

基于积分变换方法的含热源海底 单层管瞬态导热研究^{*}

朱晓青¹, 何杨烨¹, 苏 健²

(1. 中国石油大学(北京)安全与海洋工程学院, 北京 102200;
2. 巴西里约热内卢联邦大学核工程系, 巴西 里约热内卢 24941-927)

摘要: 海洋输送高温油气的管道受管内流体对流换热及内部热源的影响,其管体温度升高,热量也会从管壁面传递到外部低温海水中,在管道径向及轴向形成温度梯度.本研究采用积分变换方法,对非齐次边界条件下且含热源的轴对称单层管进行二维瞬态热传导分析.首先,将二维瞬态温度表示为含热源的轴对称一维稳态、滤波齐次二维稳态及滤波均质二维瞬态温度的组合,并对其进行无量纲处理.其次,依据分离变量方法确定径向、轴向的积分变换对,对热传导控制方程及边界条件、初始条件进行积分变换处理,分离瞬态温度的时间和空间依赖性,得到关于时间的一阶线性常微分方程组.最后,通过积分变换对的逆变换确定二维瞬态温度分布的理论解,并将二维瞬态温度分布与稳态温度分布结果对比验证.在此基础上,研究不同内外 Biot 数 (Bi) 组合、不同热源强度 G 对管道温度分布的影响.结果表明:内外 Biot 数组合相同且热源强度大的,管道时空维度上的温度梯度及温度值均较大;热源强度相同但内外 Biot 数组合不同时,时空维度上的温度梯度和整体温度分布存在差异;在径向方向和时间维度上,不同内外 Biot 数组合的温度分布曲线存在交点,其温度梯度和温度值相对大小在该点发生变化,但在轴向方向上没有出现该现象.

关键词: 瞬态热传导; 轴对称单层管; 积分变换; 非齐次边界条件

中图分类号: O241.82 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.460114

Transient Heat Conduction Analysis on Subsea Single-Layer Pipes Under Internal Heat Sources With the Integral Transform Method

Zhu Xiaoqing¹, He Yangye¹, Su Jian²

(1. College of Safety and Ocean Engineering, China University of Petroleum (Beijing),
Beijing 102200, P.R. China;
2. Department of Nuclear Engineering, Federal University of Rio de Janeiro,
Rio de Janeiro 24941-927, Brazil)

Abstract: The pipeline for marine transportation of high-temperature oil and gas is affected by the convective heat transfer of the fluid inside the pipe and the internal heat source. With the rise of the pipe body tempera-

* 收稿日期: 2025-06-04; 修订日期: 2025-07-30

基金项目: 中国石油大学(北京)基金资助项目(2462023QNXZ007)

作者简介: 朱晓青(1997—),女,博士生(E-mail: xiaoqing_zhucup@163.com);

何杨烨(1991—),女,副教授,博士,博士生导师(通信作者, E-mail: yangyehe@cup.edu.cn).

引用格式: 朱晓青,何杨烨,苏健. 基于积分变换方法的含热源海底单层管瞬态导热研究[J]. 应用数学和力学, 2026, 47(8): 1045-1059.

ture, the heat will also transfer from the pipe wall surface to the external low-temperature seawater, to form a temperature gradient in the pipeline radial and axial direction. The 2D transient heat transfer in an axisymmetric single-layer pipe with non-homogeneous boundary conditions and an internal heat source was analyzed with the integral transform technique. First, the 2D transient temperature was expressed as a combination of axisymmetric 1D steady-state temperature with a heat source, a filtered 2D steady-state temperature, and a filtered homogeneous 2D transient temperature, and was non-dimensionalized. Next, based on the method of separating variables to determine the integral transform pairs in radial and axial directions, the heat conduction control equations and boundary conditions plus initial conditions were subjected to the integral transform process to separate the time and space dependence of transient temperatures, and the 1st-order linear ordinary differential equations with respect to time were obtained. Finally, the theoretical solution of the 2D transient temperature distribution was obtained through the inverse transformation of the integral transform pair, and the 2D transient temperature distribution was verified through comparison of the results with the steady-state temperature distribution. On this basis, the effects of different combinations of inner and outer Biot numbers and different heat source strengths G on the temperature distributions of pipes were investigated. The results show that, the temperature gradients and temperature values in the spatial and temporal dimensions of the pipe are larger for the same combination of internal and external Biot numbers and for the high intensity of the heat source. There are differences in the temperature gradient and overall temperature distribution in the spatial and temporal dimensions when the intensity of the heat source is the same but the combinations of the internal and external Biot numbers are different. In the radial direction and the temporal dimension, the temperature distribution curves of different combinations of inner and outer Biot numbers have an intersection point where the temperature gradient and the relative magnitude of the temperature values change, but this phenomenon does not occur in the axial direction.

Key words: transient heat conduction; axisymmetric single-layer pipe; integral transform; non-homogeneous boundary condition

0 引言

海洋管道是连接海上油气田与陆上终端的重要纽带,承担着输送油气的重任.在低温高压的深海环境中,管道内流体温度的降低,可能导致蜡结晶和水合物的生成,引发管道堵塞影响油气的正常输送.空心圆柱体形式是管道常用工程结构,其热传导问题涉及多个物理机制,包括热传导、热对流以及内部热源的影响.在实际工程应用中,管道内部可能受到外部热源的加热和冷却作用,同时管道内部也可能存在均匀或非均匀的热源.此外,管道的几何结构、材料属性以及边界条件的复杂性进一步增加了问题的求解难度.研究空心圆柱体径向、轴向的二维瞬态热传导问题,准确预测分析管道的温度分布,有助于优化管道的保温设计和热管理措施,减少热损失或避免热量积聚,提高能源利用效率,并为多层复合管道传热分析提供一定的指导和参考.

在热传导研究领域,国内外学者在管道的传热分析方面取得了一定的研究成果.Azadi 等^[1]采用 Hermitian 超有限元方法对具有温度依赖性材料的厚壁功能梯度(FGM)圆柱体进行了非线性瞬态传热和热弹性应力分析.Dai 等^[2]对具有热障涂层的双层圆筒在径向对称力学和热载荷作用下的热黏弹性动力学行为进行了研究,并采用有限差分法(FDM)、Newmark 法(NM)和迭代法求解瞬态传热问题.张进等^[3]采用传热理论与有限元仿真分析相结合的方法,研究了停输状态下深水相变材料夹层管道的传热特性.吴峰^[4]采用有限体积法对周期性地表温度边界条件下埋地管道传热规律进行了数值模拟,对比分析了有、无保温层,对埋地管道传热规律的影响.闫思江等^[5]利用 ANSYS 有限元分析软件对供热管道和保温层进行了热损失分析,并结合热传导的基本理论,比较了二维有限元分析结果、理论值二者之间的差异.许丹等^[6]针对埋地热油管道停输过程进行研究,结合有限差分法和有限体积法建立埋地热油管道正常运行及停输过程的非稳态传热模型,考虑了停输过程原油凝固潜热对温降的影响,数值模拟了埋地热油管道停输温降过程.刘学治^[7]对海底输油管道的稳态及非稳态传热问题及海底输油管道稳定运行时周围海泥温度场进行了模拟计算,在不同工况与环境的条件下,当某些参数发生变化时,模拟出管道周围海泥温度场的分布情况.刘金梅等^[8]针对高温输

气管道的结构特点和输送的介质特征,考虑到静压和温度的耦合作用,根据有限元理论,构建了基于稳态热传导的输气管道热-结构耦合模型,分析并揭示了内外管壁温度不同条件下结构性能的变化规律.潘红良^[9]采用有限元分析方法对伴热管道的伴热效果进行了研究,得到了伴热管道的温度分布.崔晓龙等^[10]根据热平衡原理和半无限大区域温度分布公式,利用有限差分法探讨了在外界非稳态环境影响下埋地管道温度场的变化规律,给出了埋地管道温度场分布.上述学者们采用数值模拟方法分析了空心圆柱体结构在不同环境下的温度分布,为管道热传导分析研究提供了思路.

