

含平均曲率项的修正 Allen-Cahn 方程的 高效算子分裂方法^{*}

曹子涵, 吴 哲, 翟术英

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

(本刊编委赵景军推荐)

摘要: 含平均曲率项的修正 Allen-Cahn 方程可有效模拟与曲率相关的物理过程, 但非线性项和梯度模的存在导致难以构造高效求解格式. 该文提出了一种求解此模型的高效数值格式. 基于 Strang 算子分裂方法, 在时间方向上将原方程分解为三个子方程: 非线性方程解析求解; 平均曲率方程采用二阶 Runge-Kutta 方法结合中心差分建立全离散显格式; 热传导方程采用 Crank-Nicolson 格式离散求解, 并构造交替方向隐式(ADI)快速求解策略. 理论分析表明, 构造格式具有二阶收敛精度. 最后, 通过数值算例验证格式收敛阶和有效性.

关键词: 修正 Allen-Cahn 方程; 算子分裂格式; ADI; 收敛性分析

中图分类号: O357.41 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.460107

An Efficient Operator Splitting Method for Modified Allen-Cahn Equations With Mean Curvature Terms

Cao Zihan, Wu Zhe, Zhai Shuying

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University,
Quanzhou, Fujian 362021, P.R. China)

(Recommended by Zhao Jingjun, Member of the Editorial Board of AMM)

Abstract: The modified Allen-Cahn equation with the mean curvature source term can effectively model curvature-driven physical processes. However, the nonlinear term and gradient magnitude make it difficult to design efficient numerical schemes. An efficient numerical scheme was proposed for solving the equation. Based on the Strang operator splitting method, the original equation was discretized in time into three subproblems: the nonlinear equation was solved analytically; the mean curvature equation was discretized using the second-order Runge-Kutta method combined with central differences to establish a fully discrete explicit scheme, while the heat equation was discretized with the Crank-Nicolson method and solved via the alternating direction implicit (ADI) fast scheme. Theoretical analysis shows that, the proposed scheme achieves second order convergence

^{*} 收稿日期: 2025-05-29; 修订日期: 2025-07-30

基金项目: 国家自然科学基金(11701196); 数学与信息网络教育部重点实验室(北京邮电大学)开放课题(KF202606)

作者简介: 曹子涵(2001—), 男, 硕士生(E-mail: caozihan163163@163.com);
吴哲(1991—), 女, 实验师, 硕士(E-mail: WUzhe33@hqu.edu.cn);
翟术英(1986—), 女, 教授, 博士(通信作者. E-mail: zsy@hqu.edu.cn).

引用格式: 曹子涵, 吴哲, 翟术英. 含平均曲率项的修正 Allen-Cahn 方程的高效算子分裂方法[J]. 应用数学和力学, 2026, 47(7): 924-935.

accuracy. Finally, numerical experiments were presented to validate the convergence rate and effectiveness of the scheme.

Key words: modified Allen-Cahn equation; operator splitting scheme; ADI; convergence analysis

0 引言

Allen-Cahn (AC) 方程于 1979 年由 Allen 和 Cahn 提出^[1],用于描述二元合金在等温相分离过程中微观界面的演化.作为相场理论的核心控制方程之一,AC 方程通过双阱势函数驱动的自由能泛函梯度流,揭示了相变过程中的非平衡态动力学机制.得益于其清晰的物理内涵和灵活的数学形式,该方程已广泛应用于材料科学中的界面动力学^[2-3]、晶体生长^[4-5]和相变问题^[6-7],同时也应用于生物学^[8]、图像处理^[9]、地理学^[10]等领域.然而,方程中的非线性项与梯度模算子导致其解析解难以显式表达,数值方法成为研究其动态行为的主要工具.

本文考虑如下具有空间依赖迁移率和平均曲率驱动源项的修正 AC 方程:

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = M(\mathbf{x}) \left(-\frac{F'(u(\mathbf{x}, t))}{\varepsilon^2} + \Delta u(\mathbf{x}, t) - \lambda |\nabla u(\mathbf{x}, t)| \right), \quad \mathbf{x} \in \Omega, t > 0, \quad (1)$$

其中 $\Omega = [L, R]^2 \in \mathbb{R}^2$ 为规则有界区域, $M(\mathbf{x})$ 为空间方向上的可变迁移率, $F(u) = (u^2 - 1)^2/4$ 为双阱势函数, ε 代表界面厚度参数, λ 为曲率驱动参数.该模型由 Wang 等^[11]于 2021 年,通过引入平均曲率驱动源项突破了经典 AC 方程在各向同性界面演化中的局限性,为冰晶融化等曲率主导过程进行了有效模拟.

当 $\lambda = 0$ 时,方程(1)退化为经典的 AC 方程.近年来,针对经典 AC 方程的数值离散格式设计、理论分析及高效算法构造,已有大量研究成果,包括凸分裂格式^[12]、稳定化半隐格式^[13-15]、指数时间差分格式^[16-17]、保持最大模上界原理的数值格式^[18-19]、标量辅助变量格式^[20]、算子分裂方法^[21-23]等.与经典 AC 方程相比,修正 AC 方程(1)的数值研究仍较为有限:如 Yang 等^[24]提出的一阶算子分裂格式因显式处理扩散项需满足 CFL 条件 $\tau \leq ch^2$,对于足够精细的离散来说限制太大,难以适应高分辨率计算需求;Cao 等^[25]采用对称二阶 Strang 分裂与 Crank-Nicolson 离散提升了精度,在对曲率驱动项的非线性处理时进行了物理假设,引入能量守恒平衡条件将梯度模算子变换为解析函数形式.

在本文中,我们旨在使用对称二阶 Strang 算子分裂方法^[21-23,26]设计有效求解修正 AC 方程(1)的数值方法.算子分裂方法是一类求解复杂偏微分方程的有效数值方法,其核心思想是将原问题分解为若干物理性质不同的简单子问题,进而分别采用最优离散策略.由于算子分裂方法具有较好的稳定性和较高计算效率,被广泛应用于求解相场模型.崔晨等^[27]利用算子分裂方法求解守恒型非局部 AC 方程;Qiao 等^[28]提出了一种基于 AC 方程的图像修复算子分裂方法;Weng 等^[29]基于算子分裂方法建立了一种求解非局部三元守恒 AC 模型的线性能量稳定方案;Zhai 等^[30]提出了一种求解非局部三元 AC 方程的算子分裂方案,该方案满足能量耗散性质并保持最大界原理.

本文基于对称二阶 Strang 算子分裂方法^[21-23],将方程(1)分解为非线性双阱势演化方程、曲率驱动源项方程及热传导方程三个子问题:非线性方程为关于时间的常微分方程可解析求解;曲率驱动源项方程采用二阶 Runge-Kutta 方法进行数值求解;热传导方程采用 Crank-Nicolson 格式离散求解,同时进一步构造交替方向隐式(ADI)差分格式^[31]以提高计算效率.

本文主要结构如下:第 1 节给出了基于对称二阶 Strang 算子分裂方法的快速有效数值格式;第 2 节给出了该格式的收敛性分析;第 3 节通过数值算例验证了格式的收敛阶,探究了不同空间迁移率和曲率驱动参数对数值结果的影响,对比了算子分裂格式、向后 Euler 隐式格式与整体 Crank-Nicolson 格式,验证了算子分裂格式的稳定性;第 4 节总结并得到了本研究的主要结论.

