

含参双重连续介质模型的 广义多尺度有限元迭代方法^{*}

马玲玲¹, 宋晓燕²

(1. 湖南第一师范学院 数学与统计学院 湖南省大数据分析与应用重点实验室, 长沙 410205;
2. 湖南工商大学 数学与统计学院, 长沙 410205)

摘要: 含参双重连续介质模型在地下地层相关的多种应用建模中具有重要的理论意义与实际价值. 该模型能够有效描述地质体中高度非均质性、强对比度的多尺度结构特征, 并体现出显著的不确定性. 针对此类复杂模型的数值求解, 采用合适的降阶方法已成为提升计算效率与保持求解精度的关键手段. 本文针对含参双重连续介质模型, 提出了一种基于广义多尺度有限元方法的迭代求解策略. 该方法首先将原始的参数依赖型双重介质模型重新表述为一个包含多尺度扩散系数和转移函数(均与参数无关)以及参数相关右端项的新模型. 在此基础上, 所提出的迭代方法划分为离线与在线两个阶段. 在离线阶段, 本文在每个粗网格区域内, 根据确定性多尺度参数构造多尺度基函数, 并生成相应的降阶空间; 在线阶段, 利用构建好的降阶空间, 通过迭代方法对模型进行高效求解. 该方法的显著优势在于, 离线阶段构造完成后, 在线阶段每次迭代均可使用高效的直接求解器, 并能重复利用矩阵逆, 从而显著降低计算成本. 此外, 本文还给出了该迭代方法的收敛性分析. 最后, 通过参数依赖的双重连续介质模型的数值算例, 验证了所提出方法的有效性与计算效率, 并进一步验证了理论收敛结果的正确性.

关键词: 双重连续介质模型; 广义多尺度有限元方法; 迭代方法; 不确定性量化

中图分类号: O241.82; O331; TU45 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.460121

A Generalized Multiscale Iterative Finite Element Method for Parameterized Dual-Continuum Models

Ma Lingling¹, Song Xiaoyan²

(1. *Hunan Provincial University Key Laboratory for Big Data Analysis and Application,
School of Mathematics and Statistics, Hunan First Normal University,
Changsha 410205, P.R. China;*
2. *School of Mathematics and Statistics, Hunan University of Technology and Business,
Changsha 410205, P.R. China*)

Abstract: The parameterized dual-continuum model plays a significant theoretical and practical role in various subsurface geological modeling applications. This model effectively captures the highly heterogeneous, high-

^{*} 收稿日期: 2025-06-11; 修订日期: 2026-06-11

基金项目: 国家自然科学基金(12101217;12301551;12331011);湖南省自然科学基金(2022JJ40113;2022JJ40125);湖南省教育厅科学研究(22B0635)

作者简介: 马玲玲(1990—),女,讲师,博士(E-mail: hudalingling@126.com);

宋晓燕(1992—),女,讲师,博士(通信作者. E-mail: xysonghnu@163.com).

引用格式: 马玲玲, 宋晓燕. 含参双重连续介质模型的广义多尺度有限元迭代方法[J]. 应用数学和力学, 2026, 47(7): 936-958.

contrast, and multiscale structural features of geological formations, while also exhibiting considerable uncertainty. To address the numerical challenges posed by such complex models, adopting appropriate model reduction techniques has become a key approach to improving computational efficiency while maintaining solution accuracy. Herein an iterative solution strategy was proposed based on the uncoupled generalized multiscale finite element method (GMsFEM) for the parameterized dual-continuum model. The original parameter-dependent model was reformulated as a new one consisting of multiscale diffusion coefficients and transfer functions (both parameter-independent), along with a parameter-dependent source term. The proposed iterative method was divided into offline and online stages. In the offline stage, multiscale basis functions were constructed in each coarse grid block based on deterministic multiscale parameters to generate a reduced-order space. In the online stage, the model was solved efficiently within the reduced space with an iterative scheme. A major advantage of this method lies in the fact that, once the multiscale basis space is constructed offline, each online iteration can leverage efficient direct solvers and reuse matrix inverses, thus significantly reducing computational costs. Furthermore, the convergence of the proposed iterative method was analyzed. Finally, numerical experiments on the parameterized dual-continuum model were conducted to demonstrate the effectiveness and efficiency of the multiscale-based iterative approach, and validate the theoretical convergence results.

Key words: dual continuum model; generalized multiscale finite element method; iterative method; uncertainty quantification

0 引言

在许多科学与工程领域,如油气藏开发^[1]、多孔介质流动^[2-5]、复合材料力学^[6-7]、生物组织建模及社会经济系统分析等,研究对象由多个相互作用的连续介质组成.传统的单连续介质模型(single-continuum model, SCM)通常假设系统为均匀介质,难以准确刻画多组分、多尺度、多物理场耦合所呈现的复杂行为.为此,多连续介质模型(multi-continuum model, MCM)应运而生.该模型通过引入多个相互作用的连续介质,从宏观与微观层面更精确地描述系统的耦合特性,从而更有效地模拟真实世界中的复杂现象.然而,这类模型往往更加复杂,主要体现在以下几个方面:首先,裂缝网络与背景介质在物理属性上往往存在显著差异;其次,背景介质本身通常表现出高度非均质性和强对比性特征;再次,由于自然系统的复杂性、人类认知的局限性以及测量误差等因素,模型参数往往伴随着显著的不确定性.这些不确定性因素极大地增加了问题的计算复杂度.因此,针对上述挑战,亟需一种既能有效降低计算成本,又能准确捕捉多尺度信息的建模方法.本文将针对稳态条件下的双重连续介质模型,旨在构建一种约化模型框架,以提升建模效率和数值稳定性.

目前,针对双重连续介质模型的数值模拟,已发展出多种方法,包括有限元法^[8-9]、有限体积法^[10-11]以及有限元-有限体积混合法^[12-13].考虑到裂隙介质中多尺度与高对比度的特性,Barenblatt等^[14]提出的双重连续介质模型已成为模拟这类物理过程的标准方法.该模型的核心思想是将流动场视为两个不同尺度连续体的平行交互系统,其中高渗透率、小体积的裂隙连续体与低渗透率、大体积的基质连续体通过传输函数实现质量交换耦合.在过去几十年中,双重连续介质模型得到了显著的发展和拓展.Wu和Pruess^[15]于1988年引入了多重交互连续体的概念,用以描述具有瞬态特征的流动过程.随后,Yan等^[16]进一步推广该方法,并提出了可处理任意数量连续体并支持任意连接方式的多重连续体模型.针对该类问题所固有的多尺度特性,研究者提出了多种多尺度方法,用于耦合多连续体模型方程^[17-23].其中,广义多尺度有限元法(generalized multiscale finite element method, GMsFEM)^[24-25]和约束能量最小化广义多尺度有限元法(CEM-GMsFEM)^[26]是当前应用最广泛的多尺度计算方法之一,具有良好的精度和计算效率.GMsFEM作为多尺度有限元法(MsFEM)的重要拓展,其核心思想在于通过构造局部快照空间并求解特征值问题,从而系统地选取主导模态以有效捕捉高对比度介质中的关键流动通道和重要区域.这一方法在理论框架上与多连续体多尺度方法具有内在的相似性^[19].值得注意的是,利用谱问题构造局部基函数的技术手段同样可见于多种域分解方法^[27-28].理论分析表明,GMsFEM的数值收敛性主要取决于两个关键因素,一是局部谱问题特征值的衰减速率,二是粗网格尺寸的选取^[29].

双重连续介质模型在描述裂缝-基质系统等多尺度耦合问题时,不仅需要处理介质固有的跨尺度特征,其含不确定参数情形下的高效高精度数值求解更构成了当前计算数学与工程应用领域的重大挑战.这类问题通常通过随机变量刻画关键参数(如渗透率、交换系数等),最终归结为含参数的参数化偏微分方程(parameterized partial differential equations, PPDEs)的求解问题^[30].针对此类复杂方程的数值求解,近年来已发展出若干具有代表性的方法体系:① 模型降阶法(model order reduction, MOR)通过构建低维子空间来近似高维解空间,显著提升计算效率.典型方法包括基于本征正交分解(POD)的投影法^[31]、具备后验误差估计的降基方法^[32],以及针对参数化问题的降阶建模框架^[33-34].② 集合方法(ensemble methods)采用统一计算框架处理参数样本集合,通过共享基函数或预处理子实现资源复用与效率优化.该方法在随机偏微分方程求解中展现出独特优势^[35],其后发展出的多级集合算法^[36]和高效采样策略^[37]进一步提升了计算效率.③ 多模态法(multimode methods)通过解耦参数依赖性与空间变异性,适应多尺度、多物理场耦合特征的高效数值框架.Feng等^[38-39]提出的一系列算法有效解决了高维参数空间中的模态选择问题,近期发展的多模态自适应策略^[40]进一步强化了方法的鲁棒性.④ 迭代求解法(iterative methods)通过重构问题形式实现计算简化.Feng等^[41]于2022年提出的迭代方法通过将参数相关问题重构为具有确定性系数与参数相关右端项的新形式,并采用定点迭代算法进行求解,从而有效降低了计算成本.

受GmsFEM与迭代方法的启发,本文旨在提出一种高效的基于GmsFEM的迭代算法(Gms-Iter),用于求解参数依赖的双重连续介质模型.该方法的核心思想在于将原始问题重构为具有确定性多尺度渗透率与参数相关源项的形式,并通过定点迭代算法实现求解.该重构策略有效实现了扩散系数与参数及迭代过程的解耦,同时保留右端项对参数的依赖性,从而使得可利用高效的直接求解器来处理具有多个右端向量的线性系统.此外,本文还将建立所提Iter-GmsFEM的收敛性理论,证明其收敛速率线性依赖于局部谱问题的特征值衰减、网格尺寸与迭代步数,并且独立于介质的对比度.

本文的主要结构安排如下:第1节将简要介绍研究所需的预备知识、记号体系以及若干基础方法.第2节将详细阐述所提出的基于GmsFEM的迭代算法的具体实现过程.第3节将给出Gms-Iter方法的收敛性理论分析,并讨论其与相关参数的关系.在第4节中,本文将通过两个具体的数值算例对Gms-Iter方法的有效性进行验证,并进一步通过数值结果支持其中的收敛性理论结论.最后,在第5节中,将给出总结和展望.

1 预备知识

为了行文方便,我们在本节中简单地介绍一下本文所需的一些基本知识、记号和基本方法.

1.1 基本知识

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个多边形光滑有界区域.定义Sobolev空间 $V := H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$,其对应的对偶空间记为 $V^* := H^{-1}(\Omega)$,即 V 上所有有界线性泛函构成的空间.对于任意泛函 $f \in H^{-1}(\Omega)$ 和函数 $v \in H_0^1(\Omega)$,其对偶作用用内积 $\langle f, v \rangle$ 表示.Sobolev空间 $\|\cdot\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$ 的范数定义为

$$\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = (\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2},$$

其中,对于标量值函数 $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$,其梯度 ∇v 的 $L^2(\Omega)$ 范数为

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2},$$

这里, $|\nabla v|$ 表示 ∇v 的Euclid范数.对于二维向量值函数 $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$,其梯度 $\nabla \mathbf{v}$ 的 $L^2(\Omega)$ 范数为

$$\|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} := \sum_{i=1}^2 \|\nabla v_i\|_{L^2(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} |\nabla v_i|^2 dx \right)^{1/2}.$$

令 $(\mathcal{D}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 是一个完备的概率空间.其中, $\mathcal{D}$ 是所有可能结果的集合, $\mathcal{F}$ 是所有事件构成的 σ 代数, $\mathcal{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ 是一个概率测度.本文定义 $v : \Omega \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ 表示实值随机场(函数).为了方便计算,本文采用有限个随机变量对随机场进行参数化,即用

$$\boldsymbol{\xi}(\omega) = \{\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_m(\omega)\}, \text{ i.e., } \boldsymbol{\xi}(\omega) : \mathcal{D} \rightarrow \Gamma \in \mathbb{R}^m (m \geq 1)$$

来刻画随机场的随机性.将 $\boldsymbol{\xi}(\omega)$ 的联合密度函数记为 ρ .为了简单起见,将在下文中用 $\boldsymbol{\xi}$ 代替随机变量

$\xi(\omega)$. 用 $L^2_p(\Gamma)$ 表示定义在随机空间 Γ 上的所有平方可积的函数组成的函数空间, 记作

$$L^2_p(\Gamma) = \left\{ v: \Omega \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}; \int_{\Gamma} v(\cdot; \xi)^2 P d\xi \in L^2(\Omega) \right\}.$$

为了简化符号, 本文将 $\mathbf{u}(\cdot, \xi) = (u_1(\cdot, \xi), u_2(\cdot, \xi))$ 的空间表示为 $\mathbf{V} = V \times V = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. 在稳态条件下, 参数依赖的双重连续介质模型可定义为

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa_1(x, \xi) \nabla u_1(x, \xi)) + \sigma(x)(u_1(x, \xi) - u_2(x, \xi)) = f_1(x, \xi), \\ -\operatorname{div}(\kappa_2(x, \xi) \nabla u_2(x, \xi)) - \sigma(x)(u_1(x, \xi) - u_2(x, \xi)) = f_2(x, \xi), \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x \in \Omega, \xi \in \mathcal{D}$ 为随机参数. 边界条件满足 $u_i(\cdot, \xi) = 0$, 其中 $x \in \partial\Omega$. 在上述双重连续介质模型中, u_i 表示第 i 个连续体的压力场, κ_i 表示第 i 个连续体的随机渗透率张量, f_i 表示第 i 个连续体的随机源项, $i = 1, 2$. 特别地, 两个连续体通过质量交换相互耦合, 其中 σ 表示连续体间质量转移的强度. 需要特别指出的是, 压力场 u_i 、渗透率张量 κ_i 以及源项 f_i 均为参数变量 ξ 的依赖量, 而质量转移强度系数 σ 则与 ξ 无关.