在管道热传导的研究中,积分变换技术被广泛应用于处理各种复杂的边界条件和非稳态问题.Zare 等^[11]利用分离变量法,得到了基于 Bessel 函数的新级数并展开热源函数,解决了具有一般热源且处于两个表面的非均匀混合边界条件下的无限长空心圆柱瞬态传导传热问题.Napar'in^[12]采用 Fourier 和 Hankel 变换,解决了在第二类边界条件下,产热源沿着外表面的螺旋线运动而引起的空心圆柱内的温度分布问题.Yu 等^[13]通过引入一定的人工附加热源函数,定义了相应的拟稳态解,将温度场表示为一致收敛的级数解形式,采用积分变换技术,得到了有限长空心圆柱体在时变体积热源和边界指定热流影响下的非稳态温度分布.Ozisik^[14]采用积分变换技术处理均值边界条件下的,考虑径向、轴向耦合下的固体圆柱体的瞬态热传导问题,得到了瞬态温度分布的解析解.Li 和 Lai^[15]运用 Laplace 变换方法,推导出一般边界条件下的双层复合空心圆柱热传导的经典解析解,并与 Jaeger 的恒温边界条件解对比,验证了解法的正确性.Nekoo^[16]针对有限长空心圆柱扇形区域的热传导问题,应用广义有限 Hankel 变换、周期 Fourier、Fourier 和 Laplace 变换方法处理带有非齐次边界条件的温度控制的非齐次偏微分方程.Can 和 Keles^[17]考虑了一种实用的空心圆柱和球形功能梯度材料(FGM)的联合方法,采用非 Fourier 双曲热传导方法,将问题转化为 Laplace 域形式及互补函数法(CFM)进行求解,并通过 Laplace 逆变换,得到了温度和热通量的瞬态动力学响应.Abouelregal^[18]基于分数阶热传导方程广义热弹性理论的数学模型,通过 Laplace 变换方法处理了内表面无牵引力且受到热和机械冲击的受到恒定热流无限长空心圆柱,并利用 Fourier 展开技术进行数值反演变换,得到温度分布的解析解.Su 和 de Castro^[19]采用改进的集总差分模型和广义积分变换技术,对圆管内层流的共轭热传递问题进行了精确求解,得到温度分布的解析解.学者们采用积分变换技术,研究了空心圆柱体的导热问题,并给出温度分布的解析解.除此之外,积分变换技术在处理振动问题时,也有其独特的优势,An 和 Su^[20-21]利用广义积分变换技术(GITT)消除了不同边界条件下梁受迫振动方程的空间变量,得到关于时间的二阶常微分方程组.

尽管有限元法在处理复杂结构和材料中具有优势,但依赖软件模拟的研究对计算资源和效率要求较高,尤其是在处理二维瞬态问题时.相比之下,理论解不仅能够提供精确的解析表达式,揭示物理过程的关键机制,还可以作为数值模拟的验证基准.现有研究多集中在简化模型或特定边界条件下的解析方法,而对于包含非均质边界条件和内部热源的情况,理论解的研究尚需补充.本文旨在针对单层管道的二维瞬态热传导问题,提出一种系统的理论解法.通过将二维瞬态温度解滤波为一维稳态、二维稳态及二维瞬态的组合,实现复杂热传导问题的简化.基于经典热传导理论,采用积分变换处理滤波后的二维稳态、瞬态热传导问题,实现空间与时间变量的解耦,将复杂问题逐步简化为可求解的形式,最终确定管道径向/轴向温度分布,并通过与简化模型(一维稳态、二维稳态)的温度分布对比,验证二维瞬态理论解的准确性.

1 数学模型

考虑含热源轴对称单层管瞬态二维传热问题,单层管长为 L ,内半径为 r_i 和外半径为 r_o .在圆柱坐标系中,含热源单层的二维瞬态导热控制方程为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{g}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad r_i < r < r_o, \quad 0 < z < L, \quad t > 0, \quad (1)$$

其中,温度场 $T(r, z, t)$ 为空间 r, z 和时间 t 的函数; $\alpha = k/(\rho c)$ 为热扩散率, ρ 为管材密度, c 为比热容; k 为导热系数; g 为内部体积热源.

管道内外表面均有对流传热,管左端侧温度恒定,右端侧绝热,边界条件为

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} = h_i(T_f - T), \quad r = r_i, \quad (2)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} = h_{\infty} (T - T_{\infty}), \quad r = r_o, \quad (3)$$

$$T = T_0, \quad z = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad z = L. \quad (5)$$

初始温度条件为

$$T(r, z, 0) = T_i(r, z), \quad t = 0, \quad (6)$$

其中, h_f, h_{∞} 分别为内外表面的对流传热系数; T_0 为单层管左侧的恒定温度; T_f, T_{∞} 分别为管内流体和管道外流体的温度.

为获取单层管瞬态温度场的解, 将瞬态温度场分为含热源的二维稳态解 $T_s(r, z)$ 和滤波二维瞬态解 $T^*(r, z, t)$ 的组合:

$$T(r, z, t) = T^*(r, z, t) + T_s(r, z), \quad (7)$$

其中, $T_s(r, z) = T_{s1}(r) + T_{s2}(r, z)$, $T_{s1}(r)$ 表示含热源的一维稳态解, $T_{s2}(r, z)$ 表示不含热源的滤波二维稳态解. 图 1 为含内部热源且内外表面存在对流的单层管.

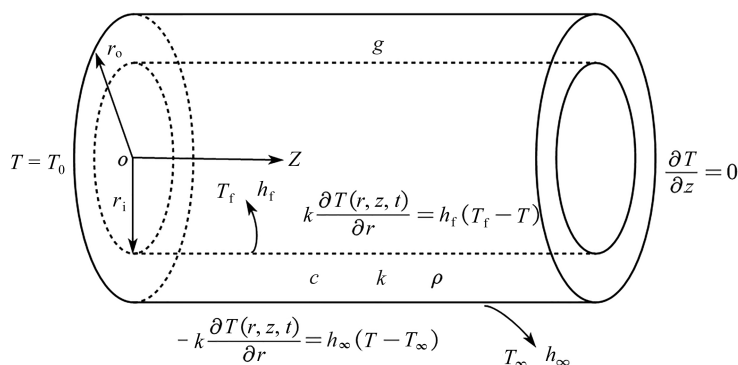


图 1 含内部热源且内外表面存在对流的单层管

Fig. 1 The single-layer pipe with internal heat source and subjected to convection at both surfaces

1.1 无量纲二维瞬态控制方程

引入无量纲变量和参数:

$$\theta = \frac{T - T_{\infty}}{T_f - T_{\infty}}, \quad \eta = \frac{r}{r_i}, \quad \xi = \frac{z}{L}, \quad \Gamma = \frac{L}{r_i}, \quad \gamma = \frac{r_o}{r_i}, \quad \tau = \frac{t\alpha}{r_i^2}, \quad Bi_1 = \frac{h_f r_i}{k}, \quad Bi_2 = \frac{h_{\infty} r_i}{k}, \quad (8)$$

其中, θ 为无量纲温度; η 为无量纲半径; ξ 为无量纲轴向坐标; Γ 为管长与管道内半径之比; γ 为单层管外半径与内半径之比; τ 为无量纲时间项; Bi_1, Bi_2 分别为单层管内外层的 Biot 数, 其反映了流体和管壁之间的对流换热强度相对管壁内部热传导的大小, 直接影响管道内部的温度分布和热传导效率. 无量纲二维瞬态热传导控制方程为

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\Gamma^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + G = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad 1 < \eta < \gamma. \quad (9)$$

无量纲边界条件为

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = Bi_1 (1 - \theta), \quad \eta = 1, \quad (10)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = Bi_2 \theta, \quad \eta = \gamma, \quad (11)$$

$$\theta = \theta_0, \quad \xi = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0, \quad \xi = 1. \quad (13)$$

无量纲初始条件为

$$\theta(\eta, \xi, \tau) = \theta_i(\eta, \xi), \quad \tau = 0, \quad (14)$$

其中, $\theta(\eta, \xi, \tau)$ 为无量纲瞬态温度; $\theta_0 = (T_0 - T_\infty)/(T_f - T_\infty)$ 为管左端侧的无量纲温度; $\theta_i = (T_i - T_\infty)/(T_f - T_\infty)$ 为初始无量纲温度; $G = gr_i^2/(k(T_f - T_\infty))$ 为产热项. 无量纲二维瞬态温度 $\theta(\eta, \xi, \tau)$ 为无量纲二维稳态温度 $\theta_s(\eta, \xi)$ 和无量纲滤波二维瞬态温度 $\theta^*(\eta, \xi, \tau)$ 的组合, 对应的二维稳态温度 $\theta_s(\eta, \xi)$ 可进一步表示为 $\theta_{s1}(\eta)$ 和 $\theta_{s2}(\eta, \xi)$ 的组合, 则无量纲二维瞬态温度为

$$\theta(\eta, \xi, \tau) = \theta_{s1}(\eta) + \theta_{s2}(\eta, \xi) + \theta^*(\eta, \xi, \tau). \quad (15)$$