1 数值格式

本节考虑齐次 Neumann 边界条件下具有空间依赖迁移率和平均曲率驱动源项的修正 AC 方程,提出了一种基于对称二阶 Strang 算子分裂方法的高效数值格式.

考虑二维区域 $\Omega = [L, R]^2$, 空间步长取 $h = (R - L)/N$, 时间步长取 $\tau = T/K$, N 和 K 分别为空间与时间剖分. 定义空间网格点集如下:

$$\Omega_h = \{ (x_i, y_j) = (L + ih, L + jh), 0 \leq i, j \leq N \},$$

时间节点为 $t_k = k\tau, k = 0, 1, \dots, K$. 设 $u_{i,j}^k$ 和 $u(x_i, y_j, t_k)$ 分别表示 $(x, y, t) = (x_i, y_j, t_k)$ 处的数值解和精确解, $M_{i,j}$ 为节点 (x_i, y_j) 处的迁移率值. 定义离散函数空间为 K_h , 即 $K_h = \{ \Phi \mid \Phi = \{ u_{i,j} \mid 0 \leq i, j \leq N \} \}$.

采用算子分裂方法求解问题, 其基本思想是将原问题分解为若干简单子问题, 简化求解难度. 基于对称二阶 Strang 算子分裂方法^[21], 我们将原方程(1)分解为如下三个物理特性不同的子系统:

$$\begin{cases} u_t = -M(\mathbf{x}) \frac{F'(u)}{\varepsilon^2}, \\ u_t = -\lambda M(\mathbf{x}) |\nabla u|, \\ u_t = M(\mathbf{x}) \Delta u, \end{cases} \quad (2)$$

则方程(1)在时间方向上可通过以下分裂流程对解进行演化逼近:

$$u(\mathbf{x}, t + \tau) = \mathcal{S}_A\left(\frac{\tau}{2}\right) \mathcal{S}_B\left(\frac{\tau}{2}\right) \mathcal{S}_C(\tau) \mathcal{S}_B\left(\frac{\tau}{2}\right) \mathcal{S}_A\left(\frac{\tau}{2}\right) u(\mathbf{x}, t), \quad (3)$$

其中 $\mathcal{S}_A, \mathcal{S}_B, \mathcal{S}_C$ 分别为算法(2)中三个子系统的解算子.

下面分别给出解算子 $\mathcal{S}_A, \mathcal{S}_B$ 和 $\mathcal{S}_C$ 的数值近似形式 $\mathcal{S}_A^{\tau,h}, \mathcal{S}_B^{\tau,h}$ 和 $\mathcal{S}_C^{\tau,h}$.

步骤 1 $\mathcal{S}_A \rightarrow \mathcal{S}_A^{\tau,h}$ 对应于算法(2)中的第一个子问题, 考虑该非线性方程在固定空间节点后为关于时间变量 t 的常微分方程, 在单个时间步长上可得解析解:

$$u_{i,j}^{k+1,1} = \frac{u_{i,j}^k}{\sqrt{(1 - e^{-2\tau M_{i,j}/\varepsilon^2})(u_{i,j}^k)^2 + e^{-2\tau M_{i,j}/\varepsilon^2}}}. \quad (4)$$

步骤 2 $\mathcal{S}_B \rightarrow \mathcal{S}_B^{\tau,h}$ 对应于算法(2)中的第二个子问题, 对曲率驱动源项 $-\lambda M(\mathbf{x}) |\nabla u|$ 采用二阶 Runge-Kutta 方法做离散, 其中梯度项采用中心差分格式进行空间离散, 定义梯度差分算子如下:

$$\begin{aligned} \nabla_x u_{i,j} &= \begin{cases} 0, & i = 0, \\ \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}, & 1 \leq i \leq N-1, \\ 0, & i = N, \end{cases} \\ \nabla_y u_{i,j} &= \begin{cases} 0, & j = 0, \\ \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h}, & 1 \leq j \leq N-1, \\ 0, & j = N, \end{cases} \end{aligned}$$

则有 $|\nabla_h u_{i,j}| = \sqrt{(\nabla_x u_{i,j})^2 + (\nabla_y u_{i,j})^2}$. 取 $\rho(u_{i,j}) = -\lambda M_{i,j} |\nabla_h u_{i,j}|$, 在单个时间步长上显式求解:

$$\begin{cases} u_{i,j}^{k+1,*} = u_{i,j}^{k+1,1} + \tau \rho(u_{i,j}^{k+1,1}), \\ u_{i,j}^{k+1,2} = \frac{1}{2} u_{i,j}^{k+1,1} + \frac{1}{2} u_{i,j}^{k+1,*} + \frac{\tau}{2} \rho(u_{i,j}^{k+1,*}). \end{cases} \quad (5)$$

步骤 3 $\mathcal{S}_C \rightarrow \mathcal{S}_C^{\tau,h}$ 对应于算法(2)中的第三个子问题, 采用 Crank-Nicolson 格式离散, 在单个时间步长上求解, 在空间方向上定义如下中心差分算子:

$$L_x u_{i,j} = \begin{cases} \frac{-2u_{0,j} + 2u_{1,j}}{h^2}, & i = 0, \\ \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2}, & 1 \leq i \leq N-1, \\ \frac{2u_{N-1,j} - 2u_{N,j}}{h^2}, & i = N, \end{cases}$$

$$L_y u_{i,j} = \begin{cases} \frac{-2u_{i,0} + 2u_{i,1}}{h^2}, & j = 0, \\ \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2}, & 1 \leq j \leq N-1, \\ \frac{2u_{i,N-1} - 2u_{i,N}}{h^2}, & j = N. \end{cases}$$

引入高阶扰动项 $\frac{(\tau M_{i,j})^2}{4} L_x L_y (u_{i,j}^{k+1,3} - u_{i,j}^{k+1,2})$ 整理后得到如下 ADI 格式^[32]:

$$\left(1 - \frac{\tau}{2} M_{i,j} L_x\right) \left(1 - \frac{\tau}{2} M_{i,j} L_y\right) u_{i,j}^{k+1,3} = \left(1 + \frac{\tau}{2} M_{i,j} L_x\right) \left(1 + \frac{\tau}{2} M_{i,j} L_y\right) u_{i,j}^{k+1,2}. \quad (6)$$

结合算子分裂格式(3)及各子问题的全离散格式(4)–(6), 得到求解方程(1)的如下时空二阶 Strang 算子分裂格式:

$$\begin{cases} u_{i,j}^{k+1,1} = \frac{u_{i,j}^k}{\sqrt{(1 - \alpha_{i,j})(u_{i,j}^k)^2 + \alpha_{i,j}}}, \\ u_{i,j}^{k+1,*} = u_{i,j}^{k+1,1} + \frac{\tau}{2} \rho(u_{i,j}^{k+1,1}), \\ u_{i,j}^{k+1,2} = \frac{1}{2} u_{i,j}^{k+1,1} + \frac{1}{2} u_{i,j}^{k+1,*} + \frac{\tau}{4} \rho(u_{i,j}^{k+1,*}), \\ \left(1 - \frac{\tau}{2} M_{i,j} L_x\right) \left(1 - \frac{\tau}{2} M_{i,j} L_y\right) u_{i,j}^{k+1,3} = \left(1 + \frac{\tau}{2} M_{i,j} L_x\right) \left(1 + \frac{\tau}{2} M_{i,j} L_y\right) u_{i,j}^{k+1,2}, \\ u_{i,j}^{k+1,**} = u_{i,j}^{k+1,3} + \frac{\tau}{2} \rho(u_{i,j}^{k+1,3}), \\ u_{i,j}^{k+1,4} = \frac{1}{2} u_{i,j}^{k+1,3} + \frac{1}{2} u_{i,j}^{k+1,**} + \frac{\tau}{4} \rho(u_{i,j}^{k+1,**}), \\ u_{i,j}^{k+1} = \frac{u_{i,j}^{k+1,4}}{\sqrt{(1 - \alpha_{i,j})(u_{i,j}^{k+1,4})^2 + \alpha_{i,j}}}, \end{cases} \quad (7)$$

其中 $\rho(u_{i,j}) = -\lambda M_{i,j} |\nabla_h u_{i,j}|$, $\alpha_{i,j} = e^{-\tau M_{i,j}/\varepsilon^2}$.

