varepsilon_{\text{appl}}}, \qquad -\frac{1}{2} \leqslant \bar{Z}^{(1)} \leqslant \frac{1}{2}, \tag{17}$$

带(1)的振动速度为该位移对时间的导数,即

$$\dot{U}_1^{(1)} = \dot{A}_1(t)\cos(\pi\bar{Z}^{(1)})^2L_0^{(1)}\sqrt{\varepsilon_{\text{appl}}}, \qquad -\frac{1}{2} \leqslant \bar{Z}^{(1)} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{18}$$

带(1)的动能 $E_k^{(1)}$ 表示为

$$E_k^{(1)}=\frac{1}{2}phb\int_{-1/2}^{1/2}\dot{U}_1^{(1)^2}\mathrm{d}\bar{Z}^{(1)}, \tag{19}$$

将 $\dot{U}_1^{(1)}$ 的表达式(18)代入式(19)后,得到动能为

$$E_k^{(1)}=\frac{3}{16}phb\dot{A}_1(t)^2L_0^{(1)^2}\varepsilon_{\mathrm{appl}}. \tag{20}$$

表明动能与振幅的平方 $\dot{A}_1^2(t)$、带(1)的长度平方 $L_0^{(1)^2}$ 和压缩应变 $\varepsilon_{\mathrm{appl}}$ 成正比.

带(2)的位移函数为 $U_1^{(2)}$ 分为三个区间,其中 $A_2(t)$ 为带(2)的振幅函数:

$$U_1^{(2)}=\begin{cases}A_2(t)L_0^{(2)}\varepsilon_{\mathrm{appl}}\cos\left(\pi\dfrac{\bar{Z}^{(2)}+\bar{L}_1^{(2)}/2}{1-\bar{L}_1^{(2)}}\right)^2, & -\dfrac{1}{2}\leqslant\bar{Z}^{(1)}<-\dfrac{\bar{L}_1^{(2)}}{2},\\ \left(A_2(t)-a_2^{(2)}\cos\left(\pi\dfrac{\bar{Z}^{(2)}}{\bar{L}_1^{(2)}}\right)^2\right)L_0^{(2)}\varepsilon_{\mathrm{appl}}, & -\dfrac{\bar{L}_1^{(2)}}{2}\leqslant\bar{Z}^{(1)}\leqslant\dfrac{\bar{L}_1^{(2)}}{2},\\ A_2(t)L_0^{(2)}\varepsilon_{\mathrm{appl}}\cos\left(\pi\dfrac{\bar{Z}^{(2)}-\bar{L}_1^{(2)}/2}{1-\bar{L}_1^{(2)}}\right)^2, & \dfrac{\bar{L}_1^{(2)}}{2}<\bar{Z}^{(1)}\leqslant\dfrac{1}{2}.\end{cases} \tag{21}$$

根据无量纲参数之间的关系

$$a_2^{(2)}=\frac{L_0^{(1)}}{L_0^{(2)}}\frac{\bar{L}_1^{(2)^2}}{1-2\bar{L}_1^{(2)}}a_1^{(1)}, \tag{22}$$

$$a_1^{(2)}=\frac{L_0^{(1)}}{L_0^{(2)}}\frac{(1-\bar{L}_1^{(2)})^2}{1-2\bar{L}_1^{(2)}}a_1^{(1)} \tag{23}$$

和两带连接处面外位移相同的条件

$$U_1^{(1)}\mid_{\bar{Z}^{(1)}=0}=U_1^{(2)}\mid_{\bar{Z}^{(2)}=0}, \tag{24}$$

以及位移函数(10),整理可得 $A_1(t)$ 和 $A_2(t)$ 的关系式为

$$A_2(t)=\frac{L_0^{(1)}}{L_0^{(2)}}A_1(t). \tag{25}$$

代入 $A_1(t)$ 和 $A_2(t)$ 的关系式(25)并观察各量纲参数的关系式(22)、(23), $U_1^{(2)}$ 的位移函数可转换为

$$U_1^{(2)}=\begin{cases}A_1(t)L_0^{(2)}\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{appl}}}\cos\left(\pi\dfrac{\bar{Z}^{(2)}+\bar{L}_1^{(2)}/2}{1-\bar{L}_1^{(2)}}\right)^2, & -\dfrac{1}{2}\leqslant\bar{Z}^{(1)}<-\dfrac{L_1^{(2)}}{2},\\ A_1(t)L_0^{(2)}\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{appl}}}, & -\dfrac{\bar{L}_1^{(2)}}{2}\leqslant\bar{Z}^{(1)}\leqslant\dfrac{\bar{L}_1^{(2)}}{2},\\ A_1(t)L_0^{(2)}\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{appl}}}\cos\left(\pi\dfrac{\bar{Z}^{(2)}-\bar{L}_1^{(2)}/2}{1-\bar{L}_1^{(2)}}\right)^2, & \dfrac{\bar{L}_1^{(2)}}{2}<\bar{Z}^{(1)}\leqslant\dfrac{1}{2}.\end{cases} \tag{26}$$

对 t 求导可得

$$\dot{U}_1^{(2)}=\begin{cases}\dot{A}_1(t)L_0^{(2)}\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{appl}}}\cos\left(\pi\dfrac{\bar{Z}^{(2)}+\bar{L}_1^{(2)}/2}{1-\bar{L}_1^{(2)}}\right)^2, & -\dfrac{1}{2}\leqslant\bar{Z}^{(1)}<-\dfrac{\bar{L}_1^{(2)}}{2},\\ \dot{A}_1(t)L_0^{(2)}\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{appl}}}, & -\dfrac{\bar{L}_1^{(2)}}{2}\leqslant\bar{Z}^{(1)}\leqslant\dfrac{\bar{L}_1^{(2)}}{2},\\ \dot{A}_1(t)L_0^{(2)}\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{appl}}}\cos\left(\pi\dfrac{\bar{Z}^{(2)}-\bar{L}_1^{(2)}/2}{1-\bar{L}_1^{(2)}}\right)^2, & \dfrac{\bar{L}_1^{(2)}}{2}<\bar{Z}^{(1)}\leqslant\dfrac{1}{2}.\end{cases} \tag{27}$$