对于任意的随机变量 $\xi \in \mathcal{D}$, 问题(1)的弱形式为寻找 $\mathbf{u}(\cdot, \xi) = (u_1(\cdot, \xi), u_2(\cdot, \xi)) \in \mathbf{V}$, 满足

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \xi) + q(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = b(\mathbf{v}; \xi), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (2)$$

其中 $b(\mathbf{v}; \xi) \in V^*$, $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \xi): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ 依赖于参数 ξ , 而 $q(\mathbf{u}, \mathbf{v}): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ 与参数 ξ 无关. 此外, 右端线性形式的定义为

$$b(\mathbf{v}; \xi) = \sum_i \int_{\Omega} f_i(x, \xi) v_i(x) dx;$$

双线性形式被定义为

$$\begin{cases} a_i(u_i, v_i; \xi) = \int_{D_m^i} \kappa_i^m(x, \xi) \nabla u_i(x, \xi) \cdot \nabla v_i(x) dx + \sum_l \int_{D_{f,l}^i} \kappa_{l,i}^f(x, \xi) \nabla u_i(x, \xi) \cdot \nabla v_i(x) dx = \\ \int_{\Omega} \kappa_i(x, \xi) \nabla u_i(x, \xi) \cdot \nabla v_i(x) dx, \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \xi) = \sum_i a_i(u_i, v_i; \xi), \\ q(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_i \sum_l \int_{\Omega} \sigma(x) (u_i(x, \xi) - u_l(x, \xi)) v_i(x) dx. \end{cases}$$

对于任意给定参数 ξ , 本文在空间 $\mathbf{V}$ 上定义 a_Q 范数:

$$\|\mathbf{v}\|_{a_Q}^2 := a_Q(\mathbf{v}, \mathbf{v}; \xi) = a(\mathbf{v}, \mathbf{v}; \xi) + q(\mathbf{v}, \mathbf{v}),$$

以及 a 范数

$$\|\mathbf{v}\|_a^2 := a(\mathbf{v}, \mathbf{v}; \xi) = a(\mathbf{v}, \mathbf{v}; \xi).$$

为保证双连续模型解的适定性, 本文假设双线性泛函 $a_Q(\cdot, \cdot; \xi)$ 满足如下假设.

假设 1

① 双线性: $a_Q(\mathbf{v}, \mathbf{v}; \xi)$ 是 $\mathbf{v} \times \mathbf{v}$ 上的双线性映射.

② 有界性: 对于 $i = 1, 2$, 假设存在常数 $\underline{\kappa}, \bar{\kappa}$ 及 $\bar{\sigma}$ 使得

$$\underline{\kappa} \leq \kappa_i(x, \xi) \leq \bar{\kappa}, \quad |\sigma(x)| \leq \bar{\sigma}$$

成立, 则存在一个与 ξ 无关的常数 D_1 满足

$$a_Q(\mathbf{v}, \mathbf{w}; \xi) \leq D_1 \|\mathbf{v}\|_{a_Q} \|\mathbf{w}\|_{a_Q}, \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}.$$

③ 存在一个与 ξ 无关的常数 D_2 使得

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}; \xi) \geq D_2 \|\mathbf{v}\|_{a_Q}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

1.2 随机椭圆问题的迭代方法

考虑具有如下弱形式的随机椭圆问题: 给定 $\xi \in D$, 找到 $u \in V$, 满足

$$A(u, v; \xi) = F(v; \xi), \quad \forall v \in V, \quad (3)$$

其中 $F(\cdot; \xi) \in V^*$.

假设 2 双线性泛函 $A(\cdot, \cdot; \xi): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ 依赖于参数变量 ξ , 并满足如下性质:

① 双线性: A 是 $V \times V$ 上的双线性映射.

② 有界性: 存在一个与 ξ 无关的常数 $A > 0$, 使得

$$|A(v, w; \xi)| \leq A \|v\|_V \|w\|_V, \quad \forall v, w \in V.$$

③ 强制性: 存在一个与 ξ 无关的常数 $\lambda > 0$, 使得

$$A(v, v; \omega) \geq \lambda \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V.$$

设 $A_0(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ 为与 ξ 无关的双线性形式, 并定义 $A_1 = A - A_0$. 显然, 本文有

$$A(\cdot, \cdot; \xi) = A_0(\cdot, \cdot) + A_1(\cdot, \cdot; \xi),$$

也是 $V \times V$ 上的一个双线性形式. 方程(3)可以重写为

$$A_0(u, v) = F(v; \xi) - A_1(u, v; \xi). \quad (4)$$

对于式(3), 本文可以运用迭代算法求解问题. 具体见算法 1.

算法 1 求解椭圆方程(3)的迭代算法

step 1: 通过解以下问题寻找 $U_0 \in V$

$$A_0(U_0, v) = F(v; \xi), \quad \forall v \in V. \quad (5)$$

step 2: 对于每个 $\xi \in D$, 通过递归方法求解以下方程找到一系列解 $\{U_n = U_n(\xi)\}_{n \geq 1} \subset V$

$$A_0(U_n, v) = F(v; \xi) - A_1(U_{n-1}, v; \xi), \quad \forall v \in V. \quad (6)$$

算法 1 的主要优势在于方程(5)和(6)中左侧的双线性形式相同且都与参数 ξ 无关, 这使得能够设计快速求解器来计算算法 1 中的两个步骤的解. 文献[41]给出了两种简单的构造 A_0 的方法. 参数依赖问题的主导项系数是 $a(x, \xi_j)$, 其中样本集为 $W = \{\xi_j\}_{j=1}^J$. 对于系数 a_0 , 有两种选择, 分别为

$$a_0(x) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J a(x, \xi_j) \text{ or } a_0(x) = \max_{1 \leq j \leq J} a(x, \xi_j), \quad \forall \xi_j \in W.$$

样本集 W 可以通过 Monte-Carlo 方法等多种方式构造. 上述 a_0 的两种构造方法都满足下列假设 3 中的所有条件. 根据假设(i)—(iii), 本文知道以下 Lax-Milgram 定理成立^[22].

定理 1 在上述假设条件下, 对于每个 $\xi \in D$, 问题(3)都存在唯一解 $u(\xi) \in V$. 此外, 有以下关系成立:

$$\|u(\xi)\|_V \leq \frac{\|F(\xi)\|_{V^*}}{\lambda}, \quad \forall \xi \in D.$$

假设 3 类似于假设 2, A_0 满足如下性质:

① 根据双线性泛函 A, A_0 也必须满足双线性、有界性和强制性. 即

(i) 双线性: A_0 是 $V \times V$ 上的双线性映射.

(ii) 有界性: 存在一个与 ξ 无关的常数 $A_0 > 0$, 使得

$$|A_0(v, w; \xi)| \leq A_0 \|v\|_V \|w\|_V, \quad \forall v, w \in V.$$

(iii) 强制性: 存在一个与 ξ 无关的常数 $\lambda > 0$, 使得

$$A(v, v; \omega) \geq \lambda_0 \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V.$$

② 存在 $\rho \in (0, 1)$ 使得

$$\frac{\|A_1(\xi)\|_{\mathcal{L}(V \times V, \mathbb{R}^m)}}{\lambda_0} < \rho, \quad \forall \xi \in D.$$

在 A_0 和 A_1 满足上述假设, 可以由下面定理给出迭代方法的收敛性结果.

定理 2 $u(\xi)$ 是方程(3)的解, 而 $\{U_n(\xi)\}_{n \geq 0}$ 是由算法 1 生成的序列. 假设上述假设 3 的条件成立, 那么存在一个与 ξ 无关的常数 $C > 0$, 使得对于所有 $\xi \in D$, 满足

$$\|u(\xi) - U_n(\xi)\|_V \leq C \rho^{n+1}.$$

因此, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 对于每个 $\xi \in D$, $U_n(\xi)$ 在 V 中强收敛到 $u(\xi)$.

1.3 非耦合 GMsFEM

作为一种局部模型约化方法, GMsFEM 是一种有效的计算方法, 特别是处理含有多尺度信息的偏微分方程. 在本小节中, 本文将详细介绍一下非耦合 GMsFEM. 对于 GMsFEM 提出的背景以及动机, 读者可以查看文

献[25]及其中列出的参考文献.

本文首先假设物理区域 Ω 可以一致剖分为网格尺寸分别为 H 和 h 的两种网格:粗网格 $\mathcal{T}_H$ 和细网格 $\mathcal{T}_h$. 并且,细网格 $\mathcal{T}_h$ 是在粗网格 $\mathcal{T}_H$ 的进一步剖分下得到的.本文令 $V^h(\Omega)$ 为定义在细网格 $\mathcal{T}_h$ 上的有限元空间,并用 $V_0^h(\Omega) \subset V^h(\Omega)$ 表示 $V^h(\Omega)$ 中迹为 0 的函数构成的子空间. N_h 表示细网格 $\mathcal{T}_h$ 上的结点数, N_e 表示细网格 $\mathcal{T}_h$ 上的单元个数以及 $\mathcal{N}$ 表示有限元空间的维数.将粗网格的结点集合记为 $\{x_i\}_{i=1}^{N_c}$,其中 N_c 表示结点数.以结点 x_i 为共同点的所有粗网格单元,本文称之为结点 x_i 的邻域 ω_i ,其定义为

$$\omega_i = \cup \{K_s \in \mathcal{T}_H \mid x_i \in \bar{K}_s\}.$$

为了使得网格剖分更加具体化,在图 1 给出网格剖分的图像. ω_j 表示粗网格结点 x_j 的邻域,邻域 ω_i 上边界点的集合为 $J_h(\omega_j)$.

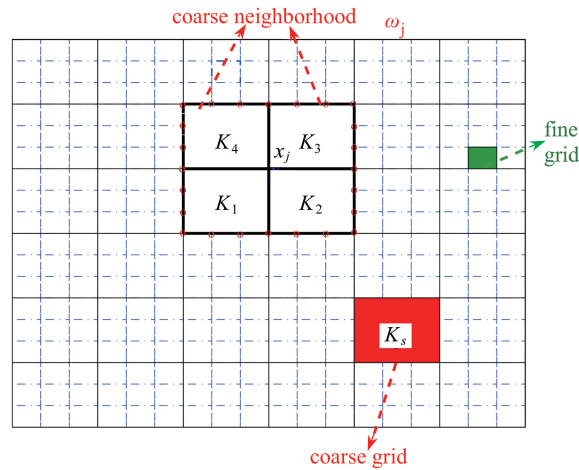


图 1 网格剖分

Fig. 1 The grid generation

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同.

以一个简单椭圆方程为例,下文将简单介绍一下非耦合 GMsFEM.

$$-\operatorname{div}(\kappa(x) \nabla u) = f, \quad \text{in } \Omega, \quad (7)$$

满足某种边界条件.这里的扩散系数 $\kappa(x) \in L^\infty(\Omega)$ 是一致有界的.方程(7)对应的变分形式是对于空间 V 中的任意测试函数 v ,寻找 $u \in H^1(\Omega)$ 满足

$$a(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in V,$$

其中,双线性泛函和线性泛函的定义如下:

$$a(u, v) = (\kappa(x) \nabla u, \nabla v),$$

$$(f, v) = (f, v).$$

进一步,我们可知方程(7)对应的 Galerkin 形式是寻找 $u_h \in V^h(\Omega)$ 满足

$$a(u_h, v) = (f, v), \quad \forall v \in V_0^h(\Omega).$$

为了构建多尺度降基空间,我们需要在每个粗网格节点的区域 ω_i 上求解局部特征值问题:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa(x) \nabla \phi_{i,\ell}) = \lambda_{i,\ell} \widetilde{\kappa(x)} \phi_{i,\ell}, & \text{in } \omega_i, \\ \kappa(x) \cdot \nabla \phi_{i,\ell} \cdot n = 0, & \text{on } \partial \omega_i, \end{cases} \quad (8)$$

其中, $\widetilde{\kappa(x)} = \kappa(x) \sum_{i=1}^{N_c} H^2 |\nabla \chi_i|^2$, $\{\chi_i\}_{i=1}^{N_c}$ 是一些单位分解函数.

接下来,我们假设定义在细网格结点上的基函数为 $\{\psi_m\}_{m=1}^{N_h}$.经有限元方法离散,我们可得到特征问题(8)的矩阵形式:

$$A \phi_{i,\ell} = \lambda S \phi_{i,\ell}, \quad (9)$$

其中, $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{S}$ 的定义如下:

$$(\mathbf{A})_{m,n} = (\kappa(x) \nabla \psi_m, \nabla \psi_n)_{L^2(\omega_i)}, (\mathbf{S})_{m,n} = (\widetilde{\kappa(x)} \psi_m, \psi_n)_{L^2(\omega_i)}.$$

通过对特征问题(9)的求解,我们可以得到一系列特征值 $\{\lambda_\ell^{\omega_i}\}_{\ell=1}^{N_h}$ 和 $\{\psi_\ell^{\omega_i}\}_{\ell=1}^{N_h}$. 然后选取其中 M_i 个较小特征值及其对应的特征函数,从而可得到局部的样本空间:

$$V_{\text{snap}}(\omega_i) := \{\psi_\ell^{\omega_i}, 1 \leq \ell \leq M_i\}.$$

通过将样本空间中的函数延拓至整个空间,我们可进一步得到全局样本空间,即多尺度降基空间,

$$V_{\text{ms}} := \text{span}\{\psi_k: 1 \leq k \leq M\} = \text{span}\{\psi_{i,\ell}: \psi_{i,\ell} = \chi_i \psi_\ell^{\omega_i}, 1 \leq i \leq N_c, 1 \leq \ell \leq M_i\}.$$

这里, $M = \sum_{i=1}^{N_c} M_i$ 表示所有的样本数. 若将这些多尺度基函数表示成细网格基函数的系数并存储在矩阵中,我们则可以得到降基矩阵:

$$\mathbf{R}_{\text{re}}^T = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M]. \quad (10)$$

2 基于 GmsFEM 的迭代方法

本节将详细阐述基于非耦合 GmsFEM 的迭代算法(Gms-Iter)的实现过程. 为提高计算效率,本文采用分阶段计算策略,将 Gms-Iter 方法划分为离线和在线两个计算阶段. 离线阶段中,本文主要完成了多尺度基函数的构建、降维空间的生成,以及关键计算参数的预处理,为在线阶段的高效求解奠定基础. 这种计算策略设计不仅显著降低了在线阶段的实时计算负荷,同时保证了算法的整体计算效率. 在线阶段则充分利用离线阶段构建的计算框架,实现快速求解. 下文将详细阐述该算法的具体实现流程、计算细节以及各阶段的优化策略.