2 收敛性分析

定义映射 $I^h: L^2(\Omega) \rightarrow K_h$, 即 $I^h u: u(x_i, y_j) \rightarrow u_{i,j}$, 其中 $u \in L^2(\Omega)$ 为满足齐次 Neumann 边界条件的连续函数.

引理 1 设参数 $\nu > 0$, 对任意函数 u, v , 给定函数 $g(u) = \frac{u}{\sqrt{(1 - e^{-\nu})u^2 + e^{-\nu}}}$, 有

$$|g(u) - g(v)| \leq e^{\nu/2} |u - v|.$$

证明 当 $u = v$ 时, 结论显然成立. 下面给出 $u \neq v$ 的证明. 令 $h(u) = (1 - e^{-\nu})u^2 + e^{-\nu}$, 则有

$$\begin{aligned} \frac{g(u) - g(v)}{u - v} &= \frac{\frac{u}{\sqrt{h(u)}} - \frac{v}{\sqrt{h(v)}}}{u - v} = \frac{\frac{u}{\sqrt{h(u)}} - \frac{v}{\sqrt{h(u)}} + \frac{v}{\sqrt{h(u)}} - \frac{v}{\sqrt{h(v)}}}{u - v} = \\ &= \frac{v(\sqrt{h(v)} - \sqrt{h(u)})}{\sqrt{h(u)}h(v)} + \frac{1}{\sqrt{h(u)}} + \frac{1}{\sqrt{h(u)}} + \frac{v(h(v) - h(u))}{(u - v)\sqrt{h(u)}h(v)(\sqrt{h(v)} + \sqrt{h(u)})} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{h(u)}} - \frac{v(1-e^{-v})(v+u)}{\sqrt{h(u)h(v)}(\sqrt{h(v)}+\sqrt{h(u)})} = \\
& \frac{h(v) + \sqrt{h(v)h(u)} - v(1-e^{-v})(v+u)}{\sqrt{h(u)h(v)}(\sqrt{h(v)}+\sqrt{h(u)})} = \\
& \frac{e^{-v} - uv(1-e^{-v}) + \sqrt{h(v)h(u)}}{\sqrt{h(u)h(v)}(\sqrt{h(v)}+\sqrt{h(u)})} = \\
& \frac{e^{-v} - uv(1-e^{-v})}{\sqrt{h(u)h(v)}(\sqrt{h(v)}+\sqrt{h(u)})} + \frac{1}{\sqrt{h(v)}+\sqrt{h(u)}}. \quad (8)
\end{aligned}$$

由于

$$\left| \frac{e^{-v} - uv(1-e^{-v})}{\sqrt{h(u)h(v)}} \right| \leq 1, \quad (9)$$

进一步结合 $h(u) \geq e^{-v}, h(v) \geq e^{-v}$, 可得

$$\begin{aligned}
\left| \frac{g(u) - g(v)}{u - v} \right| & \leq \left| \frac{e^{-v} - uv(1-e^{-v})}{\sqrt{h(u)h(v)}(\sqrt{h(v)}+\sqrt{h(u)})} + \frac{1}{\sqrt{h(v)}+\sqrt{h(u)}} \right| \leq \\
& \frac{2}{\sqrt{h(v)}+\sqrt{h(u)}} \leq \frac{2}{2\sqrt{e^{-v}}} = e^{v/2}. \quad (10)
\end{aligned}$$

因此 $|g(u) - g(v)| \leq e^{v/2} |u - v|$, 从而得出引理 1 的结论. $\square$

引理 2 对任意离散函数 $U = \{u_{i,j} \mid 0 \leq i, j \leq N\}$ 和 $V = \{v_{i,j} \mid 0 \leq i, j \leq N\}$, 有

$$\| \mathcal{S}_B^{\tau,h}(U) - \mathcal{S}_B^{\tau,h}(V) \| \leq \left(1 + \tau L + \frac{\tau^2}{2} L^2 \right) \| U - V \|,$$

其中 L 为 Lipschitz 常数, $M_{\max} = \max M(\mathbf{x})$, $\| \cdot \|$ 表示离散意义下的 L^2 范数.

证明 令 $\bar{U} = \mathcal{S}_B^{\tau,h}(U)$, 可知

$$\begin{cases} U^* = U + \tau \rho(U), \\ \bar{U} = \frac{1}{2} U^* + \frac{1}{2} U + \frac{\tau}{2} \rho(U^*). \end{cases} \quad (11)$$

因此有

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_B^{\tau,h}(U) - \mathcal{S}_B^{\tau,h}(V) &= \bar{U} - \bar{V} = \frac{1}{2} (U^* - V^*) + \frac{1}{2} (U - V) + \frac{\tau}{2} (\rho(U^*) - \rho(V^*)) = \\
& (U - V) + \frac{\tau}{2} (\rho(U) - \rho(V)) + \frac{\tau}{2} (\rho(U^*) - \rho(V^*)). \quad (12)
\end{aligned}$$

记 $\rho(U) = -\lambda M(\mathbf{x}) |\nabla_h U|$, 假设 $\rho(U)$ 满足 Lipschitz 条件, 即 $\|\rho(U) - \rho(V)\| \leq L \|U - V\|$, 则有

$$\begin{aligned}
\| \mathcal{S}_B^{\tau,h}(U) - \mathcal{S}_B^{\tau,h}(V) \| & \leq \| (U - V) \| + \frac{\tau}{2} L \| (U - V) \| + \frac{\tau}{2} L \| (U^* - V^*) \| \leq \\
& \| (U - V) \| + \frac{\tau}{2} L \| (U - V) \| + \frac{\tau}{2} L (\| (U - V) \| + \tau L \| (U - V) \|) = \\
& \left(1 + \tau L + \frac{\tau^2}{2} L^2 \right) \| U - V \|, \quad (13)
\end{aligned}$$

从而得出引理 2 的结论. $\square$

引理 3 对任意离散函数 $U = \{u_{i,j} \mid 0 \leq i, j \leq N\}$, 有

$$\| \mathcal{S}_C^{\tau,h}(U) \| \leq e^{C_2 \tau} \| U \|,$$

其中 C_2 为与迁移率 $M(\mathbf{x})$ 和差分算子谱半径有关的常数.