带(2)的动能 $E_k^{(2)}$ 表示为

$$E_k^{(2)} = \frac{1}{2} phb \int_{-1/2}^{1/2} \dot{U}_1^{(2)} \mathrm{d}\bar{Z}^{(2)} . \tag{28}$$

将 $\dot{U}_1^{(2)}$ 的表达式代入后,得到动能为

$$E_k^{(2)} = \frac{1}{16} phb\dot{A}_1(t)^2 L_0^{(1)^2} \varepsilon_{\mathrm{appl}} (3 - 2\bar{L}_1^{(2)}) . \tag{29}$$

整个"+"型结构的总动能为

$$E_k = E_k^{(1)} + E_k^{(2)} = \frac{1}{2} phb\dot{A}_1(t)^2 L_0^{(1)^2} \varepsilon_{\mathrm{appl}} (1 - \bar{L}_1^{(2)}) . \tag{30}$$

在此基础上,通过 Lagrange 函数(2)可进一步推导其动力学行为.将动能与势能表达式代入后,Lagrange 函数的具体形式为

$$L = \frac{1}{2} phb\dot{A}_1(t)^2 L_0^{(1)^2} \varepsilon_{\mathrm{appl}} (1 - \bar{L}_1^{(2)}) - \frac{Eb^3 h}{12} A_1(t)^2 L_0^{(1)^2} \varepsilon_{\mathrm{appl}} \left[\pi^4 + \frac{\bar{L}_1^{(2)^2} \pi^4}{(1 - 2\bar{L}_1^{(2)})^2} - \frac{(1 - \bar{L}_1^{(2)}) \pi^3 (\sin(2\pi - 2\pi\bar{L}_1^{(2)}) - 2\pi)}{2(1 - 2\bar{L}_1^{(2)})^2} \right] . \tag{31}$$

该 Lagrange 函数充分考虑了结构的几何特征,最终通过 Lagrange 方程(1)可以得到该结构的振动控制方程为

$$\ddot{A}_1(t) + \frac{Eb^2}{6p} A_1(t) \left[\frac{\pi^4}{1 - \bar{L}_1^{(2)}} + \frac{\bar{L}_1^{(2)^2} \pi^4}{(1 - 2\bar{L}_1^{(2)})^2 (1 - \bar{L}_1^{(2)})} - \frac{\pi^3 (\sin(2\pi - 2\pi\bar{L}_1^{(2)}) - 2\pi)}{2(1 - 2\bar{L}_1^{(2)})^2} \right] = 0. \tag{32}$$

2　数值方法

2.1　算法介绍

在该方程中,系数由三维屈曲结构的几何尺寸、材料特性和加载条件共同决定.传统的四阶 Runge-Kutta 法易受累积误差与不稳定性影响,难以满足控制方程的高精度需求.因此需要采用辛精细积分方法结合 Padé 逼近,以高精度计算矩阵指数,并实现辛格式守恒[27-28,34-35].

2.2　辛精细积分方法应用

对于该结构的动力学方程,其解不仅需要满足方程本身,还需要保证能量守恒.辛精细积分方法融合了辛算法的几何结构的保持特性与精细积分法的数值稳定优势,能够在长时间积分中保持 Hamilton 系统的辛结构和能量守恒性[28].对于动力学系统:

$$M\ddot{u} + K(u)u = 0, \tag{33}$$

引入状态变量 $\boldsymbol{v}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix}$, 控制方程可转为一阶微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{H}\boldsymbol{v}(t), \ \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ -M^{-1}K & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \tag{34}$$

其解的状态传递矩阵公式为

$$\boldsymbol{v}(t + \Delta t) = \phi(t + \Delta t, t)\boldsymbol{v}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{H}\Delta t} \boldsymbol{v}(t), \tag{35}$$

其中,矩阵 $\boldsymbol{H}$ 为辛矩阵.为了在数值计算中保持辛矩阵性质,精细积分方法仅存储矩阵增量,避免传统算法的舍入误差.

本文中三维屈曲结构的一阶微分方程组为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{bmatrix} A_1(t) \\ \dot{A}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ -\dfrac{Eb^2}{6p} C & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(t) \\ \dot{A}_1(t) \end{bmatrix} . \tag{36}$$

辛矩阵 $\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\\ -\dfrac{Eb^2}{6p}C & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$, 常数

$$C=\frac{\pi^4}{1-\bar{L}_1^{(2)}}+\frac{\bar{L}_1^{(2)^2}\pi^4}{(1-2\bar{L}_1^{(2)})^2(1-\bar{L}_1^{(2)})}-\frac{\pi^3(\sin(2\pi-2\pi\bar{L}_1^{(2)})-2\pi)}{2(1-2\bar{L}_1^{(2)})^2}, \tag{37}$$

且满足

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{0}, \tag{38}$$

其中 $\boldsymbol{J}$ 为对角辛矩阵

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}. \tag{39}$$

辛精细积分方法的核心是通过矩阵指数的分解与增量存储, 降低数值计算的误差, 可以保持辛矩阵性质.利用矩阵指数的加法定理

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{H}\Delta t}=(\mathrm{e}^{\boldsymbol{H}\tau})^m,\qquad \tau=\frac{\Delta t}{m}. \tag{40}$$

将时间步长 Δt 分为 m 个子步,子步长度 τ 足够小时,可以通过递推公式计算每一个子步的状态增量:

$$\boldsymbol{v}(t+\tau)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{H}\tau}\boldsymbol{v}(t), \tag{41}$$

最终累计获得整个时间步长上的状态解.

然而,直接计算矩阵指数 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{H}\tau}$ 代价高昂且易受累积误差影响,因此引进 Padé 逼近计算指数矩阵[28].