首先,假设随机渗透率张量 $\kappa_i(x, \xi)$ ($i = 1, 2$) 可以分解为以下两部分:

$$\kappa_i(x, \xi) := \kappa_i^0(x) + \kappa_i^1(x, \xi), \quad (11)$$

其中, $\kappa_i^0(x)$ 是具有显著多尺度特征的确定性分量,而 $\kappa_i^1(x, \xi)$ 则是表征随机波动的随机分量.

2.1 含参双重连续介质模型的迭代方法

根据随机渗透率 κ_i 的假设形式(11),重新定义问题(2)的双线性形式 $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \xi)$ 如下:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \xi) = a^0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a^1(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \xi), \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} a_i^0(u_i, v_i; \xi) &= \int_{\Omega} \kappa_i^0(x) \nabla u_i(x, \xi) \cdot \nabla v_i(x) dx, \\ a^0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sum_i a_i^0(u_i, v_i), \\ a_i^1(u_i, v_i; \xi) &= \int_{\Omega} \kappa_i^1(x, \xi) \nabla u_i(x, \xi) \cdot \nabla v_i(x) dx, \\ a^1(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \xi) &= \sum_i a_i^1(u_i, v_i; \xi). \end{aligned}$$

这里, $a^0(\cdot, \cdot): \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个与参数变量 ξ 无关的双线性形式,而 $a^1(\cdot, \cdot; \xi): \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个与参数变量 ξ 有关的双线性形式. 弱形式(2)可以重写为

$$a^0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + q(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = b(\mathbf{v}; \xi) + a^1(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \xi). \quad (13)$$

算法2给出了求解双重连续介质模型(1)的迭代算法. 具体如下:

算法2 含参双重连续介质模型的迭代算法

step 1: 对于每个 $\xi \in D$, 通过解以下问题找到 $\mathbf{U}_0 := \mathbf{U}_0(\xi) \in \mathbf{V}$:

$$a^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{v}) + q(\mathbf{U}_0, \mathbf{v}) = b(\mathbf{v}; \xi), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \quad (14)$$

step 2: 对于每个 $\xi \in D$, 通过解以下问题递归确定 $\{\mathbf{U}_n := \mathbf{U}_n(\xi)\}_{n \geq 1} \subset \mathbf{V}$:

$$a^0(\mathbf{U}_n, \mathbf{v}) + q(\mathbf{U}_n, \mathbf{v}) = b(\mathbf{v}; \xi) - a^1(\mathbf{U}_{n-1}, \mathbf{v}; \xi), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \quad (15)$$

为了确保算法的收敛性和高效计算,本文必须确保 $\kappa_i^0(x, \xi)$ 和 $\kappa_i^1(x, \xi)$ 之间的比例关系满足特定条件,这样才能保证算法的收敛性. 这个条件对于特定问题具有显著的依赖性,详细条件如下:

$$\underline{\kappa}^0 - 2\bar{\sigma}C_p \geq \bar{\kappa}^1, \quad (16)$$

其中

$$\kappa_i^0 \leq \kappa_i^0(x), \quad \bar{\kappa}^1 \geq \kappa_i^1(x, \xi), \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi \in D, \quad i = 1, 2.$$

注 1 算法 2 的核心优势在于其弱形式中左侧项的一致性:无论是在方程 (14) 还是方程 (15) 中,弱形式的左侧均保持相同,且与参数 ξ 无关,仅右侧项依赖于参数 ξ . 这一特性为算法的高效实现提供了重要基础. 具体而言,当要求解大量不同参数的问题时,可以利用左侧项的一致性设计快速求解器,从而显著提升算法 2 中两个步骤的计算效率. 这种设计不仅有效避免了重复计算的计算量,还为处理高维参数空间问题提供了可行的计算框架.

根据双线性泛函的定义 (12), 问题 (1) 的有限元离散格式可以被重新定义为

$$a_0(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) + q(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) = b(\mathbf{v}^h; \xi) - a_1(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h; \xi). \quad (17)$$

本文进一步可推导出算法 2 的有限元离散形式. 具体而言,通过对弱形式进行空间离散化,并利用有限元基函数的性质,算法 2 可以自然地转化为一个线性代数系统. 这种离散形式不仅保留了原算法的核心特性,还为数值实现提供了清晰的数学框架. 具体见算法 3.

算法 3 双重连续介质模型 FEM 逼近格式下的迭代算法

step 1: 对于每个 $\xi \in D$, 通过解以下问题找到 $U_0^h(\xi) \in V_0^h$

$$a^0(U_0^h, \mathbf{v}^h) + q(U_0^h, \mathbf{v}^h) = b(\mathbf{v}^h; \xi), \quad \forall \mathbf{v} \in V_0^h. \quad (18)$$

step 2: 对于每个 $\xi \in D$, 通过解以下问题递归确定 $\{U_n^h := U_n^h(\xi)\}_{n \geq 1} \subset V_0^h$

$$a^0(U_n^h, \mathbf{v}^h) + q(U_n^h, \mathbf{v}^h) = b(\mathbf{v}^h; \xi) - a^1(U_{n-1}^h, \mathbf{v}^h; \xi), \quad \forall \mathbf{v} \in V_0^h. \quad (19)$$

2.2 含参双重连续介质模型的 GmsFEM 格式

对于含参双重连续介质模型,利用非耦合 GmsFEM 构建多尺度降基空间时,每个连续体上的多尺度基函数是独立构造的,此时仅考虑了渗透率 $\kappa_i(x; \xi)$ 而忽略了交互项 $\sigma(x)$ 的作用.

为了构建第 i 个连续体在子区域 ω_i 上的局部多尺度基函数,本文求解下列局部特征值问题:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa_i(x) \nabla \psi_{\ell,i}^{(j)}) = \lambda_{i,\ell} \widetilde{\kappa(x)} \psi_{\ell,i}^{(j)}, & \text{in } \omega_j, \\ \kappa_i(x) \cdot \nabla \psi_{\ell,i}^{(j)} \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{on } \partial\omega_j, \end{cases} \quad (20)$$

其中, $\widetilde{\kappa_i(x)} = \kappa_i(x) \sum_{i=1}^{N_c} H^2 |\nabla \chi_{j,i}|^2$. $\{\chi_{j,i}\}_{i=1}^{N_c}$ 表示的定义为第 i 个连续体在局部支撑域 ω_j 上的一组单位分解函数,定义如下:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa_i(x) \nabla \chi_{j,i}) = 0, & \forall K \text{ in } \omega_j, \\ \chi_{j,i} = \chi_{j,i}^0, & \text{on } \partial K, \end{cases}$$

这里, $\chi_{j,i}^0$ 表示标准的线性单位分解函数,且 $\chi_{j,i}^0$ 在局部支撑域 ω_j 上是非零.

接下来,本文假设定义在细网格结点上基函数为 $\{\phi_{j,m}\}_{m=1}^{N_h}$. 经有限元离散,本文得到特征问题 (20) 的矩阵形式为

$$\mathbf{A} \psi_{\ell,i}^{(j)} = \lambda_{\ell,i}^{(j)} \mathbf{S} \psi_{\ell,i}^{(j)}, \quad (21)$$

其中, $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{S}$ 的定义如下:

$$(\mathbf{A})_{m,n} = (\kappa_i(x) \nabla \phi_{j,m}, \nabla \phi_{j,n})_{L^2(\omega_j)}, \quad (\mathbf{S})_{m,n} = (\widetilde{\kappa_i(x)} \phi_{j,m}, \phi_{j,n})_{L^2(\omega_j)}.$$

通过对特征问题 (20) 的求解,可以得到一系列特征值 $\{\lambda_{\ell,i}^{(j)}\}_{i=1}^{N_h}$ 和 $\{\psi_{\ell,i}^{(j)}\}_{i=1}^{N_h}$. 然后选取其中 M_i 个较小特征值及其对应的特征函数,从而可得到局部多尺度降基空间:

$$V_{\text{ms}}^i(\omega_j) := \operatorname{span} \{\psi_{\ell,i}^{(j)}, 1 \leq \ell \leq M_i\}.$$

进一步,本文可以得到全局多尺度降基空间:

$$V_{\text{ms}}^i(\Omega) := \sum_{j=1}^{N_c} V_{\text{ms}}^i(\omega_j) = \operatorname{span} \{\psi_{\ell,i}^{(j),\text{ms}}: \psi_{\ell,i}^{(j),\text{ms}} = \chi_{j,i} \psi_{\ell,i}^{(j)}, 1 \leq j \leq N_c, 1 \leq \ell \leq M_i\}.$$

最后,多尺度降基空间 $V_{\text{ms}}(\Omega) = V_{\text{ms}}^1(\Omega) \times V_{\text{ms}}^2(\Omega)$. 将这些样本函数用细网格上基函数表示的系数存储在一个矩阵中,即得到第 i 个连续体对应的全局降基矩阵:

$$\mathbf{R}_{\text{re}}^i = [\psi_{1,i}^{(1),\text{ms}}, \dots, \psi_{M_i,i}^{(1),\text{ms}}, \dots, \psi_{1,i}^{(N_c),\text{ms}}, \dots, \psi_{M_i,i}^{(N_c),\text{ms}}].$$

进一步,构造适用于整个耦合连续介质模型的全局降基矩阵

$$\mathbf{R}_{\text{re}} = [\mathbf{R}_{\text{re}}^1, \mathbf{R}_{\text{re}}^2].$$

注2 在线过程中,多尺度基函数可以重复利用.相比在细网格上直接求解,GMsFEM可以大大提高计算效率.

在得到多尺度基有限元空间 $\mathbf{V}_{\text{ms}}(\Omega)$ 后,本文则可以将原问题(1)在多尺度降基空间求解,即找到 $\mathbf{u}^{\text{ms}}(x) = (u_1^{\text{ms}}(x), u_2^{\text{ms}}(x)) \in \mathbf{V}_{\text{ms}}(\Omega)$, 对于任意的 $\mathbf{v}^{\text{ms}} = (v_1^{\text{ms}}, v_2^{\text{ms}}) \in \mathbf{V}_{\text{ms}}(\Omega)$, 满足

$$a(\mathbf{u}^{\text{ms}}, \mathbf{v}^{\text{ms}}) + q(\mathbf{u}^{\text{ms}}, \mathbf{v}^{\text{ms}}) = b(\mathbf{v}^{\text{ms}}). \quad (22)$$

2.3 含参双重连续介质模型的 Gms-Iter 方法及其矩阵形式

在算法3中,迭代函数列 $\{\mathbf{U}_n\}_{n \geq 0}$ 具有多尺度特征,如何有效地在多尺度物理空间中计算迭代函数列是另一个巨大的挑战.本文选择第2.2小节描述的非耦合 GMsFEM,并结合迭代方法,给出含参双重连续介质模型的 Gms-Iter 方法.

对于任意的随机变量 $\xi \in \mathcal{D}$, 本文将含参双重连续介质模型投影至多尺度降基空间 $\mathbf{V}_{\text{ms}}(\Omega) = V_{\text{ms}}^1(\Omega) \times V_{\text{ms}}^2(\Omega)$ 中进行求解.具体过程见算法4.

算法4 含参双重连续介质模型的 Gms-Iter 算法

step 1: 对于每个 $\xi \in D$, 通过解以下问题找到 $\mathbf{U}_0^{\text{ms}} = \mathbf{U}_0^{\text{ms}}(\xi) \in \mathbf{V}_{\text{ms}}(\Omega)$:

$$a^0(\mathbf{U}_0^{\text{ms}}, \mathbf{v}_{\text{ms}}) + \sigma(\mathbf{U}_0^{\text{ms}}, \mathbf{v}_{\text{ms}}) = b(\mathbf{v}_{\text{ms}}; \xi), \quad \forall \mathbf{v}_{\text{ms}} \in \mathbf{V}_{\text{ms}}(\Omega), \quad (23)$$

step 2: 对于每个 $\xi \in D$, 通过解以下问题递归确定 $\{\mathbf{U}_n^{\text{ms}} = \mathbf{U}_n^{\text{ms}}(\xi)\}_{n \geq 1} \subset \mathbf{V}_{\text{ms}}(\Omega)$:

$$a^0(\mathbf{U}_n^{\text{ms}}, \mathbf{v}_{\text{ms}}) + \sigma(\mathbf{U}_n^{\text{ms}}, \mathbf{v}_{\text{ms}}) = b(\mathbf{v}_{\text{ms}}; \xi) - a^1(\mathbf{U}_{n-1}^{\text{ms}}, \mathbf{v}_{\text{ms}}; \xi), \quad \forall \mathbf{v}_{\text{ms}} \in \mathbf{V}_{\text{ms}}(\Omega). \quad (24)$$

接下来,本小节将采用矩阵形式来描述基于 Gms-Iter 方法.矩阵表示不仅为数值实现提供了必要的数学工具,还能够更清晰地展示迭代方法的计算优势.在前一小节中,本文已经详细介绍了多尺度基函数及其对应的离线空间 $\mathbf{V}_{\text{ms}}(\Omega)$ 的构造过程.基于这些多尺度基函数,本文进一步将其组装为一个代数系统,从而为后续的数值计算奠定基础.这种矩阵化的表达方式不仅简化了计算流程,还为高效求解多尺度问题提供了理论支持.