① 含热源的无量纲一维稳态温度 $\theta_{s1}(\eta)$ 的控制方程为

$$\frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\theta_{s1}(\eta)}{d\eta} \right) + G = 0, \quad 1 < \eta < \gamma. \quad (16)$$

无量纲边界条件为

$$-\frac{d\theta_{s1}(\eta)}{d\eta} = Bi_1(1 - \theta_{s1}(\eta)), \quad \eta = 1, \quad (17)$$

$$-\frac{d\theta_{s1}(\eta)}{d\eta} = Bi_2\theta_{s1}(\eta), \quad \eta = \gamma. \quad (18)$$

② 滤波后的无量纲二维稳态温度 $\theta_{s2}(\eta, \xi)$ 控制方程为

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta_{s2}}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{F^2} \frac{\partial^2 \theta_{s2}}{\partial \xi^2} = 0, \quad 1 < \eta < \gamma, 0 < \xi < 1. \quad (19)$$

边界条件为

$$-\frac{\partial \theta_{s2}}{\partial \eta} = -Bi_1\theta_{s2}, \quad \eta = 1, \quad (20)$$

$$-\frac{\partial \theta_{s2}}{\partial \eta} = Bi_2\theta_{s2}, \quad \eta = \gamma, \quad (21)$$

$$\theta_{s2}(\eta, 0) = \theta_0 - \theta_{s1}(\eta), \quad \xi = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \theta_{s2}(\eta, \xi)}{\partial \xi} = 0, \quad \xi = 1. \quad (23)$$

③ 无量纲滤波二维瞬态温度 $\theta^*(\eta, \xi, \tau)$ 控制方程为

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta^*}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{F^2} \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \theta^*}{\partial \tau}, \quad 1 < \eta < \gamma, 0 < \xi < 1, \tau > 0. \quad (24)$$

边界条件为

$$-\frac{\partial \theta^*}{\partial \eta} = -Bi_1\theta^*, \quad \eta = 1, \quad (25)$$

$$-\frac{\partial \theta^*}{\partial \eta} = Bi_2\theta^*, \quad \eta = \gamma, \quad (26)$$

$$\theta^* = 0, \quad \xi = 0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial \xi} = 0, \quad \xi = 1. \quad (28)$$

初始条件为

$$\theta^*(\eta, \xi, \tau) = \theta_i(\eta, \xi) - \theta_s(\eta, \xi), \quad \tau = 0. \quad (29)$$

1.2 径向 η 与轴向 ξ 积分变换对

在处理非稳态、具有复杂边界条件和初始条件的热传导问题时, 采用积分变换方法对空间变量进行积分变换, 去除径向、轴向的影响, 将原偏微分方程转化为关于时间的常微分方程组.

① 径向 η 积分变换对

为实现径向 η 方向上的积分变换, 径向 η 的特征值问题描述为

$$\frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\psi_i(\eta)}{d\eta} \right) + \mu_i^2 \psi_i(\eta) = 0, \quad a < \eta < b, \quad (30)$$

$$\psi_i'(\eta) = Bi_1 \psi_i(\eta), \quad \eta = a = 1, \quad (31)$$

$$-\psi_i'(\eta) = Bi_2 \psi_i(\eta), \quad \eta = b = \gamma. \quad (32)$$

与特征值 μ_i 相对应的特征函数 $\psi_i(\eta)$ 为

$$\psi_i(\eta) = J_0(\eta\mu_i) - \frac{Bi_1 J_0(a\mu_i) + \mu_i J_1(a\mu_i)}{Bi_1 Y_0(a\mu_i) + \mu_i Y_1(a\mu_i)} Y_0(\eta\mu_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (33)$$

其中, J_0 和 Y_0 分别为第一类和第二类 Bessel 函数; 特征值 μ_i 为

$$\begin{aligned} \mu_i J_1(b\mu_i) - \frac{\mu_i^2 J_1(a\mu_i) + Bi_1 \mu_i J_0(a\mu_i)}{Bi_1 Y_0(a\mu_i) + \mu_i Y_1(a\mu_i)} Y_1(b\mu_i) = \\ Bi_2 \left(J_0(b\mu_i) - \frac{Bi_1 J_0(a\mu_i) + \mu_i J_1(a\mu_i)}{Bi_1 Y_0(a\mu_i) + \mu_i Y_1(a\mu_i)} Y_0(b\mu_i) \right). \end{aligned} \quad (34)$$

特征函数值满足以下正交条件:

$$\int_1^\gamma \eta \psi_i(\eta) \psi_j(\eta) d\eta = \delta_{ij} N_i, \quad (35)$$

这里, δ_{ij} 为 Kronecker delta 符号, 当 $i \neq j$ 时, $\delta_{ij} = 0$; 当 $i = j$ 时, $\delta_{ij} = 1$. 由正交关系式, 可得到模 N_i 的值为

$$N_i = \int_1^\gamma \eta \psi_i^2(\eta) d\eta, \quad i = 1, 2, 3, \dots. \quad (36)$$

正交模化特征函数可以定义为

$$\tilde{\psi}_i(\eta) = \frac{\psi_i(\eta)}{\sqrt{N_i}}. \quad (37)$$

径向 η 的积分变换对为:

正变换

$$\bar{\theta}_i(\xi) = \int_1^\gamma \eta \tilde{\psi}_i(\eta) \theta(\eta, \xi) d\eta; \quad (38)$$

逆变换

$$\theta_i(\eta, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(\eta) \bar{\theta}_i(\xi). \quad (39)$$

② 轴向 ξ 积分变换对

轴向 ξ 的特征值问题为

$$\frac{d^2 \phi_j(\xi)}{d\xi^2} + \lambda_j^2 \phi_j(\xi) = 0, \quad 0 < \xi < 1, \quad (40)$$

$$\phi_j(\xi) = 0, \quad \xi = 0, \quad (41)$$

$$\frac{d\phi_j(\xi)}{d\xi} = 0, \quad \xi = 1. \quad (42)$$

与特征值 λ_j 相对应的特征函数 $\phi_j(\xi)$ 为

$$\phi_j(\xi) = \sqrt{2} \sin(\lambda_j \xi), \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (43)$$

特征值 λ_j 为

$$\lambda_j = \pi \left(j - \frac{1}{2} \right), \quad j = 1, 2, 3, \dots. \quad (44)$$

同理, 满足正交模化条件 $\int_0^1 \phi_i(\xi) \phi_j(\xi) d\xi = \delta_{ij}$, 积分变换对为:

正变换

$$\bar{\theta}_{ij}(\tau) = \int_0^1 \phi_j(\xi) \bar{\theta}_i(\xi, \tau) d\xi; \quad (45)$$

逆变换

$$\bar{\theta}_i(\xi, \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(\xi) \bar{\theta}_{ij}(\tau). \quad (46)$$

1.3 无量纲二维瞬态温度场的解析解

① 含热源的无量纲一维稳态解

无量纲一维稳态温度 $\theta_{s1}(\eta)$ 仅为径向 η 的函数,可直接由式(16)积分,得到对应解析解为

$$\theta_{s1}(\eta) = f_1 \eta^2 + f_2 \ln(\eta) + f_3, \quad (47)$$

其中,系数 f_1, f_2, f_3 分别为

$$f_1 = -a_0 G(\gamma Bi_2 + Bi_1 + \gamma Bi_1 Bi_2 \ln(\gamma)), \quad (48)$$

$$f_2 = a_0 \gamma \{ Bi_2 G[(\gamma^2 - 1) Bi_1 + 2] + 2\gamma Bi_1 G - 4Bi_1 Bi_2 \}, \quad (49)$$

$$f_3 = a_0 \{ G[\gamma^3 Bi_2 + 2(\gamma^2 - 1)] + \gamma Bi_2 \ln(\gamma) (Bi_1 G + 4Bi_1 - 2G) + Bi_1 (G + 4) \}, \quad (50)$$

且

$$a_0 = \frac{1}{4(\gamma Bi_1 Bi_2 \ln(\gamma) + \gamma Bi_2 + Bi_1)}. \quad (51)$$

② 滤波后无量纲二维稳态解

为获得滤波后的无量纲二维稳态温度解,采用 $\int_1^\gamma -\eta \tilde{\psi}_i(\eta) d\eta$ 算子对方程(19)两边进行变换,考虑径向特征关系得到简化后的方程为

$$-\mu_i^2 \bar{\theta}_i(\xi) + \frac{1}{\Gamma^2} \frac{d^2 \bar{\theta}_i(\xi)}{d\xi^2} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots. \quad (52)$$