证明 记 $\mathcal{S}_C^{\tau,h}(U) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}U$, 其中

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{I} - \frac{\tau}{2} M_{i,j} \mathbf{L}_x \right) \left(\mathbf{I} - \frac{\tau}{2} M_{i,j} \mathbf{L}_y \right), \mathbf{B} = \left(\mathbf{I} + \frac{\tau}{2} M_{i,j} \mathbf{L}_x \right) \left(\mathbf{I} + \frac{\tau}{2} M_{i,j} \mathbf{L}_y \right),$$

由于 $\mathbf{L}_x, \mathbf{L}_y$ 为对称半负定差分算子, $M(\mathbf{x}) = \text{diag}(M_{i,j})$ 为正定对角阵, 因此矩阵 $\mathbf{A}$ 可逆. 当时间步长 τ 足够小时, 可得算子范数估计:

$$\|\mathcal{S}_C^{\tau,h}(U)\| = \|\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} U\| \leq \|\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}\| \cdot \|U\| \leq (1 + C_2 \tau) \|U\| \leq e^{C_2 \tau} \|U\|,$$

其中常数 C_2 与 $\|\mathbf{M}(\mathbf{x})\|_\infty$ 及差分算子的最大特征值有关, 从而得出引理 3 的结论. $\square$

引理 4 对于任意的函数 $u \in H^3(0, T; H^2(\Omega))$, 有 $\|I^h \mathcal{S}_B(\tau) u - \mathcal{S}_B^{\tau,h} I^h u\| \leq C_3 \tau (\tau^2 + h^2)$, 其中 C_3 是与 τ 和 h 无关的正常数.

证明 由于式 (4) 是基于时间方向上的二阶 Runge-Kutta 方法与空间方向上的二阶中心差分格式构造而成, 在时间方向的局部截断误差为 $\mathcal{O}(\tau^3)$, 空间方向由于对梯度项 $|\nabla u|$ 采用中心差分离散, 误差为 $\mathcal{O}(h^2)$. 因此, 格式的局部截断误差为

$$\|I^h \mathcal{S}_B(\tau) u - \mathcal{S}_B^{\tau,h} I^h u\| \leq C_3 \tau (\tau^2 + h^2),$$

从而得出引理 4 的结论. $\square$

引理 5 对于任意的函数 $u \in H^3(0, T; L^2(\Omega))$, 有 $\|I^h \mathcal{S}_C(\tau) u - \mathcal{S}_C^{\tau,h} I^h u\| \leq C_4 \tau (\tau^2 + h^2)$, 其中 C_4 是与 τ 和 h 无关的正常数.

证明 由于式 (6) 是基于时间上的二阶 Crank-Nicolson 格式和空间上的二阶中心差分公式得到的. 因此, 可得引理 5 的结论. $\square$

定义 $\hat{u}(x, y, t) = u(x, y, t)$ 为方案 (3) 的精确解, 由此, 可建立如下收敛性结果.

定理 1 设 u^k 和 U^k 分别是方程 (1) 和算法 (7) 在 t_k 处的解, 取 $\eta = (\tau \max M(\mathbf{x})) / \varepsilon^2 \geq 0$, 有

$$\|U^{k+1} - I^h u^{k+1}\| \leq C(\tau^2 + h^2),$$

其中 C 是与 τ 和 h 无关的正常数.

证明 对于 $k \geq 0$, 有

$$\|U^{k+1} - I^h u^{k+1}\| \leq \|U^{k+1} - I^h \hat{u}^{k+1}\| + \|I^h \hat{u}^{k+1} - I^h u^{k+1}\|. \quad (14)$$

由文献 [32] 可得

$$\|I^h \hat{u}^{k+1} - I^h u^{k+1}\| \leq C_5 \tau^2. \quad (15)$$

根据引理 1 结合 $\mathcal{S}_A^{\tau/2,h}$ 为解析算子, 可得

$$\begin{aligned} \|U^{k+1} - I^h \hat{u}^{k+1}\| &= \\ &\| \mathcal{S}_A^{\tau/2,h} \mathcal{S}_B^{\tau/2,h} \mathcal{S}_C^{\tau,h} \mathcal{S}_B^{\tau/2,h} \mathcal{S}_A^{\tau/2,h} U^k - I^h \mathcal{S}_A\left(\frac{\tau}{2}\right) \mathcal{S}_B\left(\frac{\tau}{2}\right) \mathcal{S}_C(\tau) \mathcal{S}_B\left(\frac{\tau}{2}\right) \mathcal{S}_A\left(\frac{\tau}{2}\right) \hat{u}^k \| \leq \\ &\| \mathcal{S}_A^{\tau/2,h} \mathcal{S}_B^{\tau/2,h} \mathcal{S}_C^{\tau,h} \mathcal{S}_B^{\tau/2,h} \mathcal{S}_A^{\tau/2,h} U^k - \mathcal{S}_A^{\tau/2,h} I^h \mathcal{S}_B\left(\frac{\tau}{2}\right) \mathcal{S}_C(\tau) \mathcal{S}_B\left(\frac{\tau}{2}\right) \mathcal{S}_A\left(\frac{\tau}{2}\right) \hat{u}^k \| + \\ &\| \mathcal{S}_A^{\tau/2,h} I^h \mathcal{S}_B\left(\frac{\tau}{2}\right) \mathcal{S}_C(\tau) \mathcal{S}_B\left(\frac{\tau}{2}\right) \mathcal{S}_A\left(\frac{\tau}{2}\right) \hat{u}^k - \\ &I^h \mathcal{S}_A\left(\frac{\tau}{2}\right) \mathcal{S}_B\left(\frac{\tau}{2}\right) \mathcal{S}_C(\tau) \mathcal{S}_B\left(\frac{\tau}{2}\right) \mathcal{S}_A\left(\frac{\tau}{2}\right) \hat{u}^k \| \leq \\ &e^{\eta/2} \| \mathcal{S}_B^{\tau/2,h} \mathcal{S}_C^{\tau,h} \mathcal{S}_B^{\tau/2,h} \mathcal{S}_A^{\tau/2,h} U^k - I^h \mathcal{S}_B\left(\frac{\tau}{2}\right) \mathcal{S}_C(\tau) \mathcal{S}_B\left(\frac{\tau}{2}\right) \mathcal{S}_A\left(\frac{\tau}{2}\right) \hat{u}^k \|. \end{aligned} \quad (16)$$

利用引理 2 和引理 4, 取 $\delta = 1 + \tau L + (\tau^2/2) L^2$ 可得

$$\begin{aligned} &\| \mathcal{S}_B^{\tau/2,h} \mathcal{S}_C^{\tau,h} \mathcal{S}_B^{\tau/2,h} \mathcal{S}_A^{\tau/2,h} U^k - I^h \mathcal{S}_B\left(\frac{\tau}{2}\right) \mathcal{S}_C(\tau) \mathcal{S}_B\left(\frac{\tau}{2}\right) \mathcal{S}_A\left(\frac{\tau}{2}\right) \hat{u}^k \| \leq \\ &\| \mathcal{S}_B^{\tau/2,h} \mathcal{S}_C^{\tau,h} \mathcal{S}_B^{\tau/2,h} \mathcal{S}_A^{\tau/2,h} U^k - \mathcal{S}_B^{\tau/2,h} I^h \mathcal{S}_C(\tau) \mathcal{S}_B\left(\frac{\tau}{2}\right) \mathcal{S}_A\left(\frac{\tau}{2}\right) \hat{u}^k \| + \\ &\| \mathcal{S}_B^{\tau/2,h} I^h \mathcal{S}_C^{\tau,h} \mathcal{S}_B^{\tau/2,h} \mathcal{S}_A^{\tau/2,h} \hat{u}^k - I^h \mathcal{S}_B\left(\frac{\tau}{2}\right) \mathcal{S}_C(\tau) \mathcal{S}_B\left(\frac{\tau}{2}\right) \mathcal{S}_A\left(\frac{\tau}{2}\right) \hat{u}^k \| \leq \end{aligned}$$

$$\delta \| \mathcal{S}_C^{\tau,h} \mathcal{S}_B^{\tau/2,h} \mathcal{S}_A^{\tau/2,h} U^k - I^h \mathcal{S}_C(\tau) \mathcal{S}_B\left(\frac{\tau}{2}\right) \mathcal{S}_A\left(\frac{\tau}{2}\right) \hat{u}^k \| + C_3 \tau (\tau^2 + h^2). \quad (17)$$