在有限元离散框架下,方程(18)、方程(19)可以转化为如下矩阵形式:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_0 \mathbf{U}_{n,h}(\xi) + \mathbf{B} \mathbf{U}_{n,h}(\xi) = \mathbf{b}, & n = 0, \\ \mathbf{A}_0 \mathbf{U}_{n,h}(\xi) + \mathbf{B} \mathbf{U}_{n,h}(\xi) = \mathbf{b} - \mathbf{A}_1 \mathbf{U}_{n-1,h}(\xi), & n \geq 1. \end{cases} \quad (25)$$

这里的刚度矩阵 $\mathbf{A}_0$ 和 $\mathbf{A}_1$ 分别为

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{0,1} \\ \mathbf{A}_{0,2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1} \\ \mathbf{A}_{1,2} \end{bmatrix},$$

其中

$$(\mathbf{A}_{0,i_1})_{ij} = a^0(\psi_{i,i_1}^h, \psi_{j,i_1}^h), \quad (\mathbf{A}_{1,i_1})_{ij} = a^1(\psi_{i,i_1}^h, \psi_{j,i_1}^h),$$

类似地,解函数序列 $\{\mathbf{U}_n^{\text{ms}}\}_{n \geq 0}$ 的 GMsFEM 近似形式可以表示为

$$\mathbf{U}_n^{\text{ms}}(x, \xi) = \sum_{\ell} \mathbf{c}_{\ell}(\xi) \boldsymbol{\psi}_{\ell}^T(x), \quad \boldsymbol{\psi}_{\ell}(x) \in \mathbf{V}_{\text{ms}},$$

其中 $\mathbf{c}_{\ell}(\xi) = (c_{\ell,1}(\xi), c_{\ell,2}(\xi))$. 接下来,本文可以将方程(23)、方程(24)重新表述为以下矩阵形式:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_0^{\text{ms}} \mathbf{C}_n^{\text{ms}}(\xi) + \mathbf{B}^{\text{ms}} \mathbf{C}_n^{\text{ms}}(\xi) = \mathbf{b}^{\text{ms}}, & n = 0, \\ \mathbf{A}_0^{\text{ms}} \mathbf{C}_n^{\text{ms}}(\xi) + \mathbf{B}^{\text{ms}} \mathbf{C}_n^{\text{ms}}(\xi) = \mathbf{b}^{\text{ms}} - \mathbf{A}_1^{\text{ms}} \mathbf{C}_{n-1}^{\text{ms}}, & n \geq 1, \end{cases} \quad (26)$$

其中,压力场的系数存储在向量 $\mathbf{C}_n^{\text{ms}} = (c_{1,1}, c_{2,1}, \dots, c_{M,1}, c_{1,2}, c_{2,2}, \dots, c_{M,2})^T$ 中.通过引入约化矩阵 $\mathbf{R}_{\text{re}}^T$, 降基后的刚度矩阵、质量矩阵和负载向量,分别为 $\mathbf{A}_0^{\text{ms}}, \mathbf{A}_1^{\text{ms}}, \mathbf{B}^{\text{ms}}$ 以及 $\mathbf{b}^{\text{ms}}$, 其具体形式如下:

$$\mathbf{A}_0^{\text{ms}} = \mathbf{R}_{\text{re}} \mathbf{A}_0 \mathbf{R}_{\text{re}}^T, \quad \mathbf{A}_1^{\text{ms}} = \mathbf{R}_{\text{re}} \mathbf{A}_1 \mathbf{R}_{\text{re}}^T,$$

$$\mathbf{B}^{\text{ms}} = \mathbf{R}_{\text{re}} \mathbf{B} \mathbf{R}_{\text{re}}^T, \quad \mathbf{b}^{\text{ms}} = \mathbf{R}_{\text{re}} \mathbf{b}.$$

对于每一个参数 ξ , 令 ϵ_n 为相邻两次迭代解之间的误差,

$$\epsilon_n = \| \mathbf{U}_n^{\text{ms}}(x, \xi) - \mathbf{U}_{n-1}^{\text{ms}}(x, \xi) \|_{L^2(\Omega)}, \quad n \geq 1.$$

本文在算法 5 中描述 Gms-Iter 方法求解含参双重连续介质模型的具体过程.

算法 5 Gms-Iter 方法求解含参双重连续介质模型的具体过程

输入: 样本集 $W \in \mathcal{D}$, 样本数 N , 源项 f , 转移函数 $\sigma, \kappa^1, \kappa^0$, 最大迭代次数 N_{iter} , 终止条件 ϵ .

输出: 所有样本下的均值 $\mathbb{E}(\mathbf{U}^{\text{ms}}) = (1/N) \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_n^{\text{ms}}(x, \xi_j)$

离线阶段:

① 通过 GmsFEM 生成多尺度有限元空间 $\mathbf{V}_{\text{ms}}(\Omega)$ 和降阶矩阵 R_{re} ;

② 生成刚度矩阵 $\mathbf{A}_0^{\text{ms}}$ 和质量矩阵 $\mathbf{B}$ 在 $\mathbf{V}_{\text{ms}}(\Omega) \times \mathbf{V}_{\text{ms}}(\Omega)$ 上;

③ 计算并存储 $\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_0^{\text{ms}} + \mathbf{B}^{\text{ms}})^{-1}$;

在线阶段:

初始化: $\mathbb{E}(\mathbf{U}^{\text{ms}}) = 0$;

for $j = 1$ to N

$n \leftarrow 0$;

在方程(26)中,通过 $\mathbf{A}'$ 计算 $\mathbf{C}_0^{\text{ms}}(\xi_j)$;

$$\mathbb{E}(\mathbf{U}^{\text{ms}}) \leftarrow \mathbb{E}(\mathbf{U}^{\text{ms}}) + \frac{1}{N} \mathbf{C}_0^{\text{ms}}(\xi_j);$$

while $n \leq N_{\text{iter}}$ and $\epsilon_n \geq \epsilon$

$n \leftarrow n + 1$;

在方程(26)中,通过 $\mathbf{A}'$ 计算 $\mathbf{C}_n^{\text{ms}}(\xi_j)$;

$$\mathbb{E}(\mathbf{U}^{\text{ms}}) \leftarrow \mathbb{E}(\mathbf{U}^{\text{ms}}) + \frac{1}{N} \mathbf{C}_n^{\text{ms}}(\xi_j);$$

求解 ϵ_n ;

end while

end for.

线性方程组的求解方法通常分为直接求解法和迭代求解法两类,其中直接求解法以其计算速度快、精度高的特点而著称.在本研究中,本文通过 GmsFEM 对原问题进行了降维处理,使得系数矩阵 $\mathbf{A}'$ 的维数显著降低.基于这一特点,本文选择了直接求解法作为主要的数值求解策略.总体而言,算法 5 具有以下显著的计算优势:

高效的单次访问:仅需对 $\mathbf{A}'$ 进行一次访问即可解决所有相关问题;当 $\mathbf{A}'$ 的访问或生成成为线性求解器的主要计算瓶颈时,这一特性能够显著提升计算效率.

因子分解的复用性:若对 $\mathbf{A}'$ 进行了因子分解,则只需在初始阶段完成一次分解操作,后续所有问题的求解均可直接复用该分解结果,从而进一步降低计算成本.

这些优势使得算法 5 在处理高维或多尺度问题时表现出卓越的计算性能.

3 收敛性分析

在本节中,结合 GmsFEM 的收敛性分析以及迭代方法的收敛性理论,对 Gms-Iter 方法的收敛性进行详细研究.

首先,函数 $\mathbf{v}$ 的能量范数定义如下:

$$\|\mathbf{v}\|_a = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \kappa_i^0(x) |\nabla v_i|^2 dx.$$

接下来,本文将对解析解与 GmsFEM 解之间的误差进行定量估计.在展开具体的误差分析之前,需要建立相应的理论框架并引入必要的预备性结果.具体而言,本文将首先给出若干关键定义和辅助引理,为后续的误差估计奠定严格的数学基础.

定义 1(插值函数) 假设 $I_0 u$ 表示函数 u 由前 L_i 个特征函数 ψ_i 定义的局部插值函数, 即

$$I_0 u = \sum_{i=1}^{L_i} u_i \psi_i,$$

其中 $\{\psi_i\}$ 是特征问题(21)求解的特征函数.

引理 1 令函数 $\{\chi_i\}_{i=1}^{N_c}$ 是下列方程的解

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa(x) \nabla \chi_i) = 0, & \forall K \text{ in } \omega_i, \\ \chi_i = L_i, & \text{on } \partial K. \end{cases}$$

定义 g 表示残差函数, 且满足下列方程

$$-\operatorname{div}(\kappa(x) \nabla (u - I_0 u)) = g.$$

若定义

$$\begin{aligned} \Lambda &= \sum_{i=1}^{N_c} \int_{\omega_i} \kappa(x) |\nabla \chi_i|^2 |u - I_0 u|^2 dx, \\ Y &= \sum_{i=1}^{N_c} \int_{\omega_i} \kappa(x) |\chi_i|^2 |\nabla (u - I_0 u)|^2 dx, \\ \Pi &= \sum_{i=1}^{N_c} \int_{\omega_i} g \chi_i^2 (u - I_0 u) dx, \end{aligned}$$

可得到如下估计:

$$Y \leq C_1 \Lambda + C_2 \Pi.$$

引理 2 Π_1, Λ_1 如引理 1 中定义, $\Gamma_1 = \int_{\omega_i} (\kappa(x) |\nabla \chi_i|^2)^{-1} g^2$, 则存在常数 $C > 0$ 满足

$$\Pi_1 \leq C \Gamma_1 + C \Lambda_1.$$

引理 3 Λ, Y, Γ, Π 如引理 1 和引理 2 中所定义, 本文可以得到

$$Y \leq C_1 \Lambda + C_2 \Gamma.$$

引理 4 $I_0 u$ 为定义 1 中所定义的插值函数, 本文有

$$\int_{\omega_i} \sum_j \kappa(x) \cdot |\nabla \chi_j|^2 |u - I_0 u|^2 dx \leq \frac{1}{\lambda_{L_i+1}^{\omega_i}} \int_{\omega_i} \kappa(x) \cdot |\nabla (u - I_0 u)|^2 dx.$$

引理 5 本文首先定义 $\alpha_{L_i+1}^{\omega_i} = \frac{\int_{\omega_i} \kappa(x) (\nabla (u - I_0 u))^2 dx}{\int_{\omega_i} \kappa(x) \chi_i^2 |\nabla (u - I_0 u)|^2 dx}$ 及 $\Lambda_* = \min \frac{\lambda_{L_i+1}^{\omega_i}}{\alpha_{L_i+1}^{\omega_i}}, \Lambda$ 如引理 1 中所定义. 则存

在常数 $C_1 > 0$ 和 $C_2 > 0$, 本文有

$$\Lambda \leq C_1 \frac{1}{\Lambda_*} \Lambda + C_2 \frac{1}{\Lambda_*} \Pi.$$

注 3 根据引理 2, 将上述命题结果进一步放大可得

$$\Lambda \leq (C_1 + CC_2) \frac{1}{\Lambda_*} \Lambda + CC_2 \frac{1}{\Lambda_*} \Gamma.$$

取 $C' = \max \{C_1 + CC_2, CC_2\}$, 则有

$$\Lambda \leq C' \frac{1}{\Lambda_*} \Lambda + C' \frac{1}{\Lambda_*} \Gamma.$$

对该不等式进行 n 次递推, 可得

$$\begin{aligned} \Lambda &\leq C' \frac{1}{\Lambda_*} \left(C' \frac{1}{\Lambda_*} \Lambda + C' \frac{1}{\Lambda_*} \Gamma \right) + C' \frac{1}{\Lambda_*} \Gamma = \\ &C'^2 \frac{1}{\Lambda_*^2} \Lambda + C'^2 \frac{1}{\Lambda_*^2} \Gamma + C' \frac{1}{\Lambda_*} \Gamma \cdots \leq \\ &C'^n \frac{1}{\Lambda_*^n} \Lambda + \left(C'^n \frac{1}{\Lambda_*^n} + C'^{n-1} \frac{1}{\Lambda_*^{n-1}} + \cdots + C' \frac{1}{\Lambda_*} \right) \Gamma \stackrel{C' \geq 1}{\leq} \end{aligned}$$

$$C'^n \frac{1}{\Lambda_*^n} \Lambda + \left(\frac{1}{\Lambda_*^n} + \frac{1}{\Lambda_*^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{\Lambda_*} \right) C'^n \Gamma.$$

令 $C'' = (C')^n$ 并应用等比数列求和公式

$$\Lambda \leq C'' \frac{1}{\Lambda_*^n} \Lambda + \left(\frac{1 - \Lambda_*^{-n}}{\Lambda_* - 1} \right) C'' \Gamma.$$

引理 6 $I_0 \mathbf{u}$ 表示 $\mathbf{u}$ 的插值函数,本文有

$$\int_{\omega_i} \kappa(x) (\nabla(\mathbf{u} - I_0 \mathbf{u}))^2 dx \leq C \int_{\omega_i} \kappa(x) |\nabla \mathbf{u}|^2 dx.$$

假设 4 本文假设 Γ 和 $\int_{\Omega} \kappa(x) |\nabla \mathbf{u}|^2$ 均是有界的,即

$$\Gamma_1 = \int_{\omega_i} (\kappa(x) |\nabla \chi_i|^2)^{-1} g^2 dx \leq CH^2.$$

$$\int_{\Omega} \kappa(x) |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \leq C.$$

定理 3 令 $\mathbf{u}$ 表示双重连续介质模型(1)的解, $\mathbf{u}^{\text{ms}}$ 表示 GMsFEM 解.在上述假设及引理下,本文有

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\text{ms}}\|_a^2 \leq CH \Lambda_*^{\epsilon-1} \|\mathbf{u}\|_{E(\Omega)}^2 + 2CH^2 \frac{\Lambda_* - H \Lambda_*^{\epsilon}}{\Lambda_* - 1}.$$

证明

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\text{ms}}\|_a^2 &= a(\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\text{ms}}, \mathbf{u} - \mathbf{u}^{\text{ms}}; \xi) = \\ &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \kappa_i(x) |\nabla(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_i^{\text{ms}})|^2 dx. \end{aligned} \quad (27)$$

接下来,本文首先给出 $\int_{\Omega} \kappa_i(x) |\nabla(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_i^{\text{ms}})|^2 dx$ 的估计.