2.3 Padé 逼近引入

根据 Padé 级数逼近理论,矩阵指数 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}\tau}$ 的 (p,q) 阶的 Padé 近似为

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{H}\tau}\approx R_{p,q}(\boldsymbol{H}\tau)=[\boldsymbol{D}_{p,q}(\boldsymbol{H}\tau)]^{-1}\boldsymbol{N}_{p,q}(\boldsymbol{H}\tau), \tag{42}$$

其中

$$\boldsymbol{N}_{p,q}(\boldsymbol{H}\tau)=\sum_{j=0}^{p}\frac{(p+q-j)!\,p!}{(p+q)!\,j!\,(p-j)!}(\boldsymbol{H}\tau)^j, \tag{43}$$

$$\boldsymbol{D}_{p,q}(\boldsymbol{H}\tau)=\sum_{j=0}^{q}\frac{(p+q-j)!\,q!}{(p+q)!\,j!\,(q-j)!}(-\boldsymbol{H}\tau)^j. \tag{44}$$

通过选择 q 阶对角 Padé 近似即 $p=q$, 可以在计算效率和精度之间达到平衡.对于辛矩阵 $\boldsymbol{H}$, Padé 逼近在收敛性和数值稳定性方面显著优于 Taylor 展开.

将矩阵指数 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{H}\tau}$ 通过 Padé 逼近拆解为增量形式:

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{H}\tau}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}_{\mathrm{a}}, \tag{45}$$

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{a}}=[\boldsymbol{D}_{p,q}(\boldsymbol{H}\tau)]^{-1}\boldsymbol{N}_{p,q}(\boldsymbol{H}\tau)-\boldsymbol{I}. \tag{46}$$

通过存储 $\boldsymbol{T}_{\mathrm{a}}$ 而不是 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{H}\tau}$, 可以提高精度减小误差.

3 结果与讨论

本研究针对“+”型三维屈曲结构的动力学行为开展了深入系统的研究.基于能量法,构建了完整的力学模型并推导出该结构的振动控制方程(32).为了精准预测三维屈曲结构的动力学响应,本文将结合 Padé 逼近计算矩阵指数的辛精细积分方法应用于三维屈曲结构的动力学分析.

3.1 数值稳定性

为验证辛精细积分方法在保持系统能量守恒方面的数值优势.图 3 对比了在步长 $\Delta t=0.000\,1$ 下采用四阶 Runge-Kutta 法与辛精细积分方法计算方程(32)对应的 Hamilton 能量的误差,三维屈曲结构的 Hamilton 能量可写为

$$H(t)=\frac{1}{2}pbhL_0^{(1)}\dot{A}_1^2(t)+\frac{1}{2}Eb^3hCA_1^2(t). \tag{47}$$

初始条件为 $A_1(0)=0.1$，$\dot{A}_1(0)=0$，$b=600\ \mu\text{m}$，$h=75\ \mu\text{m}$，$L_0^{(1)}=15\ 000\ \mu\text{m}$，$L_0^{(2)}=30\ 000\ \mu\text{m}$，$\bar{L}_1^{(2)}=0.414$，$E=2.8\ \text{GPa}$，$\rho=1.39\times10^3\ \text{kg/m}^3$，$\varepsilon_{\text{appl}}=0.1$。由图 3 可见，四阶 Runge-Kutta 法（带实心方点的线）所产生的能量误差随时间增加呈累积趋势，这表明 Hamilton 能量发生了数值耗散现象；而辛精细积分方法（带空心圆点的线）所得到的能量误差始终保持在 0 附近，充分体现了其在长时间积分中对系统能量守恒结构的良好保持性。