进一步结合引理3和引理5,可得

$$\begin{aligned} & \| \mathcal{S}_C^{\tau,h} \mathcal{S}_B^{\tau/2,h} \mathcal{S}_A^{\tau/2,h} U^k - I^h \mathcal{S}_C(\tau) \mathcal{S}_B\left(\frac{\tau}{2}\right) \mathcal{S}_A\left(\frac{\tau}{2}\right) \hat{u}^k \| \leq \\ & \| \mathcal{S}_C^{\tau,h} \mathcal{S}_B^{\tau/2,h} \mathcal{S}_A^{\tau/2,h} U^k - \mathcal{S}_C^{\tau,h} I^h \mathcal{S}_B\left(\frac{\tau}{2}\right) \mathcal{S}_A\left(\frac{\tau}{2}\right) \hat{u}^k \| + \\ & \| \mathcal{S}_C^{\tau,h} I^h \mathcal{S}_B\left(\frac{\tau}{2}\right) \mathcal{S}_A\left(\frac{\tau}{2}\right) \hat{u}^k - I^h \mathcal{S}_C(\tau) \mathcal{S}_B\left(\frac{\tau}{2}\right) \mathcal{S}_A\left(\frac{\tau}{2}\right) \hat{u}^k \| \leq \\ & e^{C_2\tau} \| \mathcal{S}_B^{\tau/2,h} \mathcal{S}_A^{\tau/2,h} U^k - I^h \mathcal{S}_B\left(\frac{\tau}{2}\right) \mathcal{S}_A\left(\frac{\tau}{2}\right) \hat{u}^k \| + C_4 \tau (\tau^2 + h^2). \end{aligned} \quad (18)$$

再由引理2和引理4,可得

$$\begin{aligned} & \| \mathcal{S}_B^{\tau/2,h} \mathcal{S}_A^{\tau/2,h} U^k - I^h \mathcal{S}_B\left(\frac{\tau}{2}\right) \mathcal{S}_A\left(\frac{\tau}{2}\right) \hat{u}^k \| \leq \\ & \| \mathcal{S}_B^{\tau/2,h} \mathcal{S}_A^{\tau/2,h} U^k - \mathcal{S}_B^{\tau/2,h} I^h \mathcal{S}_A\left(\frac{\tau}{2}\right) \hat{u}^k \| + \\ & \| \mathcal{S}_B^{\tau/2,h} I^h \mathcal{S}_A\left(\frac{\tau}{2}\right) \hat{u}^k - I^h \mathcal{S}_B\left(\frac{\tau}{2}\right) \mathcal{S}_A\left(\frac{\tau}{2}\right) \hat{u}^k \| \leq \\ & \delta \| \mathcal{S}_A^{\tau/2,h} U^k - I^h \mathcal{S}_A\left(\frac{\tau}{2}\right) \hat{u}^k \| + C_3 \tau (\tau^2 + h^2). \end{aligned} \quad (19)$$

最后再由引理1,可得

$$\begin{aligned} & \| \mathcal{S}_A^{\tau/2,h} U^k - I^h \mathcal{S}_A\left(\frac{\tau}{2}\right) \hat{u}^k \| \leq \\ & \| \mathcal{S}_A^{\tau/2,h} U^k - \mathcal{S}_A^{\tau/2,h} I^h \hat{u}^k \| + \| \mathcal{S}_A^{\tau/2,h} I^h \hat{u}^k - I^h \mathcal{S}_A\left(\frac{\tau}{2}\right) \hat{u}^k \| \leq \\ & e^{\eta/2} \| U^k - I^h \hat{u}^k \|. \end{aligned} \quad (20)$$

结合式(16)–(20),可得

$$\| U^{k+1} - I^h \hat{u}^{k+1} \| \leq e^\nu \| U^k - I^h \hat{u}^k \| + C_6 \tau (\tau^2 + h^2), \quad (21)$$

其中 $\nu = \eta + C_2\tau + 2\ln\delta$, 常数 $C_6 = e^{C_2\tau}\delta e^{\eta/2}C_3 + \delta e^{\eta/2}C_4 + e^{\eta/2}C_3$.

又由 $\| U^0 - I^h \hat{u}^0 \| = 0$, 故由 Gronwall 不等式可得

$$\| U^{k+1} - I^h \hat{u}^{k+1} \| \leq C (\tau^2 + h^2), \quad (22)$$

合并式(14)、(15)、(22),有

$$\| U^{k+1} - I^h u^{k+1} \| \leq C (\tau^2 + h^2).$$

即证. $\square$

3 数值实验

本节通过三个算例验证数值格式的有效性;算例1分析格式的收敛阶;算例2探究不同空间依赖迁移率 $M(\mathbf{x})$ 与曲率驱动参数 λ 对数值解的影响;算例3验证格式的长时间稳定性.数值实验均在计算域 $\Omega = [-1, 1]^2$ 及齐次 Neumann 边界条件下进行,初值均为

$$u(x, y, 0) = 0.1 [\cos(\pi x) \cos(\pi y) + \cos(2\pi x) \cos(2\pi y)]. \quad (23)$$

3.1 算例1(收敛阶测试)

在本部分,由于方程(1)无精确解,为了验证数值解的精度,我们通过不同步长所得数值解之间的误差来估算数值格式(7)的收敛阶.误差采用 L^∞ 与 L^2 范数定义如下:

$$E_\infty\left(\frac{\tau}{2}, h\right) = \max_{i,j} \left| u_{i,j}^K - u_{i,j}^{2K}\left(\frac{\tau}{2}, h\right) \right|, \quad E_2\left(\frac{\tau}{2}, h\right) = \sqrt{h^2 \sum_{i,j} \left(u_{i,j}^K - u_{i,j}^{2K}\left(\frac{\tau}{2}, h\right) \right)^2},$$

$$E_{\infty}\left(\tau, \frac{h}{2}\right) = \max_{i,j} \left| u_{i,j}^K - u_{2i,2j}^K\left(\tau, \frac{h}{2}\right) \right|, E_2\left(\tau, \frac{h}{2}\right) = \sqrt{h^2 \sum_{i,j} \left(u_{i,j}^K - u_{2i,2j}^K\left(\tau, \frac{h}{2}\right) \right)^2},$$

其中, $\{u_{i,j}^K(\tau, h) \mid 0 \leq i, j \leq N\}$ 表示时间步长为 $\tau = T/K$ 和空间步长为 $h = (R - L)/N$ 时的数值解. 在收敛阶测试中, 我们取如下参数:

$$M(\mathbf{x}) \equiv 1, \varepsilon = 0.2, T = 0.5, \lambda = 0.$$

首先, 表 1 给出了当时间剖分固定为 $K = 10^4$, 空间剖分分别为 $N = 40, 80, 160, 320$ 时的误差和收敛阶. 结果表明, 随着网格剖分的细化, 误差逐渐减小, 并且空间收敛精度逐渐接近预期的二阶精度.