令 $\mathbf{u}_{i,l}$ 为有限元空间 $\mathbf{V}_h(\Omega)$ 中的任一函数, $I_0 \mathbf{u}_i$ 为函数 $\mathbf{u}_i$ 定义在局部区域 ω_i 上的局部插值函数.根据 Cea 引理,本文有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \kappa_i(x) |\nabla(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_i^{\text{ms}})|^2 dx &\leq \\ \int_{\Omega} \kappa_i(x) |\nabla(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i,l})|^2 dx &= \\ \int_{\Omega} \kappa_i(x) |\nabla(\sum_i \chi_i(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_i^{\text{ms}}))|^2 dx &\leq \\ S_1 \sum_{i=1}^{N_c} \int_{\omega_i} \kappa_i(x) |\nabla(\chi_i(\mathbf{u}_i - I_0 \mathbf{u}_i))|^2 dx &= \\ S_1 \sum_{i=1}^{N_c} \int_{\omega_i} \kappa(x) |\nabla \chi_i(\mathbf{u}_i - I_0 \mathbf{u}_i) + \chi_i \nabla(\mathbf{u}_i - I_0 \mathbf{u}_i)|^2 dx &\leq \\ 2S_1 \sum_{i=1}^{N_c} \int_{\omega_i} (\kappa(x) |\nabla \chi_i(\mathbf{u}_i - I_0 \mathbf{u}_i)|^2 + K |\chi_i \nabla(\mathbf{u}_i - I_0 \mathbf{u}_i)|^2) dx &=^{S_2=2S_1} \\ S_2 \sum_{i=1}^{N_c} \int_{\omega_i} \kappa(x) |\nabla \chi_i|^2 |\mathbf{u}_i - I_0 \mathbf{u}_i|^2 dx + S_2 \sum_{i=1}^{N_c} \int_{\omega_i} \kappa(x) |\chi_i|^2 |\nabla(\mathbf{u}_i - I_0 \mathbf{u}_i)|^2 dx &= \\ S_2 \Lambda + S_2 \Upsilon &\leq S_2 \Lambda + S_2(C_1 \Lambda + C_2 \Gamma) = \\ (S_2 + C_1 S_2) \Lambda + S_2 C_2 \Gamma. \end{aligned}$$

令 $C_3 = S_2 + C_1 S_2, C_4 = S_2 C_2$, 上述不等式可以重写为

$$\int_{\Omega} \kappa_i(x) |\nabla(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_i^{\text{ms}})|^2 dx \leq C_3 \Lambda + C_4 \Gamma.$$

通过注 3,则有

$$\int_{\Omega} \kappa_i(x) |\nabla(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_i^{\text{ms}})|^2 dx \leq C_3 \left(C'' \frac{1}{\Lambda_*^n} \Lambda + C'' \frac{1 - \Lambda_*^{-n}}{\Lambda_* - 1} \Gamma \right) + C_4 \Gamma =$$

$$C_3 C'' \frac{1}{\Lambda_*^n} \Lambda + \left(C'' \frac{1 - \Lambda_*^{-n}}{\Lambda_* - 1} + C_4 \right) \Gamma.$$

取 $C = C_3 C''$, 可得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \kappa_i(x) |\nabla(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_i^{\text{ms}})|^2 dx &\leq C \frac{1}{\Lambda_*^n} \Lambda + \left(C'' \frac{1 - \Lambda_*^{-n}}{\Lambda_* - 1} + C_4 \right) \Gamma = \\ C \frac{1}{\Lambda_*^n} \Lambda + \left(C'' \frac{1 - \Lambda_*^{-n}}{\Lambda_* - 1} + C_4 \right) \Gamma. \end{aligned} \quad (28)$$

由引理 4, 可得

$$\begin{aligned} \Lambda &= \sum_i \int_{\omega_i} \kappa_i(x) |\nabla \chi_i|^2 (\mathbf{u}_i - I_0 \mathbf{u}_i)^2 dx \leq \\ &\sum_i \int_{\omega_i} \kappa_i(x) \sum_j |\nabla \chi_j|^2 (\mathbf{u}_i - I_0 \mathbf{u}_i)^2 dx \leq \\ &\frac{1}{\lambda_{L_i+1}^{\omega_i}} \sum_i \int_{\omega_i} \kappa_i(x) |\nabla(\mathbf{u}_i - I_0 \mathbf{u}_i)|^2 dx \leq \\ &\frac{\alpha_{L_i+1}^{\omega_i}}{\lambda_{L_i+1}^{\omega_i}} \sum_i \int_{\omega_i} \kappa_i(x) |\nabla(\mathbf{u}_i - I_0 \mathbf{u}_i)|^2 dx \leq \\ &\frac{1}{\Lambda_*} \sum_i \int_{\omega_i} \kappa_i(x) |\nabla(\mathbf{u}_i - I_0 \mathbf{u}_i)|^2 dx. \end{aligned} \quad (29)$$

将关于 Λ 的不等式 (29) 代入不等式 (28) 中, 可得到

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \kappa_i(x) |\nabla(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_i^{\text{ms}})|^2 dx &\leq \\ C \frac{1}{\Lambda_*^{n+1}} \sum_i \int_{\omega_i} \kappa_i(x) |\nabla(\mathbf{u}_i - I_0 \mathbf{u}_i)|^2 dx + \left(C'' \frac{1 - \Lambda_*^{-n}}{\Lambda_* - 1} + C_4 \right) \Gamma. \end{aligned} \quad (30)$$

结合不等式 (30), 可进一步得到

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \kappa_i(x) |\nabla(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_i^{\text{ms}})|^2 dx &\leq \\ C \frac{1}{\Lambda_*^{n+1}} \int_{\Omega} \kappa_i(x) |\nabla(\mathbf{u}_i - I_0 \mathbf{u}_i)|^2 dx + \left(C'' \frac{1 - \Lambda_*^{-n}}{\Lambda_* - 1} + C_4 \right) \Gamma &\leq \\ C \frac{1}{\Lambda_*^{n+1}} \int_{\Omega} \kappa_i(x) |\nabla \mathbf{u}_i|^2 dx + \left(C'' \frac{1 - \Lambda_*^{-n}}{\Lambda_* - 1} + C_4 \right) \Gamma &\stackrel{C'' = \max\{C'', C_4\}}{\leq} \\ C \frac{1}{\Lambda_*^{n+1}} \int_{\Omega} \kappa_i(x) |\nabla \mathbf{u}_i|^2 dx + C'' \left(\frac{1 - \Lambda_*^{-n}}{\Lambda_* - 1} + 1 \right) \Gamma. \end{aligned} \quad (31)$$

这里, 本文取 $n = \left\lceil -\frac{\log H}{\log \Lambda_*} \right\rceil = -\frac{\log H}{\log \Lambda_*} - \epsilon$ ($0 < \epsilon < 1$), 其中 $\log H$ 与 $\log \Lambda_*$ 是同一个底数的对数, 则可直接得到

$$\begin{cases} \frac{1}{\Lambda_*^{n+1}} = H \Lambda_*^{\epsilon-1}, \\ \frac{1 - \Lambda_*^{-n}}{\Lambda_* - 1} + 1 = \frac{\Lambda_* - H \Lambda_*^{\epsilon}}{\Lambda_* - 1}. \end{cases}$$

将 n 代入不等式 (31) 中, 可得 $\int_{\Omega} \kappa_i(x) |\nabla(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_i^{\text{ms}})|^2 dx$ 的估计

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \kappa_i(x) |\nabla(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_i^{\text{ms}})|^2 dx &\leq \\ C H \Lambda_*^{\epsilon-1} \int_{\Omega} \kappa_i(x) |\nabla \mathbf{u}_i|^2 dx + C H^2 \frac{\Lambda_* - H \Lambda_*^{\epsilon}}{\Lambda_* - 1} &\leq \end{aligned}$$

$$CHA_*^{\epsilon^{-1}} \|u_i\|_a^2 + CH^2 \frac{\Lambda_* - H\Lambda_*^\epsilon}{\Lambda_* - 1}. \quad (32)$$

将上述估计结果(32)代入式(27),可得到最终的误差估计

$$\begin{aligned} \|u - u^{ms}\|_a^2 &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \kappa_i(x) |\nabla(u_i - u_i^{ms})|^2 dx \leq \\ &CHA_*^{\epsilon^{-1}} \|u\|_a^2 + 2CH^2 \frac{\Lambda_* - H\Lambda_*^\epsilon}{\Lambda_* - 1}. \end{aligned} \quad (33)$$

证毕. $\square$

在给出 Gms-Iter 与参考解之间的误差结果之前,本文先证明了 $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ 和 $\|v\|_a$ 之间的范数等价关系.

引理 7 在假设 1 下,存在常数 $\alpha_0 > 0$ 和 $\beta_0 > 0$, 对于任意 $v \in V$, 满足以下不等式:

$$\alpha_0 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_a \leq \beta_0 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

证明 根据 Poincaré 不等式,存在一个正常数 C_p , 使得对于所有的 $v_i \in H_0^1(\Omega)$, $i = 1, 2$, 成立

$$\|v_i\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p \|\nabla v_i\|_{L^2(\Omega)}.$$

因此,本文得到

$$\begin{aligned} \|v\|_{a_Q}^2 &\geq \kappa^0 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2\bar{\sigma} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \\ &\kappa^0 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2\bar{\sigma} C_p \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} \|v\|_{a_Q}^2 &\leq \bar{\kappa}^0 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\bar{\sigma} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ &\bar{\kappa}^0 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\bar{\sigma} C_p \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

其中

$$\bar{\kappa}^0 = \max_{x \in \Omega, i=1,2} \kappa_i(x).$$

根据上述两个不等式和假设,可以推断出以下范数等价关系:

$$\alpha_0 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{a_Q} \leq \beta_0 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)},$$

其中 $\alpha_0 = \kappa^0 - 2\bar{\sigma} C_p$, $\beta_0 = \bar{\kappa}^0 + 2\bar{\sigma} C_p$.

证毕. $\square$

文献[22]表明,在假设 1 下,问题(2)存在唯一解.

定理 4 在假设 1 下,问题(2)的解 $u(\xi) \in V$ 存在且唯一,并且满足

$$\|u(\xi)\|_a \leq C_1 \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \xi \in D,$$

其中, $f = (f_1, f_2)$, 常数 C_1 与随机参数 ξ 无关.

基于上述引理,本文可以进一步推导由算法 2 生成的 $\{u_n(\xi)\}_{n \geq 0}$ 的收敛性结果.

定理 5 假设 $u(\xi)$ 是方程(2)的解, $\{u_n(\xi)\}_{n \geq 0}$ 是由算法 2 生成的迭代解.对于常数 $\rho \in (0, 1)$ 满足 $\bar{\kappa}^1/(\alpha_0)^2 \leq \rho$ 的条件下,本文可以进一步得出

$$\|u(\xi) - u_n(\xi)\|_{a_Q} \leq C_1 \rho^{n+1} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \xi \in D,$$

其中,常数 $C_1 > 0$ 且与随机参数 ξ 无关.