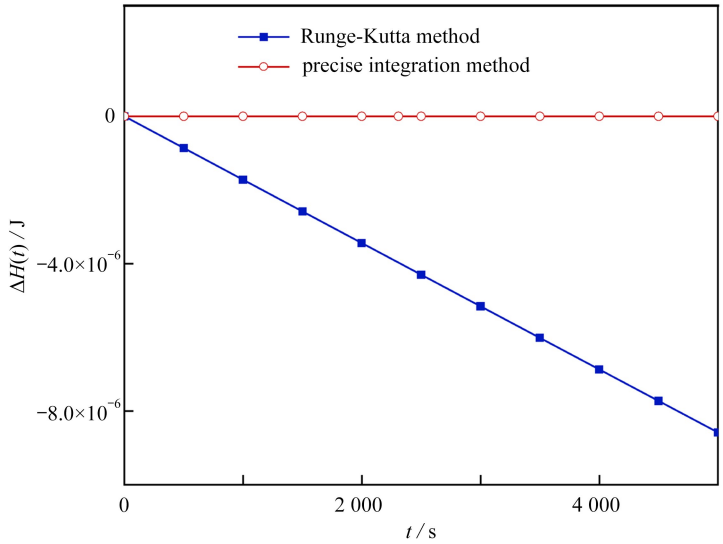


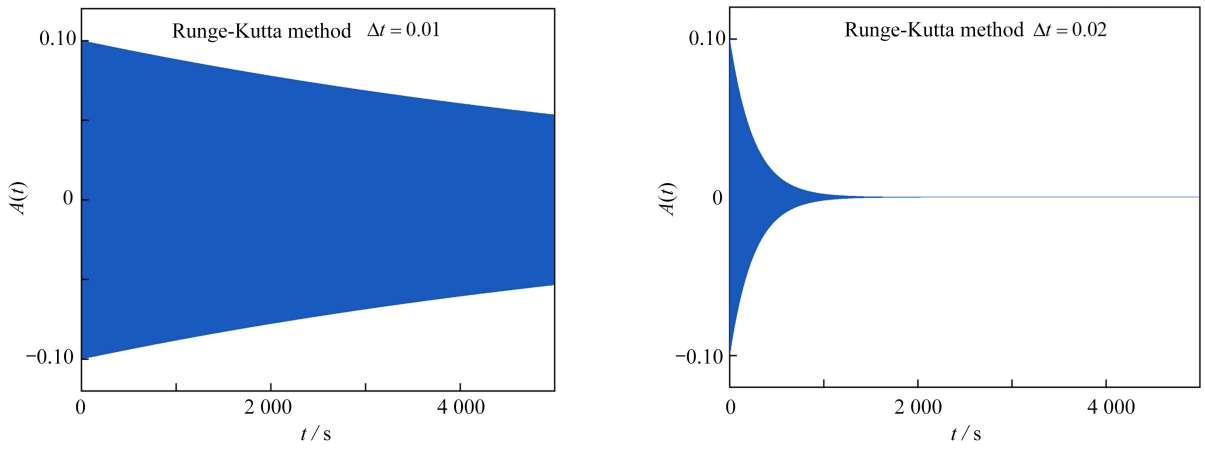
图 3　Hamilton 能量误差图

Fig. 3　The Hamiltonian energy error comparison

为了验证辛精细积分方法的有效性和优越性，图 4、图 5 对比了辛精细积分方法和四阶 Runge-Kutta 法改变时间步长 Δt 时的数值稳定性。

在长时间积分过程中，两种方法都采用相同步长 $\Delta t=0.01$，初始条件同为 $A_1(0)=0.1$，$\dot{A}_1(0)=0$，$b=600\ \mu\text{m}$，$h=75\ \mu\text{m}$，$L_0^{(1)}=15\ 000\ \mu\text{m}$，$L_0^{(2)}=30\ 000\ \mu\text{m}$，$\bar{L}_1^{(2)}=0.414$，$E=2.8\ \text{GPa}$，$\rho=1.39\times10^3\ \text{kg/m}^3$，$\varepsilon_{\text{appl}}=0.1$。由图 4 可以发现在积分过程中，Runge-Kutta 法的数值解 $A_1(t)$ 展示出一种阻尼振荡的趋势，位移 $A_1(t)$ 随时间振荡，但振幅逐渐衰减；而辛精细积分方法在积分过程中能够严格保持系统的辛结构，振动幅度在长时间内均保持稳定，几乎没有出现数值耗散或振幅衰减。

当时间步长较小时，两种方法均能保持解的稳定性。然而，当时间步长增加至 $\Delta t=0.02$ 时，Runge-Kutta 法的解出现明显振荡，而辛精细积分方法依然能够准确捕捉振动行为。这表明辛精细积分方法支持更大的时间步长，具有显著的数值稳定性优势。



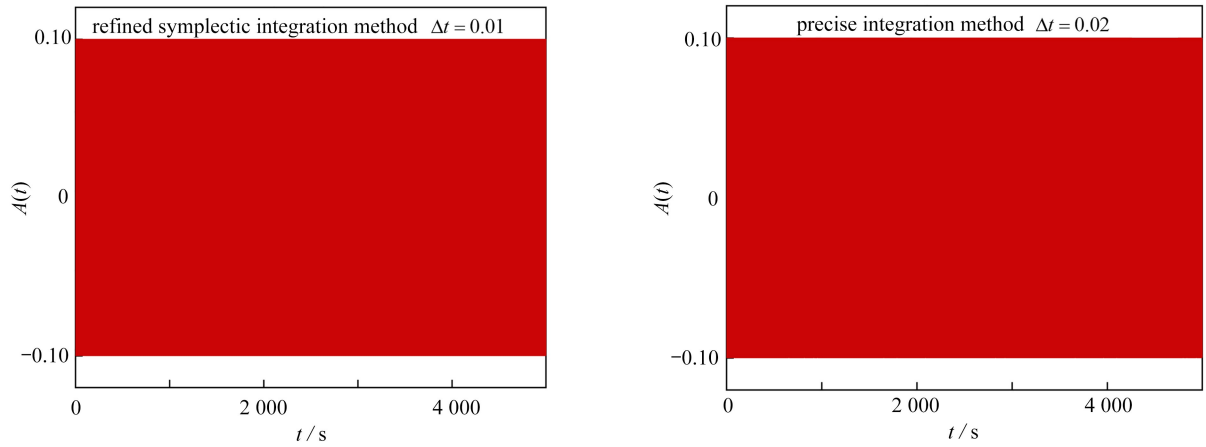


图 4 四阶 Runge-Kutta 法和辛精细积分方法在步长 $\Delta t = 0.01$ 和 $\Delta t = 0.02$ 时的仿真结果，$t \in [0, 5\,000]$

Fig. 4 Simulation results of the 4th-order Runge-Kutta method and the refined symplectic integration method with step sizes $\Delta t = 0.01$ and $\Delta t = 0.02$, $t \in [0, 5\,000]$