方程(52)的解为

$$\bar{\theta}_i(\xi) = c_1 e^{\Gamma \mu_i \xi} + c_2 e^{-\Gamma \mu_i \xi}. \quad (53)$$

方程(52)的未知系数由采用 $\int_1^\gamma -\eta \psi_i(\eta) d\eta$ 算子处理后的边界条件(22)、(23)确定,则系数 c_1 和 c_2 分别为

$$c_1 = \frac{e^{-\Gamma \mu_i} \int_1^\gamma \eta \tilde{\psi}_i(\eta) (\theta_0 - \theta_{s1}(\eta)) d\eta}{e^{\Gamma \mu_i} + e^{-\Gamma \mu_i}}, \quad c_2 = \frac{e^{\Gamma \mu_i} \int_1^\gamma \eta \tilde{\psi}_i(\eta) (\theta_0 - \theta_{s1}(\eta)) d\eta}{e^{\Gamma \mu_i} + e^{-\Gamma \mu_i}}. \quad (54)$$

通过径向 η 积分变换对的逆变换,得到滤波后的二维稳态解:

$$\theta_{s2}(\eta, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(\eta) \bar{\theta}_i(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(\eta) (c_1 e^{\Gamma \mu_i \xi} + c_2 e^{-\Gamma \mu_i \xi}), \quad (55)$$

可得无量纲稳态温度 $\theta_s(\eta, \xi)$ 解为

$$\theta_s(\eta, \xi) = f_1 \eta^2 + f_2 \ln(\eta) + f_3 + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(\eta) (c_1 e^{\Gamma \mu_i \xi} + c_2 e^{-\Gamma \mu_i \xi}). \quad (56)$$

③ 滤波后无量纲二维瞬态解

为消除滤波无量纲二维瞬态控制方程中的径向项,采用 $\int_1^\gamma -\eta \tilde{\psi}_i(\eta) d\eta$ 算子分别对式(24)、(25)、(26)进行变换,并考虑径向的特征关系得到

$$-\mu_i^2 \bar{\theta}_i(\xi, \tau) + \frac{1}{\Gamma^2} \frac{\partial^2 \bar{\theta}_i(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \bar{\theta}_i(\xi, \tau)}{\partial \tau}, \quad i = 1, 2, 3, \dots. \quad (57)$$

变换后的边界条件为

$$\bar{\theta}_i(0, \tau) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \infty, \quad (58)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}_i(1, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \infty. \quad (59)$$

变换后的初始条件为

$$\bar{\theta}_i(\xi, \tau) = \int_1^\gamma \eta \tilde{\psi}_i(\eta) (\theta_i - \theta_s(\eta, \xi)) d\eta, \quad \tau = 0. \quad (60)$$

同理, 采用 $\int_0^1 -\phi_j(\xi) d\xi$ 算子对方程(57)进行变换, 消除方程中轴向 ξ 项, 并将式(41)、(42)、(58)、(59)代入, 得到时间的一阶常系数线性齐次微分方程:

$$-\left(\mu_i^2 + \frac{1}{F^2} \lambda_j^2\right) \bar{\theta}_{ij}(\tau) = \frac{d\bar{\theta}_{ij}(\tau)}{d\tau}. \quad (61)$$

变换后的初始条件为

$$\bar{\theta}_{ij}(0) = \int_1^\gamma \eta \tilde{\psi}_i(\eta) \left(\int_0^1 \phi_j(\xi) (\theta_i(\eta, \xi) - \theta_s(\eta, \xi)) d\xi \right) d\eta = F_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots. \quad (62)$$

经常数变易法确定的常系数线性齐次微分方程(61)的解为

$$\bar{\theta}_{ij}(\tau) = C_{ij} e^{-(\mu_i^2 + \lambda_j^2 / F^2) \tau}, \quad (63)$$

系数 C_{ij} 可由 $\tau = 0$ 的初始条件确定, 并满足 $C_{ij} = F_{ij}$ 条件. 通过径向和轴向积分变换对的逆变换, 反演得到滤波后的瞬态温度场的解:

$$\theta^*(\eta, \xi, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(\eta) \phi_j(\xi) \bar{\theta}_{ij}(\tau). \quad (64)$$

④ 轴对称管道的二维瞬态温度解

依据式(15)的滤波解的组合, 无量纲二维瞬态温度分布 $\theta(\eta, \xi, \tau)$ 为二维稳态温度解(56)与滤波后的二维瞬态温度式(64)的叠加:

$$\begin{aligned} \theta(\eta, \xi, \tau) &= \theta_s(\eta, \xi) + \theta^*(\eta, \xi, \tau) = \\ &= f_1 \eta^2 + f_2 \ln(\eta) + f_3 + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(\eta) (c_1 e^{\Gamma \mu_i \xi} + c_2 e^{-\Gamma \mu_i \xi}) + \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(\eta) \phi_j(\xi) (F_{ij} e^{-(\mu_i^2 + \lambda_j^2 / F^2) \tau}). \end{aligned} \quad (65)$$

结合温度的无量纲变化, 可将无量纲的轴对称二维瞬态温度转换为带量纲的温度 $T(r, z, t)$, 含有稳定热源的二维瞬态温度分布为

$$T(r, z, t) = \theta\left(\frac{r}{r_i}, \frac{z}{L}, \frac{t\alpha}{r_i^2}\right) (T_f - T_\infty) + T_\infty, \quad (66)$$

其中, 含热源径向一维稳态控制方程, 可直接调用 Mathematica 软件中的 DSolve 函数进行解析求解. 对于二维稳态热传导问题, 先对控制方程进行径向积分变换, 将其降维为轴向常微分方程, 再调用 DSolve 求出变换域解, 最后通过径向逆变换重构二维稳态温度场解析解. 针对滤波后的二维瞬态控制方程, 则依次进行径向积分变换、轴向积分变换, 将原偏微分方程化为时间域的常微分方程; 结合初始条件后, 再利用 DSolve 求解, 最终经轴向、径向双重逆变换获得二维瞬态温度场完备解析解.

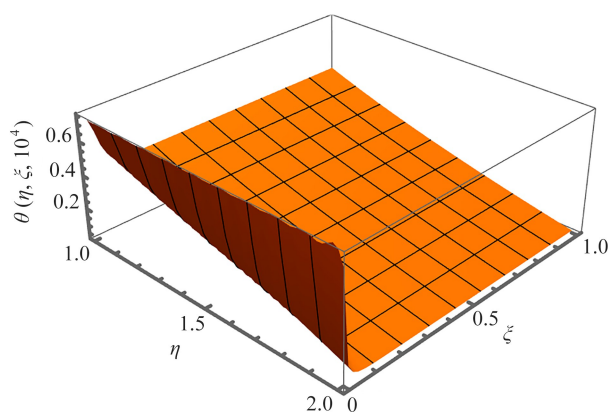
2 结果与讨论

针对上述非齐次边界条件下含热源单层管的二维瞬态热传导问题, 基于积分变换方法得到管体二维瞬态温度的解析表达式, 可分析管体的径向、轴向与瞬态温度分布. 为验证该解析模型的计算精度, 给出一组管道的参数开展算例验证, 其中管道内半径为 $r_i = 0.05$ m, 外半径为 $r_o = 0.1$ m, 密度 $\rho = 950$ kg/m³, 比热容 $c = 2220$ J/(kg·K), 热导率 $k = 0.27$ W/(m·K), 内部热源泉 $G = 418$ W/m³, 管道左端温度恒度 $T_0 = 95$ °C, 管内外壁与流体的对流换热系数分别为 $h_f = 5.4$ W/(m²·K), $h_\infty = 54$ W/(m²·K). 管体初始温度与海水温度近似相同, 海水温度恒定为 $T_\infty = 4$ °C. 假设原油开始输送 $t = 0$ 时, 内部流体温度瞬间升高至恒温 $T_f = 130$ °C, 且随着时间的推移, 管体温度逐渐升高并达到稳定温度分布.