证明 对于任一随机参数 $\xi \in D$, 当 $n \geq 0$ 时,令 $r_n = r_n(\xi) = u(\xi) - u_n(\xi) \in V$. 通过将方程(13)减去方程(14),可以得到 $n = 0$ 时的残差方程,即

$$a^0(r_0, v) + q(r_0, v) = -a^1(u, v; \xi), \quad \forall v \in V. \quad (34)$$

类似地,将方程(13)减去方程(15),可得到 $n > 0$ 时的残差方程

$$a^0(r_n, v) + q(r_n, v) = -a^1(r_{n-1}, v; \xi), \quad \forall v \in V. \quad (35)$$

在残差方程(34)中将测试函数 v 选定为 r_0 , 得到

$$a^0(r_0, r_0) + q(r_0, r_0) = -a^1(u, r_0; \xi). \quad (36)$$

上式的左端定义为

$$\| \mathbf{r}_0 \|_{a_Q}^2 = a^0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0) + q(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0). \quad (37)$$

方程(36)的右端通过 Cauchy-Schwarz 不等式和引理 7, 可得到

$$\begin{aligned} | -a^1(\mathbf{u}, \mathbf{r}_0; \boldsymbol{\xi}) | &\leq \bar{\kappa}^1 \| \nabla \mathbf{u} \|_{L^2(\Omega)} \| \nabla \mathbf{r}_0 \|_{L^2(\Omega)} \leq \\ &\frac{\bar{\kappa}^1}{(\alpha_0)^2} \| \mathbf{u} \|_a \| \mathbf{r}_0 \|_a. \end{aligned} \quad (38)$$

通过方程(36)–(38), 可以得到

$$\| \mathbf{r}_0 \|_{a_Q} \leq \frac{\bar{\kappa}^1}{(\alpha_0)^2} \| \mathbf{u} \|_{a_Q} \leq \rho \| \mathbf{u} \|_{a_Q}.$$

在残差方程(35)中, 选定 $\mathbf{v} = \mathbf{r}_n$, 可得到

$$a^0(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_n) + q(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_n) = -a^1(\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{r}_n; \boldsymbol{\xi}). \quad (39)$$

类似地, 本文也可以得到

$$\| \mathbf{r}_n \|_{a_Q} \leq \frac{\bar{\kappa}^1}{(\alpha_0)^2} \| \mathbf{r}_{n-1} \|_{a_Q} \leq \rho \| \mathbf{r}_{n-1} \|_{a_Q}.$$

通过归纳, 本文有

$$\| \mathbf{r}_n \|_{a_Q} \leq \rho^{n+1} \| \mathbf{u} \|_{a_Q} \leq C_1 \rho^{n+1} \| \mathbf{f} \|_{L^2(\Omega)}.$$

证毕. □

注 4 该定理从理论上保证了算法 2 生成的迭代逼近解序列 $\{ \mathbf{u}_n(\boldsymbol{\xi}) \}_{n \geq 0}$ 具有全局收敛性, 即对于任意参数 $\boldsymbol{\xi}$, 该序列都将收敛到弱形式问题(2)的精确解 $\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})$.

定理 6 假设 $\mathbf{u}^{\text{ms}}(\boldsymbol{\xi})$ 是方程(2)的解, $\{ \mathbf{u}_n^{\text{ms}}(\boldsymbol{\xi}) \}_{n \geq 0}$ 是由算法 2 生成的迭代解. 类似于定理 5, 有

$$\| \mathbf{u}^{\text{ms}}(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{u}_n^{\text{ms}}(\boldsymbol{\xi}) \|_a \leq C_1 \rho^{n+1} \| \mathbf{f} \|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in D,$$

其中, 常数 $C_1 > 0$ 且与随机参数 $\boldsymbol{\xi}$ 无关.

上述定理的一个直接的推论是以下全局误差估计, 它提供了基于 GmsFEM 的迭代方法得到的解和问题(2)解的误差估计.

定理 7 在假设 1 和定理 5 条件下, 设 $\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})$ 是方程(2)的解, $\{ \mathbf{u}_n^{\text{ms}}(\boldsymbol{\xi}) \}_{n \geq 0}$ 是由算法 5 生成的迭代约化解, 则

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_n^{\text{ms}} \|_a \leq \hat{C} H \Lambda_*^{\epsilon-1} \| \mathbf{u} \|_{E(\Omega)}^2 + \hat{C} H^2 \frac{\Lambda_* - H \Lambda_*^\epsilon}{\Lambda_* - 1} + \hat{C} \rho^{2n+2} \| \mathbf{f} \|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in D, \quad (40)$$

其中, 常数 $\hat{C}$ 与 ρ, Λ 和 n 以及随机参数 $\boldsymbol{\xi}$ 均无关.

证明 $\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{u}_n^{\text{ms}}(\boldsymbol{\xi}) = (\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{u}^{\text{ms}}(\boldsymbol{\xi})) + (\mathbf{u}^{\text{ms}}(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{u}_n^{\text{ms}}(\boldsymbol{\xi}))$, 由三角不等式可以得到

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_n^{\text{ms}} \|_a^2 \leq \| (\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{u}^{\text{ms}}(\boldsymbol{\xi})) \|_a^2 + \| (\mathbf{u}^{\text{ms}}(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{u}_n^{\text{ms}}(\boldsymbol{\xi})) \|_a^2.$$

定理 5 及定理 6 结合上面的三角不等式即可证明误差估计(40).

证毕. □

4 数值实验

在本节中, 我们通过两个数值算例来验证所提出的迭代方法在含参双重连续介质模型中的适用性, 并检验理论结果的正确性. 在 4.1 小节中, 本文给出了粗网格尺寸和局部基函数数量对近似解精度的影响. 为验证所提迭代方法的理论收敛性, 将详细列出该算例的相对误差和收敛速率. 4.2 小节则基于迭代型广义多尺度有限元框架, 对具有高维随机参数特征的扩散系数和源项所构成的双重连续介质模型进行数值求解. 为充分验证理论分析结果, 不仅给出了相对误差的演化规律, 还通过计算收敛阶数对 Gms-Iter 算法的渐进性能进行了系统评估.

4.1 算例 1

令 $\Omega = [0, 1]^2$ 是一个矩形区域, 本文考虑如下双重连续介质模型:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa_1(x, \xi) \nabla u_1(x, \xi)) + \sigma(x)(u_1(x, \xi) - u_2(x, \xi)) = f_1(x, \xi), & x \in \Omega, \\ -\operatorname{div}(\kappa_2(x, \xi) \nabla u_2(x, \xi)) - \sigma(x)(u_1(x, \xi) - u_2(x, \xi)) = f_2(x, \xi), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (41)$$

边界条件为

$$u_1(x, \xi)|_{\partial\Omega} = 0, \quad u_2(x, \xi)|_{\partial\Omega} = 0,$$

其中, 随机渗透率 $\kappa_i(x, \xi)$ ($i = 1, 2$) 和交互函数 $\sigma(x)$ 的定义分别为

$$\begin{cases} \kappa_1(x, \xi) = \kappa_1^0(x) + (1 + \xi^2 + \xi^4)(2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2); \\ \kappa_2(x, \xi) = \kappa_2^0(x) + (2 + \xi^2)(1 + x_1^2 + x_1^4)(1 + x_2); \\ \sigma(x) = 1 + x_1^2 x_2^2, \end{cases}$$

而源项定义为

$$\begin{cases} f_1(x, \xi) = (2 + 2\xi + \xi^2)(1 + 2x_1 + 3x_2) + (\xi + 3\xi \sin(\xi))x_1^2 x_2^2, \\ f_2(x, \xi) = (2 + 3\xi + \xi^2)(x_1 + x_2 + 1) + (1 + 2\cos(3\xi))x_1^2 x_2^2. \end{cases}$$

这里 $x = (x_1, x_2) \in \Omega$, 随机变量服从 Beta 分布, 即 $\xi \sim \text{Beta}(1, 1)$. 渗透率中的确定性部分 $\kappa_1^0(x)$ 和 $\kappa_2^0(x)$ 都是含有高对比度系数, 且与 ξ 无关, 如图 2 所示.

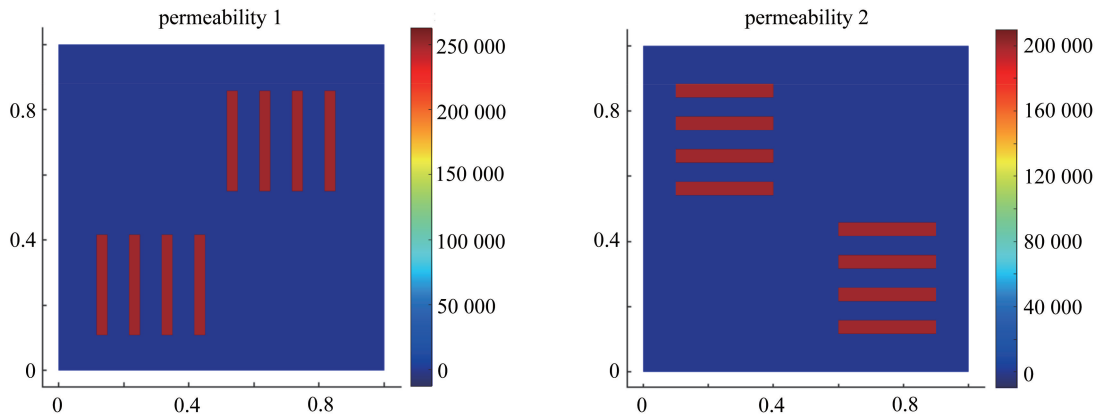


图 2 高震荡渗透率场 $\kappa_1^0(x)$ (左) 和 $\kappa_2^0(x)$ (右)

Fig. 2 High-contrast coefficients $\kappa_1^0(x)$ (left) and $\kappa_2^0(x)$ (right)

我们将在 120×120 的细网格上计算参考解, 其自由度数量为 $N_f = 14\,641$. $u_1^{\text{ref}}(x, \xi)$ 和 $u_2^{\text{ref}}(x, \xi)$ 分别表示在细网格上使用有限元法计算的参考解, $u_i^{\text{gms}}(x, \xi)$ 和 $u_i^{\text{Gms-Iter}}(x, \xi)$ 分别表示通过 GmsFEM 和 Gms-Iter 方法得到的数值解. 为了衡量参考解和数值解之间的误差, 本文定义了如下 L^2 范数意义下的相对误差

$$\begin{cases} e_u^{\text{gms}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\|u^{\text{ref}}(x, \xi_j) - u^{\text{gms}}(x, \xi_j)\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|u^{\text{ref}}(x, \xi_j)\|_{L^2(\Omega)}^2}, \\ e_u^{\text{Gms-Iter}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\|u^{\text{ref}}(x, \xi_j) - u^{\text{Gms-Iter}}(x, \xi_j)\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|u^{\text{ref}}(x, \xi_j)\|_{L^2(\Omega)}^2}, \end{cases} \quad (42)$$

和能量范数意义下的相对误差

$$\begin{cases} e_u^{\text{gms}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\|u^{\text{ref}}(x, \xi_j) - u^{\text{gms}}(x, \xi_j)\|_a^2}{\|u^{\text{ref}}(x, \xi_j)\|_a^2}, \\ e_u^{\text{Gms-Iter}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\|u^{\text{ref}}(x, \xi_j) - u^{\text{Gms-Iter}}(x, \xi_j)\|_a^2}{\|u^{\text{ref}}(x, \xi_j)\|_a^2}, \end{cases} \quad (43)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, N$ 是参数样本的数量. 为系统评估 Gms-Iter 方法的计算性能, 本文在这一小节采用 Monte-

Carlo 采样策略,在参数随机空间中选取 1 000 个独立样本进行统计分析.数值实验设置如下:采用固定粗网格步长 ($H = 1/12$), 每个粗网格节点对应的支集中选取 5 个局部基函数,并设置最大迭代步数为 50 次以保障计算收敛.在三种不同数值模拟方法下,本文得到了变量 $u_1(x, \xi)$ 和 $u_2(x, \xi)$ 的均值轮廓图,如图 3 所示.图 3 中第一行展示了 $u_1(x, \xi)$ 通过不同数值模拟方法计算得到的均值轮廓,而第二行则展示了 $u_2(x, \xi)$ 的均值轮廓.从图像上可以看出, Gms-Iter 方法的结果能够很好地逼近参考解和 GMsFEM 解.

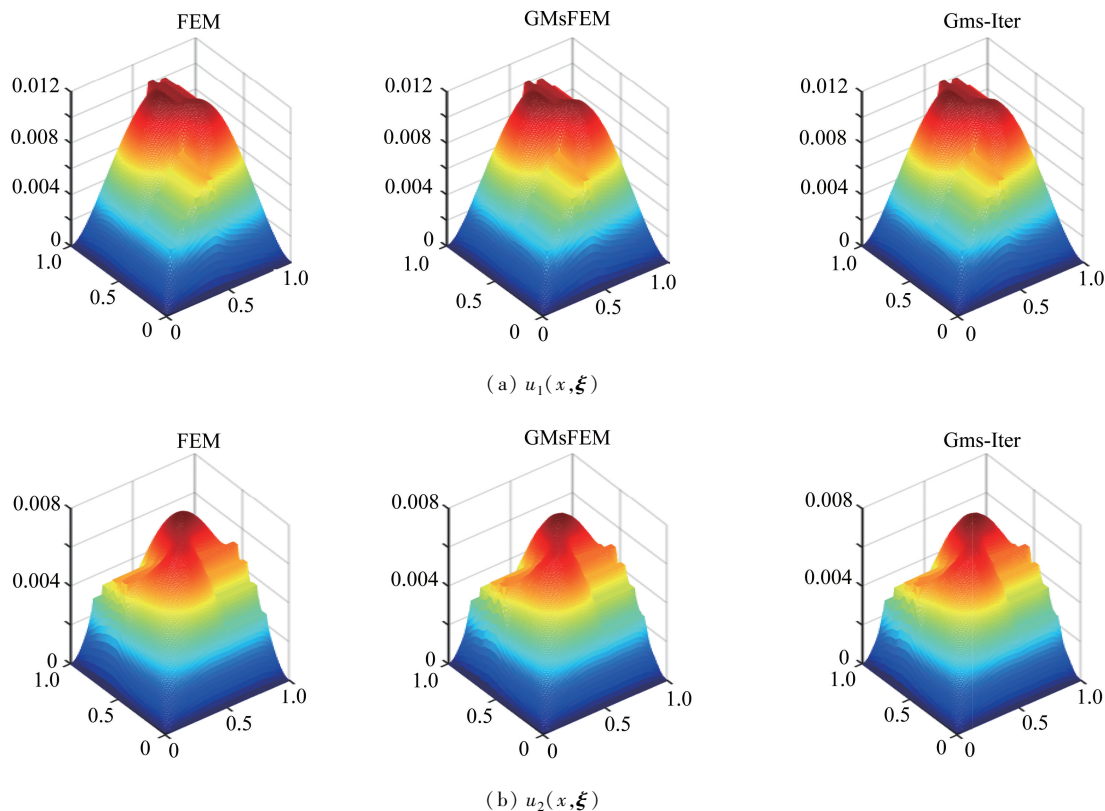


图 3 不同数值模拟方法计算得到的均值轮廓图

Fig. 3 Mean profiles obtained with different numerical simulation methods

在表 1 和表 2 中,本文分别给出了不同粗网格步长 $H = \{1/2, 1/4, 1/6, 1/8, 1/10, 1/12, 1/24\}$ 下, GMs-FEM 与 Gms-Iter 方法与参考解在 L^2 范数和能量范数下的相对误差.数值实验结果表明:在保持每个邻域采用 5 个局部基函数的条件下,两种方法的计算精度表现相当接近,且均呈现出随着粗网格步长的减小而呈现单调递减的趋势.这些结果不仅验证了本文所提 Gms-Iter 方法的计算可靠性,更从数值角度揭示了网格加密策略对提升多尺度方法计算精度的普适性规律,为多尺度模拟的参数选择提供了理论依据.