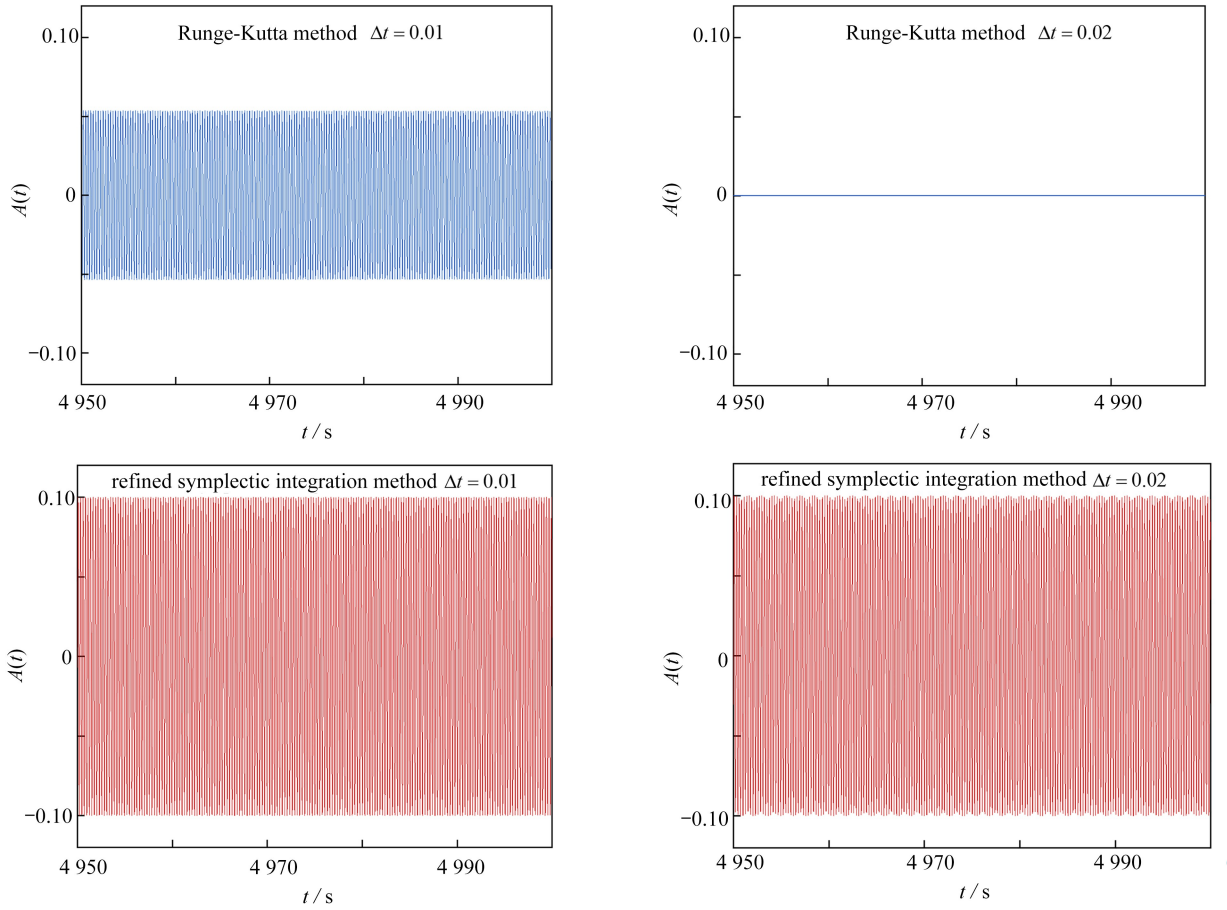


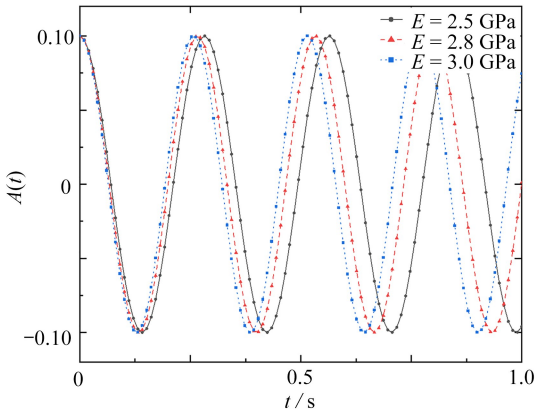
图 5 四阶 Runge-Kutta 法和辛精细积分方法在步长 $\Delta t = 0.01$ 和 $\Delta t = 0.02$ 时的仿真结果，$t \in [4\,950, 5\,000]$

Fig. 5 Simulation results of the 4th-order Runge-Kutta method and the refined symplectic integration method with step sizes $\Delta t = 0.01$ and $\Delta t = 0.02$, $t \in [4\,950, 5\,000]$

3.2 弹性模量与振幅的关系

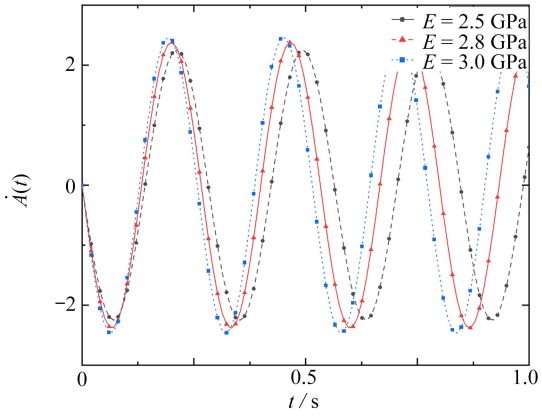
根据图 6(a)不同弹性模量 $E = 2.5$ GPa，$E = 2.8$ GPa 和 $E = 3.0$ GPa 的振幅-时间曲线可以得出结论，随着弹性模量 E 的增大，振动频率升高，而振幅的变化幅度整体较为稳定.图 6(b)—6(d)进一步可以解释：系统的动力学方程中刚度的大小与弹性模量有关，当弹性模量增大时，系统的刚度变大，导致系统的固有频率

变大.相轨旋转速度加快;同时,由于系统能量守恒,当刚度增大时,系统势能对于相同位移更大,势能更快转化为动能,使得振动速度峰值更高,周期缩短,频率升高.



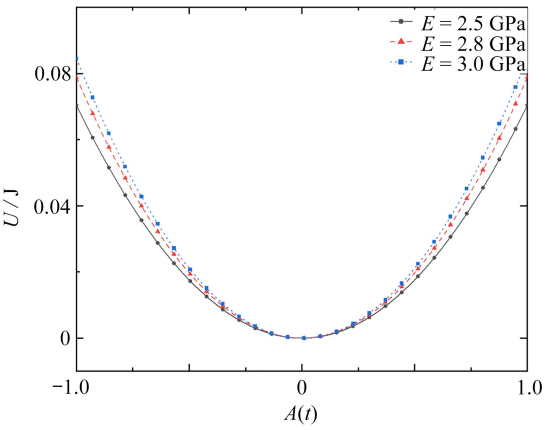
(a) 不同弹性模量条件下的振幅

(a) Amplitudes under different elastic modulus conditions



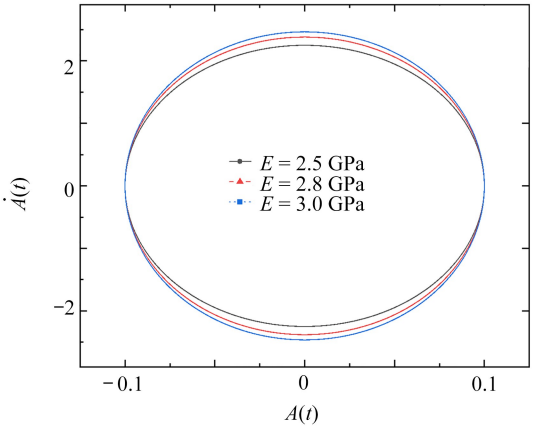
(b) 不同弹性模量条件下的速度

(b) Velocities under different elastic modulus conditions



(c) 不同弹性模量条件下的振幅与势能的关系

(c) Relationships between the amplitude and the potential energy under different elastic modulus conditions



(d) 不同弹性模量下的相图

(d) Phase portraits under different elastic moduli

图 6　不同弹性模量条件下三维屈曲结构的动力学响应

Fig. 6　Dynamic responses of the 3D buckling structure under different elastic moduli