2.1 准确性分析

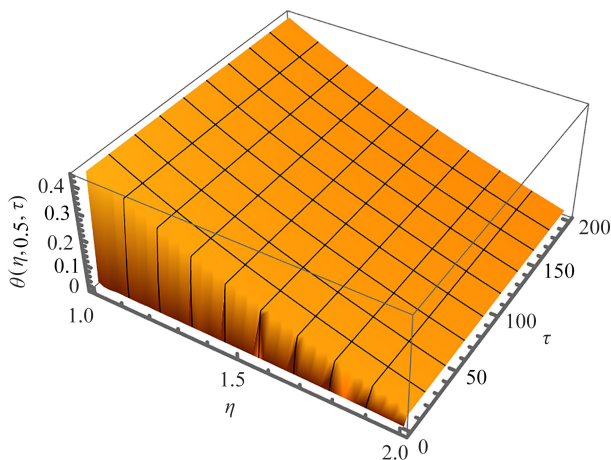
在管道的热传导中,稳态温度表征系统达到热平衡后的最终状态,稳态温度代表了系统在长时间后的稳定状态,而瞬态温度分布则描述系统随时间演化的动态过程.根据热传导理论,当时间趋于无穷大时,二维瞬态温度分布将渐近收敛至稳态温度分布.图 2 给出无量纲温度 θ 沿径向-轴向位置的空间分布演化、径向位置固定时随时间的变化及轴向位置固定时温度-时间响应特性,共同揭示管道内部瞬态热传导的多维动力学行为.无量纲温度分布是在内部热源 $G = 0.030\ 7$, 内外 Biot 数组合 ($Bi_1 = 1, Bi_2 = 10$), 管道左端无量纲温度 $\theta_0 = 0.722\ 2$, 内部流体无量纲温度 $\theta_f = 1$, 管道外径径向比率 $b = 2$ 和积分变换截断阶数 $N = 20$ 状态下的结果.图 2(a)、2(b)、2(c) 分别给出 $\tau = 10^4$ 时温度沿厚度方向(径向)和轴向的分布特征; $\tau = 0 \sim 200$ 期间管道厚度方向的瞬态温度演化过程及 $\tau = 0 \sim 5$ 期间管道轴向瞬态温度响应,其中图 2(c) 采用精细化时间跨度凸显轴向温升细节.

将二维瞬态无量纲温度分布与相同边界条件下求得的一维稳态和二维稳态温度分布进行对比,验证其准确性.在二维瞬态温度分布验证过程中,首先求解相同边界条件下的一维径向热传导的稳态解,并将其与二维瞬态解在相同边界条件下的结果进行对比,验证轴对称二维瞬态解在厚度方向(径向)的准确性.同理,以同边界条件下的二维稳态解(径向-轴向联合分布)为基准场,验证二维瞬态温度在两个空间坐标上的整体准确性.如图 3(a)、3(b) 所示,在相同边界条件下,一维稳态、二维稳态及二维瞬态沿厚度方向的温度分布相同,二维稳态、二维瞬态沿轴向的温度分布也相同,验证了积分变换方法在处理含热源的轴对称单层管二维瞬态热传导中的准确性.



(a) $\tau = 10^4$ 时的管体沿厚度及轴向温度分布

(a) The temperature distribution through the thickness and in the axial direction of the pipe for $\tau = 10^4$



(b) $\xi = 0.5$ 时的管体随时间及厚度温度分布

(b) The temperature distribution over time and through the thickness direction for $\xi = 0.5$

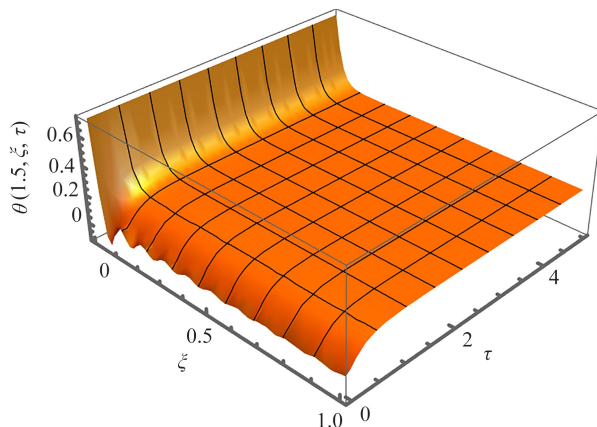
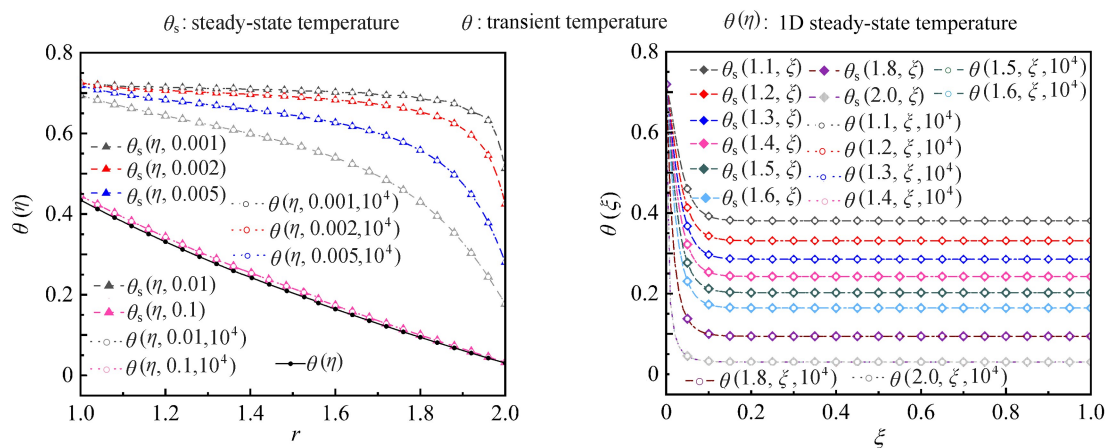
(c) $\eta = 1.5$ 时的管体随时间及轴向温度分布(c) The temperature distribution over time and in the axial direction for $\eta = 1.5$

图2 单层管二维瞬态无量纲温度的空间和时间分布

Fig. 2 Spatiotemporal distributions of 2D dimensionless transient temperatures in a single-layer pipe



(a) 径向温度分布

(a) Radial temperature distributions

(b) 轴向温度分布

(b) Axial temperature distributions

图3 无量纲瞬态温度与稳态温度分布对比

Fig. 3 Comparison of dimensionless transient temperatures and steady-state temperature distributions

2.2 收敛性分析

考虑内部热源 $G = 0.0307$, Biot 数组合 ($Bi_1 = 1, Bi_2 = 10$), 内部流体无量纲温度 $\theta_i = 1$, 管道左端的无量纲温度 $\theta_0 = 0.7222$, 管道外径径向比率 $b = 2$ 等条件下, 给出不同截断阶数 $N = 20, 25, 30, 35, 40$ 时, 厚度位置 $\eta = 1.2, 1.5, 1.6, 1.8, 2.0$ 、轴向位置 $\xi = 0.001, 0.002, 0.005, 0.01, 0.1$ 在五个无量纲时间 $\tau = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ 上的温度变化, 如表 1、表 2 和表 3 所示。表 1 中, 随着截断项阶数的增加, 无量纲温度逐渐趋于稳定, 在 $\tau = 10^4$ 、轴向位置 $\xi = 0.001$ 、截断阶数 $N = 40$ 时, 位置 $\eta = 1.2$ 处温度收敛至小数点后三位; 位置 $\eta = 1.5$, $\eta = 1.6$ 处的温度均收敛至四位小数; 位置 $\eta = 1.8, \eta = 2.0$ 处的温度分别收敛至两位小数、一位小数。在相同无量纲时间、轴向位置 $\xi = 0.002$ 处, 厚度位置 $\eta = 1.2, 1.5, 1.6, 1.8$ 在截断阶数 $N = 30$ 时的温度均已收敛至四位小数, 但在位置 $\eta = 2.0$ 处, 对应 $N = 40$ 的截断阶数温度仅收敛至三位小数。在相同无量纲时间、轴向位置 $\xi = 0.005, 0.01, 0.1$ 时, 五个径向位置处的温度均在截断项阶数 $N = 20$ 时收敛至四位小数。由表 2 可知, 在 $\tau = 0.1$ 、位置 $\xi = 0.5$ 处, 考虑 $\eta = 1.2, 1.5, 1.6, 1.8$ 四个位置, 其在截断阶数 $N = 40$ 的无量纲温度均收敛至三位小数, 在 $\eta = 2.0$ 处则收敛至四位小数。在 $\tau = 0.3$ 和 $\tau = 0.5$ 时, 分析点位的温度在截断项阶数 $N = 25$ 时已收敛至四位小数。当 $\tau > 0.5$ 时, 空间位置处温度在截断阶数 $N = 20$ 时已收敛至四位小数。表 3 中, 在 $\tau = 0.1$ 、 $\eta = 1.5$ 处, 轴向位置 $\xi = 0.001$ 的温度在截断阶数 $N = 40$ 时收敛至三位小数, 在 $\xi = 0.005$ 和 $\xi = 0.01$ 时收敛至