表 1 不同粗网格大小 H 下,变量 $u(x; \xi)$ 在 L^2 范数意义下的相对误差

Table 1 The relative L^2 errors with different coarse mesh sizes H for $u(x; \xi)$

relative error	$H = 1/2$	$H = 1/4$	$H = 1/6$	$H = 1/8$	$H = 1/10$	$H = 1/12$	$H = 1/24$
e_u^{gms}	6.996 8E-1	4.820 2E-1	3.099 6E-1	1.124 4E-1	2.844 9E-4	1.913 1E-4	1.208 5E-5
$e_u^{\text{Gms-Iter}}$	2.873 3E-1	2.243 0E-1	1.983 5E-1	1.615 3E-1	5.824 6E-3	6.213 6E-3	1.245 7E-3

表 2 不同粗网格大小下,变量 $u(x; \xi)$ 在能量范数下的相对误差

Table 2 The relative energy errors with different coarse mesh sizes H for $u(x; \xi)$

relative error	$H = 1/2$	$H = 1/4$	$H = 1/6$	$H = 1/8$	$H = 1/10$	$H = 1/12$	$H = 1/24$
e_u^{gms}	2.492 0E-1	1.662 1E-1	1.415 8E-1	1.278 9E-1	6.701 0E-4	7.189 8E-4	4.979 2E-4
$e_u^{\text{Gms-Iter}}$	2.873 9E-1	2.244 5E-1	1.985 4E-1	1.617 6E-1	6.247 9E-3	6.636 7E-3	1.675 9E-3

为了更直观地展示每个样本下的误差情况,本文随机选择了 200 个参数样本,并在图 4 中绘制了这些样本下的 GMsFEM 与 Gms-Iter 方法在两种范数意义下的相对误差.通过图示,本文可以看到这两种数值方法与

参考解具有良好的一致性。

为了突出 Gms-Iter 方法的高效收敛特性,本文引入 ∞ 范数意义下的绝对误差度量:

$$EL^k = \| \boldsymbol{u}^{k+1}(x, \boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{u}^k(x, \boldsymbol{\xi}) \|_{\infty}.$$

在固定粗网格步长和局部基函数个数的条件下,图 5 展示了绝对误差随迭代次数的变化趋势.从图中可以明显观察到,随着迭代次数的增加,绝对误差呈现稳定且快速的下降趋势.这一收敛性结果验证了 Gms-Iter 方法在实际计算中具有可靠的收敛效率。

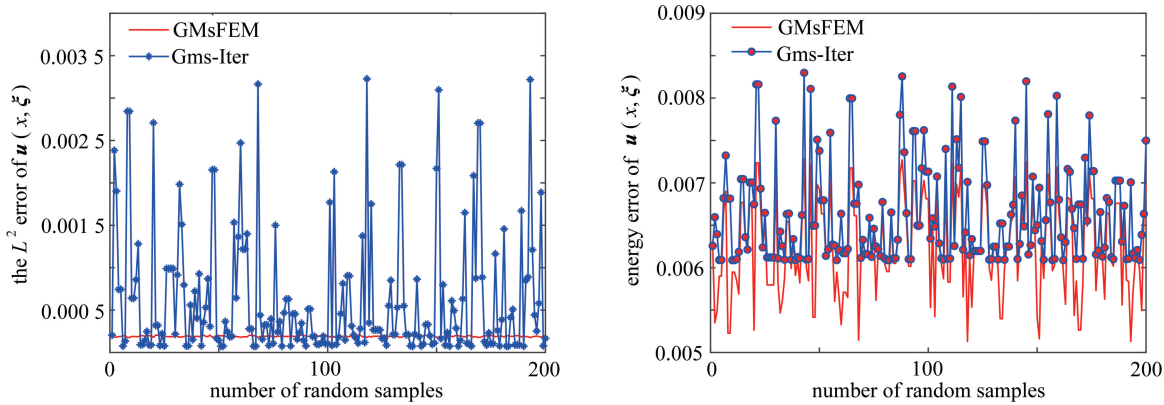


图 4 变量 $\boldsymbol{u}(x; \boldsymbol{\xi})$ 在 200 个随机样本处的相对误差

Fig. 4 The relative errors of variable $\boldsymbol{u}(x; \boldsymbol{\xi})$ based on 200 random samples

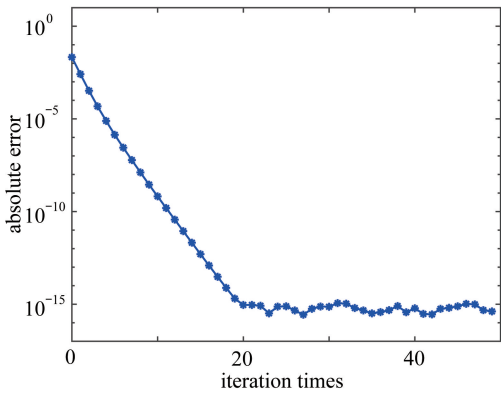


图 5 绝对误差随迭代次数变化的情况

Fig. 5 Absolute errors of the iterations

我们将 $\kappa_1^1(x; \boldsymbol{\xi})$ 和 $\kappa_2^1(x; \boldsymbol{\xi})$ 的最大值记为 $\bar{\kappa}_1^1(x, \boldsymbol{\xi}) = 14.903\ 2$ 和 $\bar{\kappa}_2^1(x, \boldsymbol{\xi}) = 17.804\ 8$.在表 3 中,我们列出了相对于 $\kappa_1^0(x)$ 和 $\kappa_2^0(x)$ 不同下界的 L^2 范数和 a_Q 范数的相对误差.从表中可以看出,当 κ_i^0 和 $\bar{\kappa}_i^1$ 满足定理 5 的条件时,Gms-Iter 方法确实能够收敛.相反,当这些条件不满足时,Gms-Iter 方法则不会收敛.这一现象与我们先前的理论分析结果高度一致,从而验证了理论的正确性。

表 3 使用 5 个基函数的收敛性

Table 3 Convergences with 5 local basis functions

$\kappa_1^0(x)$	$\kappa_2^0(x)$	$e_p^{1, \text{Gms-Iter}}$	$e_p^{2, \text{Gms-Iter}}$	$a_Q^{\text{Gms-Iter}}$
1	1	1.747 0E101	3.970 0E105	1.644E107
3	3	3.670 3E52	9.801 2E57	4.323E59
10	10	2.409 0E-1	8.186 6E5	3.872 2E7
15	15	4.105 7E-3	1.338 5E-2	1.032E-2
20	20	2.822 0E-3	8.364 3E-3	8.832E-3

4.2 算例2

计算域仍然是单位正方形 $\Omega = [0, 1]^2$. 本文考虑以下双重连续介质模型:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa_1(x, \xi) \nabla u_1(x, \xi)) + \sigma(x)(u_1(x, \xi) - u_2(x, \xi)) = f_1(x, \xi), & x \in \Omega, \\ -\operatorname{div}(\kappa_2(x, \xi) \nabla u_2(x, \xi)) - \sigma(x)(u_1(x, \xi) - u_2(x, \xi)) = f_2(x, \xi), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (44)$$

这里, $x = (x_1, x_2) \in \Omega$. 边界条件同样为 $u_i(x, \xi)|_{\partial\Omega} = 0 (i = 1, 2)$. 随机向量 $\xi := (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_5)$, 且 $\xi_i (i = 1, 2, \dots, 5)$ 都服从均匀分布, 即 $\xi_i \sim U(1, 2)$. 扩散系数 $\kappa_i(x, \xi) (i = 1, 2)$, 交互函数 $\sigma(x)$ 以及源项 $f_i(x, \xi)$ 的定义如下:

$$\begin{cases} \kappa_1(x, \xi) = \kappa_1^0(x) + (1 + \sin(\xi_1^2 + \xi_3^2 + \xi_5^2))(1 + x_1^2)(1 + x_2^2), \\ \kappa_2(x, \xi) = \kappa_2^0(x) + (1 + \cos(\xi_2^2 + \xi_4^2))(2 + x_1^2 + x_2^2), \\ \sigma(x) = 1 + x_1 x_2, \\ f_1(x, \xi) = (\exp(\xi_1) + \xi_3 \xi_5^2)(x_1 + x_1^2)(x_2 - x_2^2) + (1 + \xi_2 \xi_4)((x_1 - x_1^2) + (x_2 + x_2^2)), \\ f_2(x, \xi) = (3 + \xi_2 \xi_5)x_2(x_1 + x_2^2) + 2\xi_2 \xi_4(1 + x_1^2)(1 + 2x_2), \end{cases}$$

其中, 扩散系数 $\kappa_1(x, \xi)$ 和 $\kappa_2(x, \xi)$ 的确定性部分都是高震荡系数, 其对比度为 $\eta = 10^4$, 如图6所示.

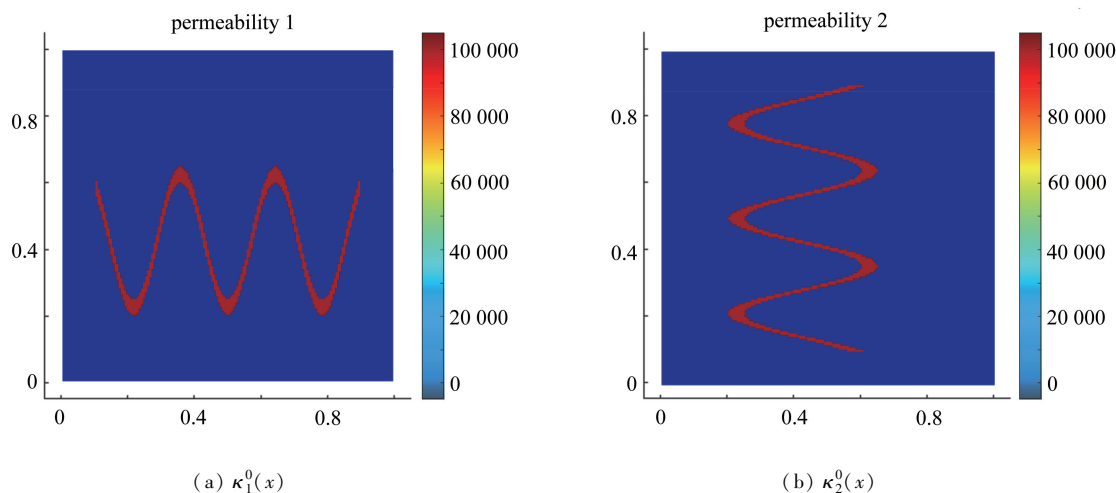


图6 高对比函数

Fig. 6 High-contrast functions

图7展示了双重连续问题的参考解和数值解. 在这个算例中, 本文设定终止条件为 $\epsilon = 5 \times 10^{-8}$, 最大迭代次数为 $N_{\text{iter}} = 30$, 以及局部基函数的数量为5. 从图中可以看出, 在本文考虑了多尺度信息时, 使用两种不同的约化方法得到的数值解与参考解都呈现了高度的吻合.

表4、5记录了不同粗网格尺寸下能量范数的误差. 在该表中, 本文假设通道内的渗透率值分别为500和501, 每个粗区域使用5个局部基函数, 并根据本文的分析结果得到这些数据. 结果表明, 基于GMsFEM迭代方法的数值逼近与GMsFEM的数值逼近一致, 并且两种范数意义下的相对误差都随着粗网格大小的减小呈现数量级减小.

