

# Voronoi 杂交渗流量有限元方法研究\*

罗超<sup>1</sup>, 张蕊<sup>1</sup>, 郭然<sup>1</sup>, 盖文海<sup>2</sup>

(1. 昆明理工大学 建筑工程学院, 昆明 650500;  
2. 云南交通职业技术学院 公路与建筑学院, 昆明 650500)

(本刊编委郭然来稿)

**摘要:** 针对土石混合体和各向异性特征天然土质坝基, 将其视为一种复合多孔介质土体模型, 假定渗流为二维 Darcy 流, 水头在土石混合体内连续, 构建了考虑土石界面的非均质土石混合体渗流场和各向异性均质坝基渗流场的杂交渗流量有限元(HS-FEM)求解模型, 该模型在单元域内假设独立的高阶渗流量变量, 同时在单元边界上给定水头值, 仅需少数单元即可模拟考虑土石界面的承压渗流工况, 避免了传统有限元法在界面处进行密集网格细化的弊端, 亦可解决二维正交各向异性稳态线性渗流问题. 验证算例表明: 该方法在保持稀疏离散化的前提下, 获得了与传统密集网格有限元相当的计算精度.

**关键词:** 杂交渗流量有限元法(HS-FEM); 渗流分析; 复合材料  
**中图分类号:** O343 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.460148

## Investigation of a Voronoi-Based Hybrid Seepage Flux Finite Element Method

LUO Chao<sup>1</sup>, ZHANG Rui<sup>1</sup>, GUO Ran<sup>1</sup>, GAI Wenhai<sup>2</sup>

(1. Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, P.R. China;

2. School of Highway and Construction Engineering, Yunnan Communications Vocational and Technical College, Kunming 650500, P.R. China)

(Contributed by GUO Ran, Member of the Editorial Board of AMM)

**Abstract:** The soil-rock mixtures and naturally anisotropic dam foundations were treated as composite porous media, and the seepage flow was assumed to follow 2D Darcy's law with continuous hydraulic head distributions within the soil-rock mixture. A hybrid seepage flux finite element method (HS-FEM) model was developed for analyzing seepage fields in soil-rock mixtures with interfaces and anisotropic homogeneous dam foundations. For this model, independently assumed higher-order seepage flux variables was adopted within element domains with hydraulic head values prescribed on element boundaries. Only a limited number of elements were required to effectively simulate confined seepage conditions involving soil-rock interfaces, thereby to overcome the drawback of traditional FEMs necessitating dense mesh refinement at material interfaces. Additionally, the

\* 收稿日期: 2025-08-19; 修订日期: 2025-09-12

基金项目: 国家自然科学基金(12062007); 云南省“兴滇英才”支持计划基金(12072135)

作者简介: 罗超(1997—), 男, 硕士生(E-mail: 20232110004@stu.kust.edu.cn);

张蕊(1982—), 女, 教授, 博士生导师(通信作者. E-mail: zrui0310@163.com).

引用格式: 罗超, 张蕊, 郭然, 盖文海. Voronoi 杂交渗流量有限元方法研究[J]. 应用数学和力学, 2026, 47(6): 712-722.

method is capable of solving 2D orthotropic steady-state linear seepage problems. Numerical examples demonstrate that the proposed HS-FEM achieves comparable accuracy to traditional dense-mesh FEMs while maintaining computational efficiency through sparse discretization.