两位小数,而在 $\xi = 0.002$ 和 $\xi = 0.1$ 时收敛至一位小数。在 $\tau = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, \eta = 1.5$ 处,温度在 $N = 35$ 时均收敛至四位小数,且随着 ξ 的增大,在小截断阶数下的温度即可收敛至三位小数乃至四位小数。通过对不同截断阶数、不同空间位置处温度的收敛性分析,近端面及内外表面的收敛性相对其他位置的收敛性较差, $N = 35$ 的无量纲温度均已收敛,以截断阶数 $N = 35$ 进行后续参数分析。

表 1 不同截断项阶数和 $\tau = 10^4$ 时,管道不同位置处的无量纲温度 $\theta(\eta, \xi, \tau)$

Table 1 Dimensionless temperatures $\theta(\eta, \xi, \tau)$ at spatial locations of the pipe for varying eigenvalue orders at fixed time $\tau = 10^4$						
η		1.2	1.5	1.6	1.8	2.0
$\xi = 0.001$	$N = 20$	0.713 8	0.706 0	0.702 1	0.686 8	0.513 2
	$N = 25$	0.714 2	0.706 9	0.702 5	0.688 4	0.517 0
	$N = 30$	0.714 4	0.706 8	0.702 7	0.687 6	0.518 8
	$N = 35$	0.714 4	0.706 6	0.702 8	0.688 0	0.519 8
	$N = 40$	0.714 5	0.706 6	0.702 8	0.687 8	0.520 3
$\xi = 0.002$	$N = 20$	0.706 6	0.691 0	0.683 4	0.653 6	0.425 1
	$N = 25$	0.706 7	0.691 2	0.683 5	0.654 0	0.426 1
	$N = 30$	0.706 8	0.691 2	0.683 6	0.653 9	0.426 4
	$N = 35$	0.706 8	0.691 2	0.683 6	0.653 9	0.426 5
	$N = 40$	0.706 8	0.691 2	0.683 6	0.653 9	0.426 6
$\xi = 0.005$	$N = 20$	0.683 4	0.645 2	0.626 9	0.558 2	0.280 6
	$N = 25$	0.683 4	0.645 2	0.626 9	0.558 2	0.280 6
	$N = 30$	0.683 4	0.645 2	0.626 9	0.558 2	0.280 6
	$N = 35$	0.683 4	0.645 2	0.626 9	0.558 2	0.280 6
	$N = 40$	0.683 4	0.645 2	0.626 9	0.558 2	0.280 6
$\xi = 0.01$	$N = 20$	0.643 8	0.572 8	0.539 7	0.430 0	0.177 0
	$N = 25$	0.643 8	0.572 8	0.539 7	0.430 0	0.177 0
	$N = 30$	0.643 8	0.572 8	0.539 7	0.430 0	0.177 0
	$N = 35$	0.643 8	0.572 8	0.539 7	0.430 0	0.177 0
	$N = 40$	0.643 8	0.572 8	0.539 7	0.430 0	0.177 0
$\xi = 0.1$	$N = 20$	0.342 9	0.212 4	0.173 2	0.100 0	0.032 5
	$N = 25$	0.342 9	0.212 4	0.173 2	0.100 0	0.032 5
	$N = 30$	0.342 9	0.212 4	0.173 2	0.100 0	0.032 5
	$N = 35$	0.342 9	0.212 4	0.173 2	0.100 0	0.032 5
	$N = 40$	0.342 9	0.212 4	0.173 2	0.100 0	0.032 5

表 2 不同截断项阶数和 $\xi = 0.5$ 时,管道不同时间无量纲径向温度 $\theta(\eta, \xi, \tau)$

Table 2 Dimensionless radial temperatures $\theta(\eta, \xi, \tau)$ at axial position $\xi = 0.5$ for varying eigenvalue orders and times						
η		1.2	1.5	1.6	1.8	2.0
$\tau = 0.1$	$N = 20$	0.135 3	0.043 9	0.028 9	0.011 8	0.003 3
	$N = 25$	0.131 4	0.040 5	0.026 0	0.009 9	0.002 7
	$N = 30$	0.130 4	0.039 6	0.025 2	0.009 4	0.002 5
	$N = 35$	0.131 2	0.040 3	0.025 8	0.009 8	0.002 7
	$N = 40$	0.131 4	0.040 4	0.025 9	0.009 9	0.002 7
$\tau = 0.3$	$N = 20$	0.242 9	0.126 7	0.098 4	0.052 6	0.016 5
	$N = 25$	0.242 7	0.126 5	0.098 2	0.052 5	0.016 5
	$N = 30$	0.242 7	0.126 5	0.098 2	0.052 5	0.016 5
	$N = 35$	0.242 7	0.126 5	0.098 2	0.052 5	0.016 5
	$N = 40$	0.242 7	0.126 5	0.098 2	0.052 5	0.016 5

接续表

续表

η		1.2	1.5	1.6	1.8	2.0
$\tau = 0.5$	$N = 20$	0.290 6	0.167 5	0.134 0	0.075 1	0.024 1
	$N = 25$	0.290 6	0.167 4	0.133 9	0.075 1	0.024 1
	$N = 30$	0.290 6	0.167 4	0.133 9	0.075 1	0.024 1
	$N = 35$	0.290 6	0.167 4	0.133 9	0.075 1	0.024 1
	$N = 40$	0.290 6	0.167 4	0.133 9	0.075 1	0.024 1
$\tau = 0.7$	$N = 20$	0.312 5	0.186 3	0.150 4	0.085 5	0.027 6
	$N = 25$	0.312 5	0.186 3	0.150 4	0.085 5	0.027 6
	$N = 30$	0.312 5	0.186 3	0.150 4	0.085 5	0.027 6
	$N = 35$	0.312 5	0.186 3	0.150 4	0.085 5	0.027 6
	$N = 40$	0.312 5	0.186 3	0.150 4	0.085 5	0.027 6
$\tau = 0.9$	$N = 20$	0.322 6	0.194 9	0.157 9	0.090 3	0.029 2
	$N = 25$	0.322 6	0.194 9	0.157 9	0.090 3	0.029 2
	$N = 30$	0.322 6	0.194 9	0.157 9	0.090 3	0.029 2
	$N = 35$	0.322 6	0.194 9	0.157 9	0.090 3	0.029 2
	$N = 40$	0.322 6	0.194 9	0.157 9	0.090 3	0.029 2

表 3 不同截断项阶数和 $\eta = 1.5$ 时,管道不同时间无量纲轴向温度 $\theta(\eta, \xi, \tau)$ Table 3 Dimensionless axial temperatures $\theta(\eta, \xi, \tau)$ at radial position $\eta = 1.5$ for varying eigenvalue orders and times