表4 基于 L^2 范数意义的收敛结果Table 4 Convergences based on the L^2 -norm

H	e_u^{Gms}	order	$e_u^{\text{Gms-Iter}}$	order
1/2	6.079 4E-1	—	6.789 1	—
1/4	4.991 3E-1	0.284 5	5.535 8	0.294 4
1/8	2.991 3E-2	2.172 5	2.577 4E-2	4.020 6
1/16	2.366 1E-5	4.883 0	4.999 8E-3	3.469 0
1/32	4.960 3E-6	4.225 8	5.509 3E-3	2.566 8

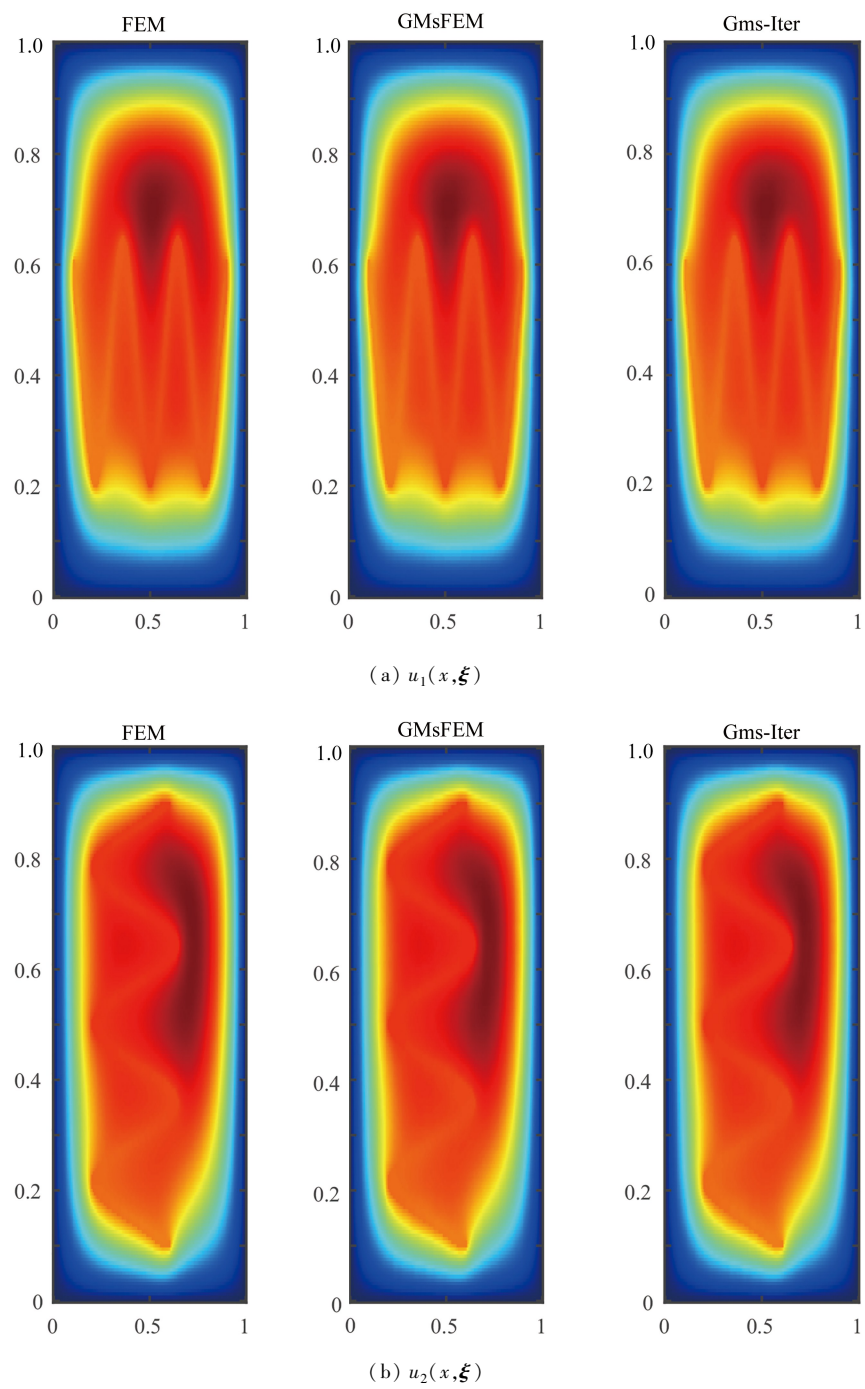


图 7 双重连续问题的参考解和数值解

Fig. 7 The reference solutions and numerical solutions of the dual-continuum problem

表 5 基于能量范数意义的收敛结果

Table 5 Convergences based on the energy norm

H	e_u^{gms}	order	$e_u^{Gms-Iter}$	order
1/2	6.648 8E-1	—	6.650 4E-1	—
1/4	5.821 0E-1	0.191 8	5.823 0E-1	0.191 7
1/8	5.419 5E-2	1.743 9	5.465 2E-2	3.478 4
1/16	3.546 3E-3	2.516 9	4.017 8E-3	2.457 0
1/32	1.680 7E-3	2.157 0	2.152 8E-3	2.067 8

5 总结与展望

针对含参数的双重连续介质模型,本文提出了一种基于 GMsFEM 的迭代求解算法(Gms-Iter).该算法结合了迭代方法与多尺度有限元方法的优势,构建了一个高效稳定的数值求解方法.具体而言,本文首先通过数学重构,将原始问题转化为与参数无关的多尺度系数矩阵和交换项以及参数依赖右端项的新型方程,进而采用不动点迭代算法实现流动过程的数值模拟.考虑到模型具有随机性和多尺度特征,传统迭代方法在求解全阶模型时往往面临计算效率低下和内存需求过大的瓶颈问题.为此,本文通过 GMsFEM 构建了低维逼近空间,有效降低了双重连续问题的计算维度.整个算法流程采用离线-在线两阶段计算模式:在离线阶段,基于重构后的数学模型只需一次性计算多尺度基函数;在在线阶段,则充分利用预计算矩阵的逆和模型降阶技术,实现了计算效率的显著提升.在理论分析方面,本文推导了该迭代算法的收敛性并获得了误差估计结果并通过两个数值算例验证了所提方法在计算精度和效率方面的优越性能,实验结果与理论预测保持了良好的一致性.这些研究成果为处理复杂多尺度问题提供了新的数值求解思路.

参考文献(References):

- [1] Yao J, Huang Z Q. *Fractured Vuggy Carbonate Reservoir Simulation*[M]. 2nd ed. Springer, 2017.
- [2] Biermans M B G M, Dijkema K M, De Vries D A. Water movement in porous media towards an ice front[J]. *Journal of Hydrology*, 1978, **37**(1/2): 137-148.
- [3] Harris C C. Sedimentation rates, fluidization and flow through porous media[J]. *Nature*, 1959, **184**(4687): 716.
- [4] 李树光, 曲凯. 多孔介质中单相气体局部流动的均质化建模[J]. 应用数学和力学, 2024, **45**(2): 175-183. (Li Shuguang, Qu Kai. Homogenization modeling of single-phase gas local flow in porous media[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2024, **45**(2): 175-183. (in Chinese))
- [5] 苏成, 罗俊哲, 许秩. 多孔结构多尺度随机振动分析的渐近均匀化-时域显式法[J]. 应用数学和力学, 2023, **44**(1): 1-11. (Su Cheng, Luo Junzhe, Xu Zhi. An asymptotic-homogenization explicit time-domain method for random multiscale vibration analysis of porous material structures[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2023, **44**(1): 1-11. (in Chinese))
- [6] Han J H, Wang M, Bai P, et al. Dendrite suppression by shock electrodeposition in charged porous media[J]. *Scientific Reports*, 2016, **6**: 28054.
- [7] Hayat T, Hussain Z, Alsaedi A, et al. Numerical study for slip flow of carbon-water nanofluids[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017, **319**: 366-378.
- [8] Baca R G, Arnett R C, Langford D W. Modelling fluid flow in fractured-porous rock masses by finite-element techniques[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1984, **4**(4): 337-348.
- [9] Eikemo B, Lie K A, Eigestad G T, et al. Discontinuous Galerkin methods for advective transport in single-continuum models of fractured media[J]. *Advances in Water Resources*, 2009, **32**(4): 493-506.
- [10] Bogdanov II, Mourzenko V V, Thovert J F, et al. Two-phase flow through fractured porous media[J]. *Physical Review E*, 2003, **68**(2): 026703.
- [11] Granet S, Fabrie P, Lemonnier P, et al. A two-phase flow simulation of a fractured reservoir using a new fissure element method[J]. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2001, **32**(1): 35-52.
- [12] Geiger S, Matthäi S, Niessner J, et al. Black-oil simulations for three-component, three-phase flow in fractured porous media[J]. *SPE Journal*, 2009, **14**(2): 338-354.
- [13] Matthai S K, Mezentsev A A, Belayneh M. Finite element-node-centered finite-volume two-phase-flow experiments with fractured rock represented by unstructured hybrid-element meshes[J]. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 2007, **10**(6): 740-756.

- [14] Barenblatt G I, Zheltov I P, Kochina I N. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata][J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1960, **24**(5): 1286-1303.
- [15] Wu Y S, Pruess K. A multiple-porosity method for simulation of naturally fractured petroleum reservoirs[J]. *SPE Reservoir Engineering*, 1988, **3**(1): 327-336.
- [16] Yan B, Alf M, An C, et al. General multi-porosity simulation for fractured reservoir modeling[J]. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, 2016, **33**: 777-791.
- [17] Akkutlu I Y, Efendiev Y, Vasilyeva M, et al. Multiscale model reduction for shale gas transport in a coupled discrete fracture and dual-continuum porous media[J]. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, 2017, **48**: 65-76.
- [18] Cheung S W, Chung E T, Efendiev Y, et al. Constraint energy minimizing generalized multiscale finite element method for dual continuum model[J]. *Communications in Mathematical Sciences*, 2020, **18**(3): 663-685.
- [19] Chung E T, Efendiev Y, Leung T, et al. Coupling of multiscale and multi-continuum approaches[J]. *GEM - International Journal on Geomathematics*, 2017, **8**(1): 9-41.
- [20] Chung E T, Efendiev Y, Leung W T, et al. Non-local multi-continua upscaling for flows in heterogeneous fractured media[J]. *Journal of Computational Physics*, 2018, **372**: 22-34.
- [21] Li Q, Wang Y, Vasilyeva M. Multiscale model reduction for fluid infiltration simulation through dual-continuum porous media with localized uncertainties[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2018, **336**: 127-146.
- [22] Park J S R, Cheung S W, Mai T, et al. Multiscale simulations for upscaled multi-continuum flows[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2020, **374**: 112782.
- [23] Tene M, Al Kobaisi M S, Hajibeygi H. Algebraic multiscale method for flow in heterogeneous porous media with embedded discrete fractures (F-AMS)[J]. *Journal of Computational Physics*, 2016, **321**: 819-845.
- [24] Chung E, Efendiev Y, Hou T Y. Adaptive multiscale model reduction with generalized multiscale finite element methods[J]. *Journal of Computational Physics*, 2016, **320**: 69-95.
- [25] Efendiev Y, Galvis J, Hou T Y. Generalized multiscale finite element methods (GmsFEM)[J]. *Journal of Computational Physics*, 2013, **251**: 116-135.
- [26] Chung E, Efendiev Y, Leung W T. Constraint energy minimizing generalized multiscale finite element method in the mixed formulation[J]. *Computational Geosciences*, 2018, **22**(3): 677-693.
- [27] Galvis J, Efendiev Y. Domain decomposition preconditioners for multiscale flows in high-contrast media[J]. *Multiscale Modeling & Simulation*, 2010, **8**(4): 1461-1483.
- [28] Kim H H, Chung E, Wang J. BDDC and FETI-DP preconditioners with adaptive coarse spaces for three-dimensional elliptic problems with oscillatory and high contrast coefficients[J]. *Journal of Computational Physics*, 2017, **349**: 191-214.
- [29] Li G. On the convergence rates of GmsFEMs for heterogeneous elliptic problems without oversampling techniques[J]. *Multiscale Modeling & Simulation*, 2019, **17**(2): 593-619.
- [30] Xiao D, Fang F, Pain C C, et al. A parameterized non-intrusive reduced order model and error analysis for general time-dependent nonlinear partial differential equations and its applications[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017, **317**: 868-889.
- [31] Brunton S L, Kutz J N. *Data-driven Science and Engineering: Machine Learning, Dynamical Systems, and Control*[M]. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2022.
- [32] Hesthaven J S, Rozza G, Stamm B. *Certified Reduced Basis Methods for Parametrized Partial Differential Equations*[M]. Springer, 2016.
- [33] Quarteroni A, Manzoni A, Negri F. *Reduced Basis Methods for Partial Differential Equations: an Introduction*[M]. Springer, 2016.

- [34] 王青山, 严波, 陈岩, 等. 基于降阶模型和数据驱动的动态结构数字孪生方法[J]. 应用数学和力学, 2023, **44**(7), 757-768. (Wang Qingshan, Yan Bo, Chen Yan, et al. A digital twin method for dynamic structures based on reduced order models and data driving[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2023, **44**(7), 757-768. (in Chinese))
- [35] Gunzburger M, Jiang N, Schneier M. An ensemble-proper orthogonal decomposition method for the nonstationary Navier-Stokes equations[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2017, **55**(1): 286-304.
- [36] Luo Y, Wang Z. A multilevel Monte Carlo ensemble scheme for random parabolic PDEs[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2019, **41**(1): A622-A642.
- [37] Gunzburger M, Jiang N, Wang Z. An efficient algorithm for simulating ensembles of parameterized flow problems[J]. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 2019, **39**(3): 1180-1205.
- [38] Feng X, Lin J, Lorton C. An efficient numerical method for acoustic wave scattering in random media[J]. *ASA Journal on Uncertainty Quantification*, 2015, **3**(1): 790-822.
- [39] Feng X, Lin J, Lorton C. A multimodes Monte Carlo finite element method for elliptic partial differential equations with random coefficients[J]. *International Journal for Uncertainty Quantification*, 2016, **6**(5): 429-443.
- [40] Zhang S, Yang Z, Guan X. Multi-modes multiscale approach of heat transfer problems in heterogeneous solids with uncertain thermal conductivity[J]. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 2025, **15**(1): 69-93.
- [41] Feng X, Luo Y, Vo L, et al. An efficient iterative method for solving parameter-dependent and random convection-diffusion problems[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2022, **90**: 72.