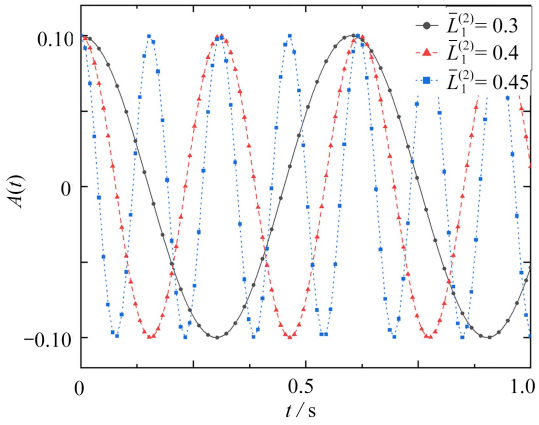
3.3　无量纲长度与振幅的关系

根据图 7(a)不同无量纲长度 $\bar{L}_1^{(2)}=0.3$,$\bar{L}_1^{(2)}=0.4$ 和 $\bar{L}_1^{(2)}=0.45$ 与振幅-时间曲线图可以得出结论,随着无量纲长度 $\bar{L}_1^{(2)}$ 的增大,振动频率明显升高,振动周期显著缩短,而振幅几乎无变化.由图 7(b)—7(d)可以进一步解释这一动力学行为:无量纲长度的增大使动力学方程中的刚度增大,导致系统的固有频率升高;同时,在系统能量守恒的条件下,当无量纲长度增大时刚度增大,系统势能相对相同位移更大,势能更快转化为动能,使得振动速度峰值更高,周期缩短,频率升高,体现在势能曲线更陡峭、相位图轨迹旋转速度加快;而无量纲长度增大对振幅影响较小,体现在相位图振幅几乎无变化.

3.4　三维高度参数与振幅的关系

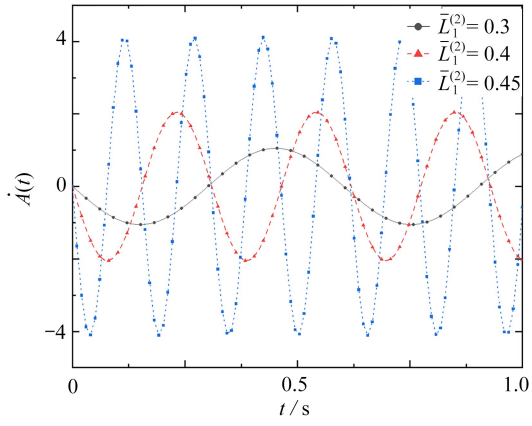
根据图 8 所示不同三维高度参数 $a_1^{(2)}=0.3$,$a_1^{(2)}=0.5$ 和 $a_1^{(2)}=0.8$ 振幅-时间曲线图,可以得出结论:随着高度参数 $a_1^{(2)}$ 的增大,系统的振动频率明显升高,振动周期显著缩短,而振幅几乎保持不变.通过进一步分析图 8(b)—8(d)可以解释这一动力学行为:高度参数 $a_1^{(2)}$ 的增大导致动力学方程中的刚度增大,从而使系统的固有频率升高.同时,在系统能量守恒的条件下,刚度增大会使得系统在相同位移下具有更大的势能,势

能更快转化为动能,使得振动速度峰值更高,周期缩短,频率升高,体现在势能曲线更陡峭,以及相位图轨迹旋转速度加快.



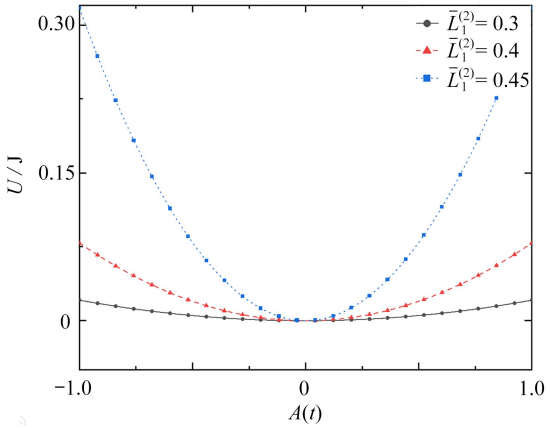
(a) 不同无量纲长度条件下的振幅

(a) Amplitudes under different dimensionless length conditions



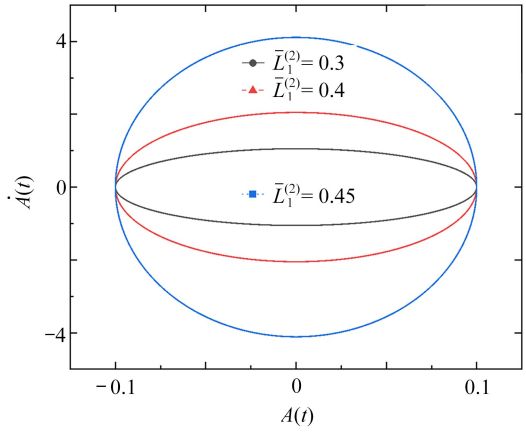
(b) 不同无量纲长度条件下的速度

(b) Velocities under different dimensionless length conditions



(c) 不同无量纲长度条件下的振幅与势能的关系

(c) Relationships between the amplitude and the potential energy under different dimensionless length conditions

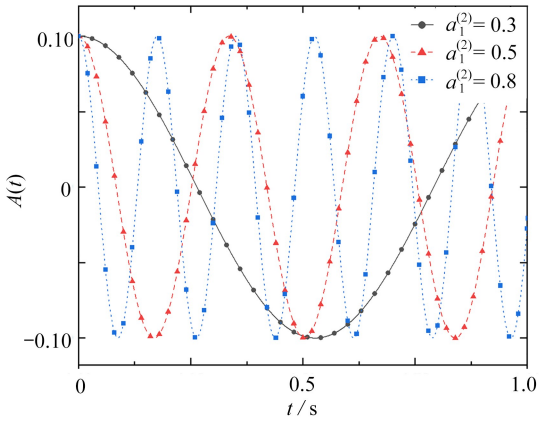


(d) 不同无量纲长度下的相图

(d) Phase portraits under different dimensionless lengths

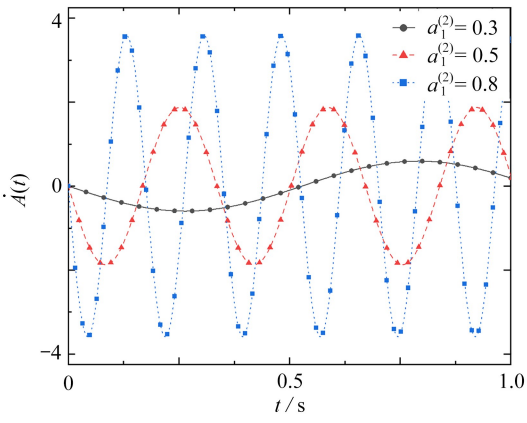
图 7 不同无量纲长度条件下三维屈曲结构的动力学响应

Fig. 7 Dynamic responses of the 3D buckling structure under different dimensionless lengths