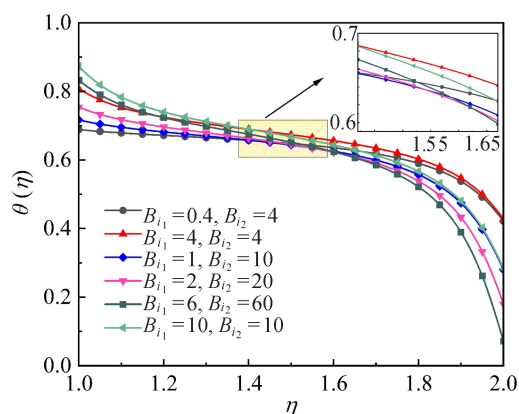
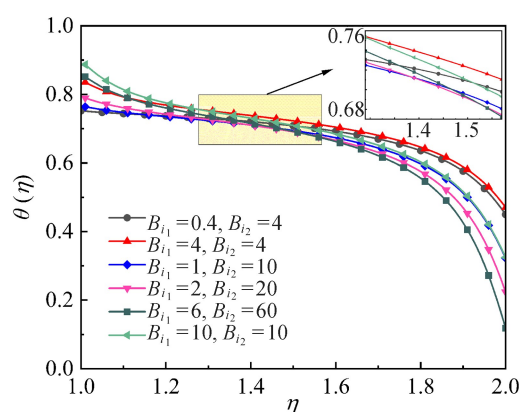
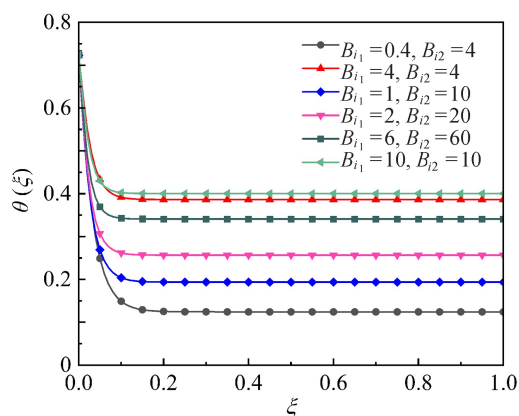
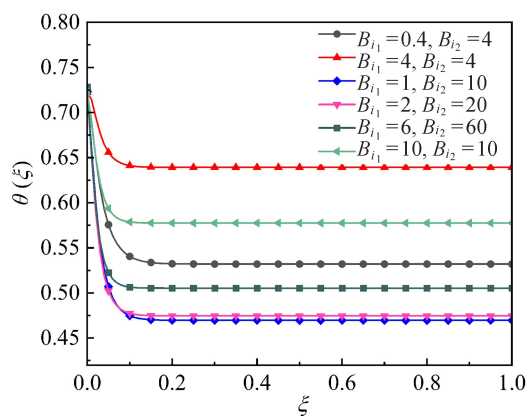
ξ		0.001	0.002	0.005	0.01	0.1
$\tau = 0.1$	$N = 20$	0.697 8	0.674 7	0.604 7	0.493 1	0.054 2
	$N = 25$	0.697 5	0.672 4	0.598 5	0.481 5	0.043 7
	$N = 30$	0.696 7	0.671 0	0.595 0	0.475 1	0.037 7
	$N = 35$	0.696 1	0.670 2	0.593 3	0.472 1	0.039 7
	$N = 40$	0.696 0	0.669 9	0.592 5	0.470 8	0.040 7
$\tau = 0.3$	$N = 20$	0.703 7	0.686 5	0.634 0	0.550 7	0.129 7
	$N = 25$	0.704 6	0.686 6	0.633 8	0.550 2	0.129 3
	$N = 30$	0.704 5	0.686 6	0.633 7	0.550 1	0.129 3
	$N = 35$	0.704 3	0.686 5	0.633 7	0.550 1	0.129 3
	$N = 40$	0.704 3	0.686 5	0.633 7	0.550 1	0.129 3
$\tau = 0.5$	$N = 20$	0.705 2	0.689 5	0.641 5	0.565 4	0.175 0
	$N = 25$	0.706 2	0.689 7	0.641 5	0.565 4	0.175 0
	$N = 30$	0.706 1	0.689 7	0.641 5	0.565 4	0.175 0
	$N = 35$	0.705 9	0.689 7	0.641 5	0.565 4	0.175 0
	$N = 40$	0.705 9	0.689 7	0.641 5	0.565 4	0.175 0
$\tau = 0.7$	$N = 20$	0.705 7	0.690 4	0.643 8	0.570 1	0.196 0
	$N = 25$	0.706 7	0.690 7	0.643 8	0.570 1	0.196 0
	$N = 30$	0.706 6	0.690 6	0.643 8	0.570 1	0.196 0
	$N = 35$	0.706 4	0.690 6	0.643 8	0.570 1	0.196 0
	$N = 40$	0.706 4	0.690 6	0.643 8	0.570 1	0.196 0
$\tau = 0.9$	$N = 20$	0.705 9	0.690 7	0.644 7	0.571 7	0.205 3
	$N = 25$	0.706 8	0.691 0	0.644 7	0.571 7	0.205 3
	$N = 30$	0.706 7	0.691 0	0.644 7	0.571 7	0.205 3
	$N = 35$	0.706 5	0.690 9	0.644 7	0.571 7	0.205 3
	$N = 40$	0.706 5	0.690 9	0.644 7	0.571 7	0.205 3

2.3 参数分析

内部热源是影响管道温度分布的主要影响因素,热源的强度、位置和分布形式会直接影响管道的温度分

布,导致管道局部或者整体的温度升高,形成非均匀的温度场.假定热源均匀且稳定,仅考虑热源强度对管道温度分布的影响,从空间和时间维度讨论热源强度 $G = 0, 1$ 时管道温度分布.在管道内外对流同时存在的情况下,内外 Biot 数共同影响管道的传热过程,当 Bi_1 和 Bi_2 都较大时,管道内外的对流换热都很强,热量能够快速地从管道内部传递到外部环境,或从环境传递到管道内部,此时管道的传热效率较高.相反,当 Bi_1 和 Bi_2 都较小时,则热量传递过程中的热阻主要集中在对流换热环节,管道的传热效率较低,管壁内外侧的温度差异较小.若内 Biot 数 Bi_1 较大,说明流体与管壁的对流换热较强,流体的热量更容易传递到管壁内部,管壁内侧的温度会更接近流体的温度.同理,当 Bi_2 较大时,环境对管壁的冷却或加热作用更强,管壁外侧的温度会更接近环境温度.据此,讨论不同内外 Biot 数组合,管道在径向、轴向空间及时间维度上的温度分布,给出了六种不同 Biot 数组合,分别为 $(Bi_1 = 0.4, Bi_2 = 4)$ $(Bi_1 = 4, Bi_2 = 4)$ $(Bi_1 = 1, Bi_2 = 10)$ $(Bi_1 = 2, Bi_2 = 20)$ $(Bi_1 = 6, Bi_2 = 60)$ $(Bi_1 = 10, Bi_2 = 10)$. 两种热源强度及六组 Biot 数组合空间及时间维度的温度分布,如图 4 所示.

图 4(a)、4(b) 分别展示了热源强度 $G = 0$ 和 $G = 1$ 的径向温度分布.在相同 Biot 数组合条件下,热源强度 $G = 1$ 对应的厚度方向温度分布曲线均位于热源强度 $G = 0$ 的曲线上方,表明热源强度的增加导致管体沿径向的温度整体升高.热源强度相同时,管道径向温度分布因 Biot 数组合的不同存在差异.外部 Biot 数固定,增大内部 Biot 数将导致近内壁区域的径向温度梯度增大.当 $Bi_2/Bi_1 = 10$ 时, Biot 数值较大的组合在 $\eta < 1.525$ 位置处表现出更高的温度值及温度梯度,但在 $\eta > 1.525$ 沿径向的温度变化率随 Biot 数的增加而减小;当 $Bi_2/Bi_1 = 1$ 且内外 Biot 数绝对数值较大时,小于临界半径 $\eta = 1.4$ 的温度梯度及温度值均较大,大于临界半径的二者均减小,图 4(c)、4(d) 表明,相同 Biot 数组合下,轴向温度演化趋势与径向分布具有相似性,热源强度大的提升轴向整体温度.当热源强度 G 及外部 Biot 数 Bi_2 相同,内部 Biot 数 Bi_1 增大,轴向温度梯度减小,但稳定温度值升高,且其与相同条件下的径向温度响应趋势相反;当 $Bi_2/Bi_1 = 1$ 且数值较大时,热源强度 $G = 0$ 的温度梯度小但稳定温度值高,但在热源 $G = 1$ 时,温度梯度大且稳态温度低,表明热源存在性反转了温度分布特性.

(a) $\tau = 10^4$, $\xi = 0.005$, $G = 0$ (b) $\tau = 10^4$, $\xi = 0.005$, $G = 1$ (c) $\tau = 10^4$, $\eta = 1.5$, $G = 0$ (d) $\tau = 10^4$, $\eta = 1.5$, $G = 1$

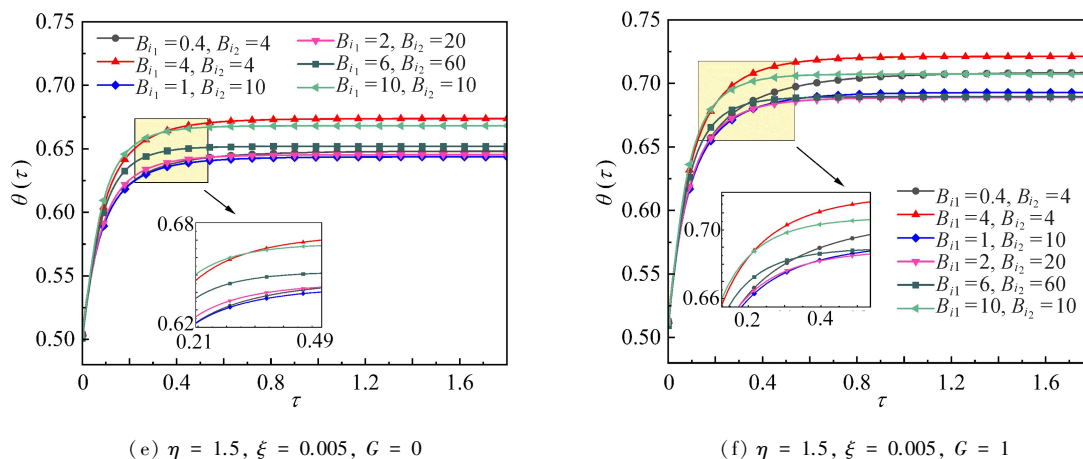


图4 不同 Biot 数组和热源强度下的时空维度温度分布

Fig. 4 The temperature distributions in spatial and temporal dimensions for different combinations of Biot numbers and heat source intensities