表 1 空间误差和收敛阶

Table 1 Spatial errors and convergence orders

N	E_{∞}	R_{rate}	E_2	R_{rate}
40	5.02E-5	—	4.59E-5	—
80	1.32E-5	1.93	1.28E-5	1.84
160	3.33E-6	1.98	3.29E-6	1.97
320	8.36E-7	2.00	8.22E-7	2.00

表 2 对比了采用算子分裂格式(7)、向后 Euler 全隐式格式以及整体 Crank-Nicolson 隐格式的数值结果. 固定空间剖分 $N = 500$, 时间剖分为 $K = 200, 400, 800, 1\,600$ 时的 L^2 范数误差、收敛阶以及 CPU 计算时间. 从表中数据可以观察到, 算子分裂格式在时间方向上随着网格剖分的细化, 误差逐渐减小, 收敛精度逐渐接近预期的二阶精度. 相比全隐式格式, 算子分裂格式在保证更高精度的同时具有更高的计算效率; 与整体 Crank-Nicolson 隐格式相比, 算子分裂格式具有更高的计算效率优势.

表 2 时间方向 L^2 范数误差、收敛阶以及 CPU 计算时间Table 2 Temporal L^2 norm errors, convergence orders and CPU computation times

K	operator splitting scheme			backward Euler implicit method			implicit method		
	E_2	R_{rate}	t_{CPU}/s	E_2	R_{rate}	t_{CPU}/s	E_2	R_{rate}	t_{CPU}/s
200	3.63E-4	—	2.35	2.25E-3	—	258.93	2.01E-4	—	359.82
400	9.35E-5	1.96	4.66	1.59E-3	0.50	429.28	5.06E-5	1.99	667.97
800	2.36E-5	1.99	9.16	9.56E-4	0.73	1 482.47	1.27E-5	1.99	1 170.62
1 600	5.91E-6	2.00	18.64	5.26E-4	0.86	2 738.52	3.17E-6	2.00	2 182.16

3.2 算例 2(不同空间迁移率及曲率驱动参数对数值结果的影响)

为探究空间依赖迁移率 $M(\mathbf{x})$ 与曲率驱动参数 λ 对数值解演化规律的影响, 考虑如图 1 所示的三组迁移率函数.

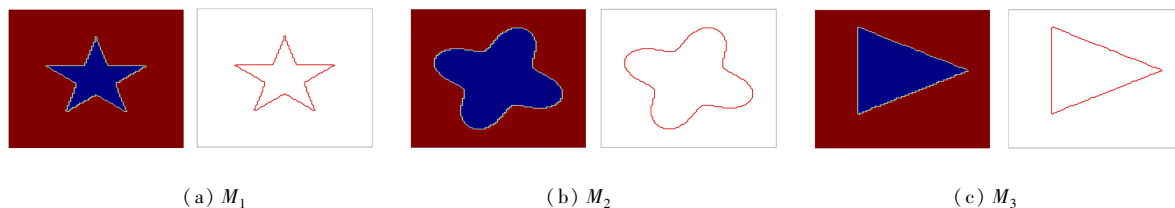


图 1 不同的空间迁移率

Fig. 1 Different spatially dependent mobilities

$$M_1(x, y) = \begin{cases} 0, & |x| \leq 1 - 2y, 1/2 \leq y \leq 1/2, \\ 1, & \text{others,} \end{cases}$$

$$M_2(x, y) = \begin{cases} 0, & \sqrt{x^2 + y^2} \leq 0.6 \left(1 + 0.3 \sin \left(4 \arctan \left(\frac{y}{x + 10^{-10}} \right) \right) \right), \\ 1, & \text{others,} \end{cases}$$

$$M_3(x, y) = \begin{cases} 0, & \sqrt{x^2 + y^2} \leq 0.6 (1 - 0.5 \cos(5 \arctan(2(y, x))))), \\ 1, & \text{others,} \end{cases}$$

其中 M_1 描述五棱星形空间迁移率, M_2 对应四叶形空间迁移率, M_3 描述三角形空间迁移率.

数值计算中固定空间步长 $h = 0.02$, 时间步长 $\tau = 0.001$, 选取参数 $\varepsilon = 0.05$, 分别采用不同空间依赖迁移率 $M(\mathbf{x})$ 和曲率驱动参数 λ 进行求解的数值结果, 分别如图 2—4 所示, 包括当 $\lambda = 0$ 时方程 (1) 简化为经典的 AC 方程时的数值解图像.

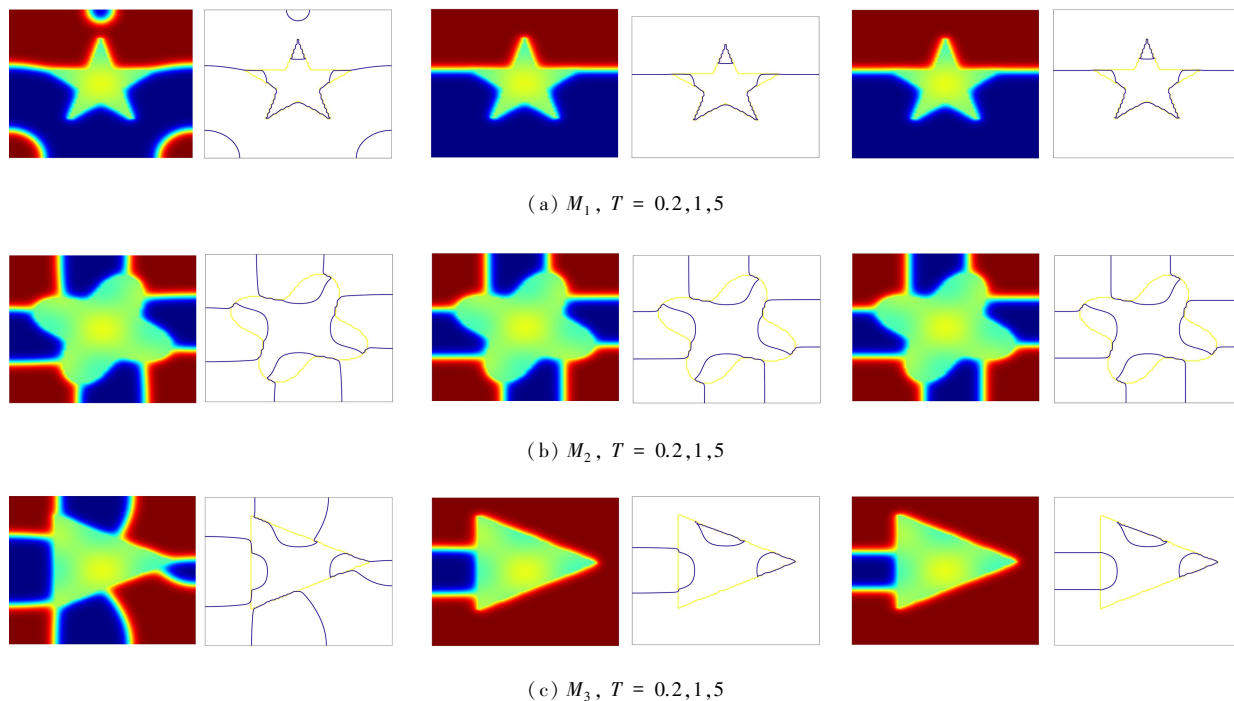


图 2 $\lambda = 0$ 时, 不同时刻数值解和对应等高线图

Fig. 2 The numerical solution results for $\lambda = 0$ and the corresponding contour plots