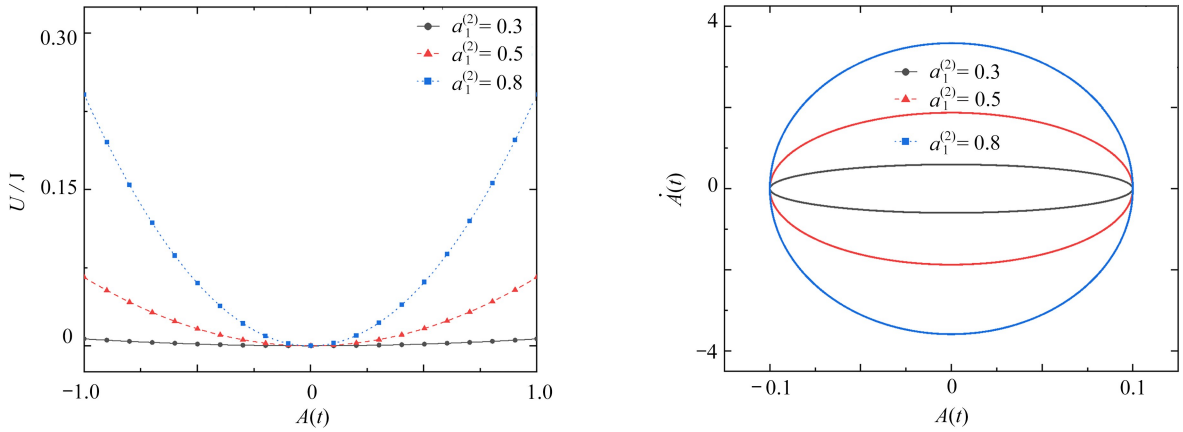
(a) 不同三维高度参数条件下的振幅

(a) Amplitudes under different 3D height parameters



(b) 不同三维高度参数条件下的速度

(b) Velocities under different 3D height parameters



(c) 不同三维高度参数条件下的振幅与势能的关系

(c) Relationships between the amplitude and the potential energy under different 3D height parameters

(d) 不同三维高度参数下的相图

(d) Phase portraits under different 3D height parameters

图 8　不同三维高度参数条件下三维屈曲结构的动力学响应

Fig. 8　Dynamic responses of the 3D buckling structure under different 3D height parameters

4　结　　论

本文对三维屈曲结构的动力学特性进行了分析.首先计算了三维屈曲结构的总能量;通过 Lagrange 运动方程得到其振动控制方程.然后应用辛精细积分方法对其进行求解,并通过数值实验验证了算法的稳定性.主要结论如下:

1) 数值计算表明,辛精细积分方法在求解三维屈曲结构的动力学问题时,可较好地保持系统的辛结构和能量守恒性,保证计算过程的长期稳定性.

2) 屈曲结构的振动特性与结构参数密切相关.随着弹性模量的增加,振动频率显著增加,振动周期基本缩短,振幅变化较小;随着结构无量纲长度和三维高度参数的增加,振动频率显著增加,振动周期变短,振幅基本不变.

参考文献(References):

[1] Bishop D, Pardo F, Bolle C, et al. Silicon micro-machines for fun and profit[J]. *Journal of Low Temperature Physics*, 2012, **169**(5/6): 386-399.

[2] Siegel A C, Phillips S T, Dickey M D, et al. Foldable printed circuit boards on paper substrates[J]. *Advanced Functional Materials*, 2010, **20**(1): 28-35.

[3] Zeng W, Jacobi I, Li S J, et al. Variation in polydispersity in pump-and pressure-driven micro-droplet generators[J]. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2015, **25**(11): 115015.

[4] Cho J H, Keung M D, Verellen N, et al. Nanoscale origami for 3D optics[J]. *Small*, 2011, **7**(14): 1943-1948.

[5] Valentine J, Zhang S, Zentgraf T, et al. Three-dimensional optical metamaterial with a negative refractive index[J]. *Nature*, 2008, **455**(7211): 376-379.

[6] Schaedler T A, Jacobsen A J, Torrents A, et al. Ultralight metallic microlattices[J]. *Science*, 2011, **334**(6058): 962-965.

[7] Jang D, Meza L R, Greer F, et al. Fabrication and deformation of three-dimensional hollow ceramic nanostructures[J]. *Nature Materials*, 2013, **12**(10): 893-898.

[8] Zheng X, Lee H, Weisgraber T H, et al. Ultralight, ultrastiff mechanical metamaterials[J]. *Science*, 2014, **344**(6190): 1373-1377.

[9] Song J Z, Feng X, Huang Y G. Mechanics and thermal management of stretchable inorganic electronics[J].

National Science Review, 2016, **3**(1): 128-143.

[10] Li Y H, Zhang J P, Xing Y F, et al. Thermomechanical analysis of epidermal electronic devices integrated with human skin[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2017, **84**(11): 111004.

[11] Dai X C, Zhou W, Gao T, et al. Three-dimensional mapping and regulation of action potential propagation in nanoelectronics-innervated tissues[J]. *Nature Nanotechnology*, 2016, **11**(9): 776-782.

[12] Tian B, Liu J, Dvir T, et al. Macroporous nanowire nanoelectronic scaffolds for synthetic tissues[J]. *Nature Materials*, 2012, **11**(11): 986-994.

[13] Liu Y, Xu Z, Hwang K C, et al. Postbuckling analyses of frame mesostructures consisting of straight ribbons for mechanically guided three-dimensional assembly[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2019, **475**(2225): 20190012.