图4(e)、4(f)给出位置 ($\eta = 1.5, \xi = 0.005$) 在无量纲时间域 $\tau = 0 \sim 1.8$ 的温度演化过程,管道预热初期出现明显的时间温度梯度,随后温度渐近趋近稳态.在相同 Biot 数组下,热源强度增大会同时提高升温速率与稳定温度值.固定热源强度与外部 Biot 数 Bi_2 时,增大 Biot 数会导致预热阶段时间维度梯度增大,且全过程温度值升高.当 $Bi_2/Bi_1 = 10$ 且数值较大的,温度变化趋势与外部 Biot 数相同且内部 Biot 数大的工况呈现相同的特征.当热源强度 $G = 0$ 时, $Bi_2/Bi_1 = 1$ 的大 Biot 数组在 $\tau < 0.31$ 时,温度梯度提升,但在 $\tau > 0.31$ 时,温度变化逐渐平缓,且稳定温度高于其他组合.当热源强度 $G = 1$ 时,在相同 Biot 数条件下,温度梯度及稳定温度变化与 $G = 0$ 的变化趋势相同,转折点 $\tau \approx 0.2$.

3 结 论

本文针对含热源的非齐次边界条件下轴对称管道的二维瞬态传热问题,通过将二维瞬态温度滤波为含热源一维稳态、二维稳态与二维瞬态解的组合,实现非齐次问题向齐次问题的转化,采用积分变换方法依次处理滤波后的二维稳态及二维瞬态问题,最终给出含热源的轴对称空心圆柱体二维瞬态温度分布解析解.具体而言,含热源的一维稳态温度可直接解析求解;二维稳态温度场先经径向积分变换,将控制方程简化为轴向的常微分方程,再通过逆变换得到滤波后的稳态温度;滤波后的二维瞬态温度则依次进行径向和轴向双重积分变换,简化为仅含时间的常微分方程后直接求解,最后经双重逆变换得到其解析表达式.将二维瞬态温度与一维稳态、二维稳态温度进行对比,其温度分布相同,验证了二维瞬态温度解的准确性.随着截断项阶数的增加,由积分变换得到的瞬态解逐步收敛;在远离管内外表面和端面区域,温度分布收敛速度快、效果较好.相同内外 Biot 数组下,热源强度越大,升温速率越快,整体温度也越高.不同 Biot 数组下,轴向、径向及随时间变化的温度分布呈现显著差异,Biot 数对升温速率和整体温度水平的影响在轴向与径向并不相同.综合考虑热源强度与内外 Biot 数对管道时空温度分布的作用,对于热管理系统设计、材料选型和流动保障具有重要意义.

参考文献 (References):

- [1] Azadi Mohammad, Azadi Mohboobeh. Nonlinear transient heat transfer and thermoelastic analysis of thick-walled FGM cylinder with temperature-dependent material properties using Hermitian transfinite element[J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2009, **23**(10): 2635-2644.
- [2] Dai H L, Luo W F, Liu H B. Thermoviscoelastic dynamic behavior of a double-layered hollow cylinder under thermal shocking[J]. *Journal of Thermal Stresses*, 2015, **38**(8): 934-958.
- [3] 张进, 段梦兰, 安晨. 停输状态下相变材料夹层管道保温性能分析[J]. 石油机械, 2020, **48**(2): 57-65. (Zhang Jin, Duan Menglan, An Chen. Analysis of the thermal insulation performance of phase change material sand-

- wich pipeline under shutdown condition[J]. *China Petroleum Machinery*, 2020, **48**(2): 57-65. (in Chinese))
- [4] 吴峰. 周期性边界条件下管道传热规律数值研究[J]. 油气储运, 2009, **28**(10): 26-29. (Wu Feng. Numerical study on heat transfer law for buried pipeline under cyclical boundary condition[J]. *Oil & Gas Storage and Transportation*, 2009, **28**(10): 26-29. (in Chinese))
- [5] 闫思江, 杨金凯, 赵剑波. 供热管道热损失有限元分析[J]. 河南科学, 2013, **31**(9): 1432-1434. (Yan Sijiang, Yang Jinkai, Zhao Jianbo. Finite element analysis on heat loss of the thermal pipelines[J]. *Henan Science*, 2013, **31**(9): 1432-1434. (in Chinese))
- [6] 许丹, 申龙涉, 杜明俊, 等. 埋地热油管道停输三维非稳态传热过程的数值模拟[J]. 辽宁石油化工大学学报, 2010, **30**(4): 47-50. (Xu Dan, Shen Longshe, Du Mingjun, et al. Numerical simulation of three-dimensional unsteady-state heat transfer for buried hot oil pipeline at shutdown[J]. *Journal of Liaoning University of Petroleum & Chemical Technology*, 2010, **30**(4): 47-50. (in Chinese))
- [7] 刘学治. 海底热油管道运行传热规律计算研究[J]. 通用机械, 2018(1): 30-32. (Liu Xuezhi. Study on heat transfer characteristics of submarine hot oil pipelines in operation[J]. *General Machinery*, 2018(1): 30-32. (in Chinese))
- [8] 刘金梅, 张国威, 周国强, 等. 高温输气管道热-结构耦合数值仿真分析[J]. 中国工程机械学报, 2015, **13**(4): 358-362. (Liu Jinmei, Zhang Guowei, Zhou Guoqiang, et al. Numerical simulation analysis on thermal-structural coupling for high-temperature gas pipelines[J]. *Chinese Journal of Construction Machinery*, 2015, **13**(4): 358-362. (in Chinese))
- [9] 潘红良. 伴热管道传热性能的有限元分析[J]. 油气储运, 2004, **23**(10): 12-16. (Pan Hongliang. FEM analysis for heat transfer characteristics of heating tracer[J]. *Oil & Gas Storage and Transportation*, 2004, **23**(10): 12-16. (in Chinese))
- [10] 崔晓龙, 吴国忠, 万妮丽. 非稳态环境对埋地管道传热的影响[J]. 油气储运, 2003(7): 11-13. (Cui Xiaolong, Wu Guozhong, Wan Nili. The study on heat transfer of buried pipeline under the unsteady environment temperature[J]. *Oil & Gas Storage and Transportation*, 2003(7): 11-13. (in Chinese))
- [11] Zare M, Kardan F. Analytical solution based on a new series along with the numeric solution of the non-homogeneous transient heat conduction equation, in hollow cylinder under general mixed boundary conditions [J]. *American Journal of Engineering and Applied Sciences*, 2018, **11**(2): 538-547.
- [12] Napar' in Y A. The temperature field in a hollow cylinder due to a source moving along a helix[J]. *Journal of Engineering Physics*, 1971, **20**: 116-117.
- [13] Yu J H, An C, Tang Q S, et al. Heat transfer characteristics of subsea long-distance pipeline subject to direct electrical heating[J]. *Geoenery Science and Engineering*, 2024, **234**: 212679.
- [14] Ozisik M N. *Heat Conduction*[M]. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1993: 543-544.
- [15] Li M, Lai A C K. Analytical solution to heat conduction in finite hollow composite cylinders with a general boundary condition[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2013, **60**: 549-556.
- [16] Nekoo S R. Exact solution for heat conduction problem of a sector of a hollow cylinder[J]. *American Journal of Mechanical Engineering*, 2013, **1**(2): 50-57.
- [17] Can N, Keles I. A practical jointed approach to transient hyperbolic heat conduction of FGM cylinders and spheres[J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2023, **37**(3): 1223-1231.
- [18] Abouelregal A E. Thermoelastic interaction in an infinite long hollow cylinder with fractional heat conduction equation[J]. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **9**(2): 378-392.
- [19] Su J, de Castro A C R. Improved hybrid solution of conjugate heat transfer of laminar convection in ducts with axial wall conduction[C]//*Proceedings of HT2003 ASME Summer Heat Transfer Conference*. Las Vegas, Nevada, USA, 2003: HT2003-47019.
- [20] An C, Su J. Dynamic response of axially moving Timoshenko beams; integral transform solution[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(11): 1421-1436.
- [21] An C, Su J. Dynamic response of clamped axially moving beams; integral transform solution[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2011, **218**(2): 249-259.