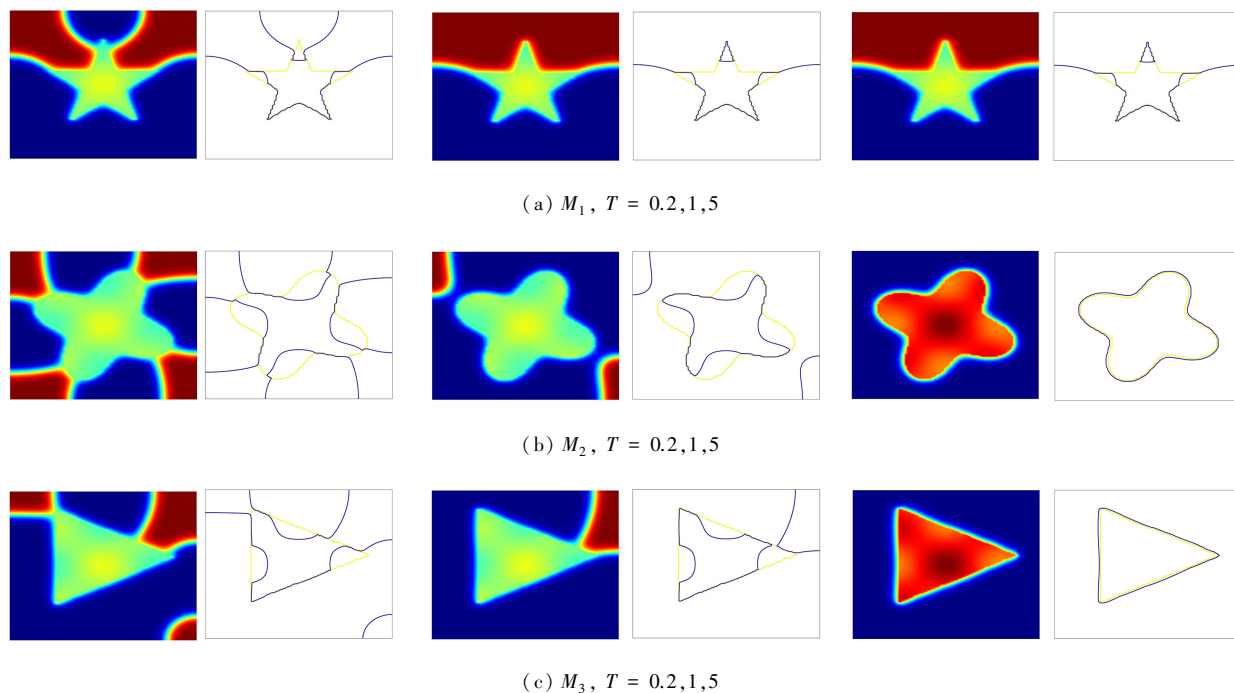


图 3 $\lambda = 1$ 时, 不同时刻数值解和对应等高线图

Fig. 3 The numerical solution results for $\lambda = 1$ and the corresponding contour plots

数值解图像表明修正 AC 方程 (1) 能够精确捕捉空间依赖迁移率 $M(\mathbf{x})$ 界面的几何特征. 当曲率驱动参

数 $\lambda > 0$ 时,相界面演化呈现界面迁移速率与 λ 呈线性正相关,迁移速率随 λ 增大而增强,能够更快地到达稳态且获得更好的数值结果。

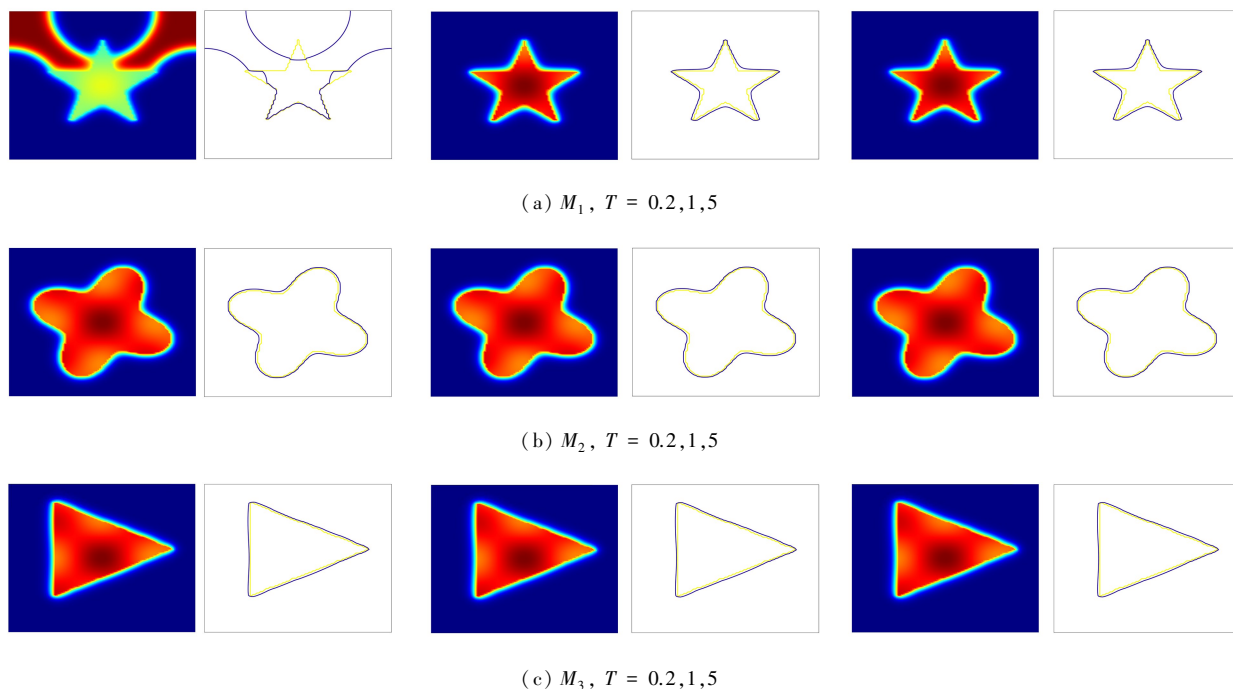


图 4 $\lambda = 1.5$ 时,不同时刻数值解和对应等高线图

Fig. 4 The numerical solution results for $\lambda = 1.5$ and the corresponding contour plots

3.3 算例 3(算子分裂格式稳定性)

本算例旨在验证算子分裂格式(7)在不同时间步长下长时间演化过程中的稳定性表现.固定空间步长 $h = 0.02, \lambda = 20$, 迁移率取算例 2 中的 $M_1(x, y)$, 其他参数与算例 2 相同.为观察不同时间步长对界面变化结果的影响,分别取 $\tau = 0.01, \tau = 0.1, \tau = 1$ 演化至时刻 $T = 100$.图 5 展示了在不同的时间步长 $\tau = 0.01, 0.1, 1$ 下算子分裂格式(7)演化至时刻 $T = 100$ 的数值解.实验结果表明,算子分裂格式(7),即使时间步长 $\tau = 1$ 时,仍然可以保持良好的数值稳定性。