[14] Su Y W, Wu J, Fan Z C, et al. Postbuckling analysis and its application to stretchable electronics[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2012, **60**(3): 487-508.

[15] Liu Z, Hu X N, Bo R H, et al. A three-dimensionally architected electronic skin mimicking human mechanosensation[J]. *Science*, 2024, **384**(6699): 987-994.

[16] Lee W, Liu Y, Lee Y, et al. Two-dimensional materials in functional three-dimensional architectures with applications in photodetection and imaging[J]. *Nature Communications*, 2018, **9**: 1417.

[17] 李清禄, 赵煊贺, 张靖华. 梯度多孔金属材料梁的屈曲和屈曲基础上的振动[J]. 计算力学学报, 2024, **41**(3): 415-420. (Li Qinglu, Zhao Xuanhe, Zhang Jinghua. Buckling of beams made of graded porous metal materials and times new vibration on the basis of buckling[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2024, **41**(3): 415-420. (in Chinese))

[18] Noorduin W L, Grinthal A, Mahadevan L, et al. Rationally designed complex, hierarchical microarchitectures [J]. *Science*, 2013, **340**(6134): 832-837.

[19] Zhou J F, Hu K M, Lin H Y, et al. dynamic wrinkling instability of elastic films on viscoelastic substrates[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2024, **91**(8): 081011.

[20] Dong Z Q, Hu K M, Lin H Y, et al. Dynamic behaviors of delaminated nanofilms partly bonded on substrates with sub-nanoscale Van der Waals dynamic boundaries[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2024, **91**(5): 051009.

[21] Truby R L, Lewis J A. Printing soft matter in three dimensions[J]. *Nature*, 2016, **540**(7633): 371-378.

[22] 张博涵, 曹善成, 王博, 等. 基于辛 Runge-Kutta 方法的棋盘形褶皱二维薄膜-基底结构动力学特性研究[J]. 计算力学学报, 2024, **41**(1): 186-193. (Zhang Bohan, Cao Shancheng, Wang Bo, et al. Dynamic behaviour of 2D film-substrate structure with checkerboard regime via Symplectic Runge-Kutta method[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2024, **41**(1): 186-193. (in Chinese))

[23] 冯雪, 陆炳卫, 吴坚, 等. 可延展柔性无机微纳电子器件原理与研究进展[J]. 物理学报, 2014, **63**(1): 9-26. (Feng Xue, Lu Bingwei, Wu Jian, et al. Review on stretchable and flexible inorganic electronics[J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, **63**(1): 9-26. (in Chinese))

[24] 陈呈, 刘翔. 薄膜天线航天器刚-柔-热耦合动力学建模与复合控制研究[J]. 应用数学和力学, 2025, **46**(3): 283-297. (Chen Cheng, Liu Xiang. Rigid-flexible-thermal coupling dynamic modeling and hybrid control of membrane antenna spacecraft[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2025, **46**(3): 283-297. (in Chinese))

[25] 刘晓梅, 周钢, 朱帅. Hamilton 系统下基于相位误差的精细辛算法[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(6): 595-608. (Liu Xiaomei, Zhou Gang, Zhu Shuai. A highly precise symplectic direct integration method based on phase errors for Hamiltonian systems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(6): 595-608. (in Chinese))

[26] 徐明毅, 张勇传. 精细辛算法的高效格式和简化计算[J]. 力学与实践, 2005, **27**(1): 55-57. (Xu Mingyi, Zhang Yongchuan. Efficient format and simple computation of precise symplectic integration method[J]. *Mechanics in Engineering*, 2005, **27**(1): 55-57. (in Chinese))

[27] 鲍四元, 沈峰. 分数阶常微分方程的改进精细积分法[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(12): 1309-1320. (Bao

Siyuan, Shen Feng. An improved precise integration method for fractional ordinary differential equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(12): 1309-1320. (in Chinese))

[28] 姚伟岸, 高强, 谭述君, 等. 精细积分方法的发展与扩展应用[J]. 计算力学学报, 2024, **41**(1): 2-25. (Yao Weian, Gao Qiang, Tan Shujun, et al. The development and extended applications of precise integration method [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2024, **41**(1): 2-25. (in Chinese))

[29] 曾进, 周钢, 孙薇荣. 精细辛算法[J]. 上海交通大学学报, 1997, **31**(9): 31-33. (Zeng Jin, Zhou Gang, Sun Weirong. Precise symplectic algorithm[J]. *Journal of Shanghai Jiao Tong University*, 1997, **31**(9): 31-33. (in Chinese))

[30] 潘耀宗, 赵岩. 基于模态空间时域精细积分的结构动力学参数辨识方法[J]. 应用数学和力学, 2025, **46**(1): 29-39. (Pan Yaozong, Zhao Yan. A structural dynamics parameter identification method based on the modal space time-domain precise integration[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2025, **46**(1): 29-39. (in Chinese))

[31] 李娜. 基于变步长精细积分法的电磁暂态仿真计算方法[J]. 电力学报, 2024, **39**(3): 221-230. (Li Na. Electromagnetic transient simulation calculation method based on variable step size precise integration method[J]. *Journal of Electric Power*, 2024, **39**(3): 221-230. (in Chinese))

[32] Li Y, Avis S J, Chen J, et al. Reconfiguration of multistable 3D ferromagnetic mesostructures guided by energy landscape surveys[J]. *Extreme Mechanics Letters*, 2021, **48**: 101428.

[33] Love A E H. A treatise on the mathematical theory of elasticity[J]. *Nature*, 1920, **105**(2643): 511-512.

[34] 何冬东, 高强, 钟万勰. 求解周期性分段线性系统动态响应的高效数值方法[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(7): 737-749. (He Dongdong, Gao Qiang, Zhong Wanxie. An efficient numerical method for computing dynamic responses of periodic piecewise linear systems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(7): 737-749. (in Chinese))

[35] 谭述君, 周文雅, 吴志刚. 线性定常系统非齐次两点边值问题的扩展精细积分方法[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(11): 1145-1157. (Tan Shujun, Zhou Wenya, Wu Zhigang. An extended precise integration method for solving inhomogeneous two-point boundary value problems of linear time-invariant systems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(11): 1145-1157. (in Chinese))