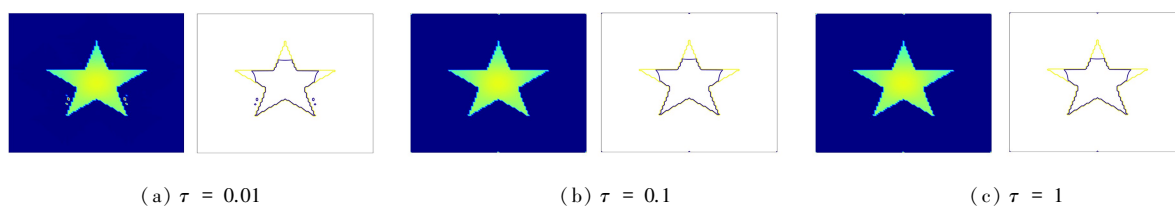


图 5 $\tau = 0.01, 0.1, 1$ 时, $T = 100$ 的数值解与等高线图

Fig. 5 Numerical solutions and contour plots at $T = 100$ for $\tau = 0.01, 0.1, 1$

4 结 论

本文提出了一种求解二维修正 AC 模型的快速显式算子分裂格式.该格式在每一个时间步上,只需求解两次解析解,两次 Runge-Kutta 格式和两个一维线性系统.理论分析表明,所构造的格式在时间和空间方向上均具有二阶收敛精度.数值结果不仅验证了该格式的有效性,也展示了当修正 AC 方程具有较大曲率驱动参数 λ 时,能有效模拟曲率相关的界面运动。

参考文献(References):

- [1] Allen S M, Cahn J W. A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening[J]. *Acta Metallurgica*, 1979, **27**(6): 1085-1095.
- [2] Yue P, Feng J J, Liu C, et al. Diffuse-interface simulations of drop coalescence and retraction in viscoelastic fluids[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2005, **129**(3): 163-176.
- [3] Kim J. Phase-field models for multi-component fluid flows[J]. *Communications in Computational Physics*, 2012, **12**(3): 613-661.
- [4] Kobayashi R. Modeling and numerical simulations of dendritic crystal growth[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1993, **63**(3/4): 410-423.
- [5] Li Y, Lee H G, Kim J. A fast, robust, and accurate operator splitting method for phase-field simulations of crystal growth[J]. *Journal of Crystal Growth*, 2011, **321**(1): 176-182.
- [6] Wheeler A A, Boettinger W J, McFadden G B. Phase-field model for isothermal phase transitions in binary alloys[J]. *Physical Review A*, 1992, **45**(10): 7424-7439.
- [7] Elliott C M, Stinner B. Computation of two-phase biomembranes with phase dependent material parameters using surface finite elements[J]. *Communications in Computational Physics*, 2013, **13**(2): 325-360.
- [8] Cohen D S, Murray J D. A generalized diffusion model for growth and dispersal in a population[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 1981, **12**(2): 237-249.
- [9] Wang J, Li Y, Choi Y, et al. Fast and accurate smoothing method using a modified Allen-Cahn equation[J]. *Computer-Aided Design*, 2020, **120**: 102804.
- [10] Hazewinkel M, Kaashoek J F, Leynse B. Pattern formation for a one dimensional evolution equation based on thom's river basin model[M]//Kilmister C W. *Disequilibrium and Self-Organisation*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1986: 23-46.
- [11] Wang J, Lee C, Lee H G, et al. Phase-field modeling and numerical simulation for ice melting[J]. *Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications*, 2021, **14**(2): 540-558.
- [12] Xu J, Li Y, Wu S, et al. On the stability and accuracy of partially and fully implicit schemes for phase field modeling[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, **345**: 826-853.
- [13] Feng X, Tang T, Yang J. Stabilized Crank-Nicolson/Adams-Bashforth schemes for phase field models[J]. *East Asian Journal on Applied Mathematics*, 2013, **3**(1): 59-80.
- [14] He Y, Liu Y, Tang T. On large time-stepping methods for the Cahn-Hilliard equation[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2007, **57**(5/6/7): 616-628.
- [15] Shen J, Yang X. Numerical approximations of Allen-Cahn and Cahn-Hilliard equations[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2010, **28**(4): 1669-1691.
- [16] Hochbruck M, Ostermann A. Explicit exponential Runge-Kutta methods for semilinear parabolic problems[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2005, **43**(3): 1069-1090.
- [17] Hochbruck M, Ostermann A. Exponential integrators[J]. *Acta Numerica*, 2010, **19**: 209-286.
- [18] Tang T, Yang J. Implicit-explicit scheme for the Allen-Cahn equation preserves the maximum principle[J]. *Journal of Computational Mathematics*, 2025, **34**(5): 451-461.
- [19] Shen J, Tang T, Yang J. On the maximum principle preserving schemes for the generalized Allen-Cahn equation[J]. *Communications in Mathematical Sciences*, 2016, **14**(6): 1517-1534.
- [20] Shen J, Xu J, Yang J. A new class of efficient and robust energy stable schemes for gradient flows[J]. *SIAM Review*, 2019, **61**(3): 474-506.
- [21] Strang G. On the construction and comparison of difference schemes[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1968, **5**(3): 506-517.
- [22] Zhai S, Wang D, Weng Z, et al. Error analysis and numerical simulations of strang splitting method for space

- fractional nonlinear Schrödinger equation[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2019, **81**(2): 965-989.
- [23] Zhai S, Weng Z, Yang Y. A high order operator splitting method based on spectral deferred correction for the nonlocal viscous Cahn-Hilliard equation[J]. *Journal of Computational Physics*, 2021, **446**: 110636.
- [24] Yang J, Kang S, Kwak S, et al. The Allen-Cahn equation with a space-dependent mobility and a source term for general motion by mean curvature[J]. *Journal of Computational Science*, 2024, **77**: 102252.
- [25] Cao Z, Weng Z, Zhai S. An effective operator splitting scheme for general motion by mean curvature using a modified Allen-Cahn equation[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2025, **163**: 109472.
- [26] Zhai S, Weng Z, Feng X, et al. Stability and error estimate of the operator splitting method for the phase field crystal equation[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2021, **86**: 8.
- [27] 崔晨, 吴哲, 翟术英. 非局部守恒 Allen-Cahn 方程的高效算子分裂格式[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2022, **43**(5): 698-704. (Cui Chen, Wu Zhe, Zhai Shuying. Effective operator splitting scheme for conservative nonlocal Allen-Cahn equation[J]. *Journal of Huaqiao University (Natural Science)*, 2022, **43**(5): 698-704. (in Chinese))
- [28] Qiao Y Y, Zhai S Y, Feng X L. An operator splitting method for image inpainting based on the Allen-Cahn equation[J]. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2018, **35**(6): 722-732.
- [29] Weng Z, Zhai S, Dai W, et al. Stability and error estimates of Strang splitting method for the nonlocal ternary conservative Allen-Cahn model[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2024, **441**: 115668.
- [30] Zhai S, Weng Z, Mo Y, et al. Energy dissipation and maximum bound principle preserving scheme for solving a nonlocal ternary Allen-Cahn model[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2024, **155**: 150-164.
- [31] 吴龙渊, 汪精英, 翟术英. 求解二维 Allen-Cahn 方程的两种 ADI 格式[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2019, **40**(3): 412-420. (Wu Longyuan, Wang Jingying, Zhai Shuying. Two ADI schemes for solving two-dimensional Allen-Cahn equations[J]. *Journal of Huaqiao University (Natural Science)*, 2019, **40**(3): 412-420. (in Chinese))
- [32] D'Yakonov Y G. Difference schemes with a separable operator for general second order parabolic equations with variable coefficients[J]. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1964, **4**(2): 92-110.
- [33] Du Q, Ju L, Li X, et al. Stabilized linear semi-implicit schemes for the nonlocal Cahn-Hilliard equation[J]. *Journal of Computational Physics*, 2018, **363**: 39-54.