**Key words:** hybrid seepage flux finite element method (HS-FEM); seepage analysis; composite material

## 0 引 言

土石混合体是典型的非均质多孔介质,广泛分布于天然坝基、边坡及填方工程中。其渗流行为受土石界面与材料各向异性的显著影响,而传统连续介质渗流理论对此类复杂介质的渗流场描述存在局限性。尤其在土石界面处,渗透系数的突变会导致水头场和渗流场的非连续分布,而各向异性特征则进一步增加了渗流分析的复杂性。

目前工程实践中广泛采用有限元法(FEM)<sup>[1-4]</sup>、边界元法(BEM)<sup>[5-6]</sup>、无单元法<sup>[7]</sup>和有限差分法(FDM)<sup>[8-9]</sup>等数值方法进行求解。此外,比例边界有限元法<sup>[10]</sup>、基于特解的边界型数值方法<sup>[11-12]</sup>也在特定领域得到应用。近些年来,徐文杰等<sup>[13]</sup>和Yan等<sup>[14]</sup>研究了基于细观结构的渗流模拟,将土石混合体视为土体和块石构成的二元介质,采用Darcy定律描述土体和块石的渗流,利用有限元实现数值模拟。Wei等<sup>[15]</sup>改进的等效裂隙网络模型对多孔介质和裂隙介质渗流都适用,并将其可拓展到各向异性介质中。陈远强等<sup>[16]</sup>基于数值流形法,构建了边坡降雨径流与非饱和渗流全耦合模型,实现了边坡降雨-入渗-产流的过程数值模拟。Jia和Zheng<sup>[17]</sup>改进的数值流形方法可包含材料界面,并能够准确求解非线性渗流。Zhao等<sup>[18-19]</sup>基于改进的守恒水平集研究了水-空气两相渗流特性,模拟结果与实验观测结果吻合较好。李树光等<sup>[20]</sup>基于渐近均质法,建立了描述三维周期性多孔结构孔隙尺度下单相气体局部流动的数学模型,能够解决多孔介质中的单相气体流动问题,获得多孔介质的气体渗透性。

Pian<sup>[21]</sup>基于最小余能原理,最早提出了线弹性固体力学的杂交表达式,后由Pian和Tong等<sup>[22-23]</sup>改进了这一形式,尤其通过满足应力插值的要求,确保单元刚度矩阵有足够的秩以支持求逆。Ghosh等<sup>[24-25]</sup>推导了不包含夹杂和包含夹杂的Voronoi单元,Guo等<sup>[26]</sup>在此基础上进行了系统性发展,探讨了考虑界面脱层、塑性、蠕变和热应变的Voronoi单元,并进行热机疲劳的数值模拟计算。Zhang等<sup>[27-28]</sup>改进了Voronoi单元,使其能够测量含有随机分布和不同尺寸孔洞且具有特定压力的多孔材料上的不规则局部应力。Karchewski<sup>[29]</sup>以渗流量函数作为场变量,推广多边形杂交单元作为解决渗流问题的一种方法,但该方法仍需单元离散,且存在初始建模数据准备量大、网格生成几何复杂度高问题,不过其在渗流量分布的精确求解方面表现出色。

本研究进一步发展了Voronoi杂交渗流单元,并利用该方法求解了带界面的非均质土石混合体渗流场和各向异性均质坝基渗流场,建立了基于Euler方程描述的多孔介质稳态渗流Voronoi杂交渗流量有限元求解框架,其研究目的在于:①在满足平衡条件假设下推导渗流场求解方案,以较少的建模工作实现与传统有限元相当的求解精度;②使得杂交单元能更好地表征岩土材料特性和微观几何结构。

本文第1节介绍了稳态渗流场下的杂交有限元公式;第2节通过两个数值算例(含土石界面的土石混合体渗流场和各向异性均质坝基渗流场)验证了方法有效性,计算结果与MARC软件的仿真结果一致;第3节总结了杂交渗流量有限元的性能,结论表明该方法收敛快、结果较精确、数据准备工作量小,并探讨了杂交渗流量有限元在三维问题、多场耦合等方面的应用潜力。

## 1 渗流杂交有限元方法

研究从单一流体相在饱和均匀多孔介质中的稳定渗流问题开始,如图1(a)所示,经典边界条件下的稳态渗流问题求解域,在域 $V$ 内需满足Euler方程:

$$\mathbf{i} = \nabla h, \quad (1)$$

$$\mathbf{q} = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{i}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{q} - s = 0, \quad (3)$$

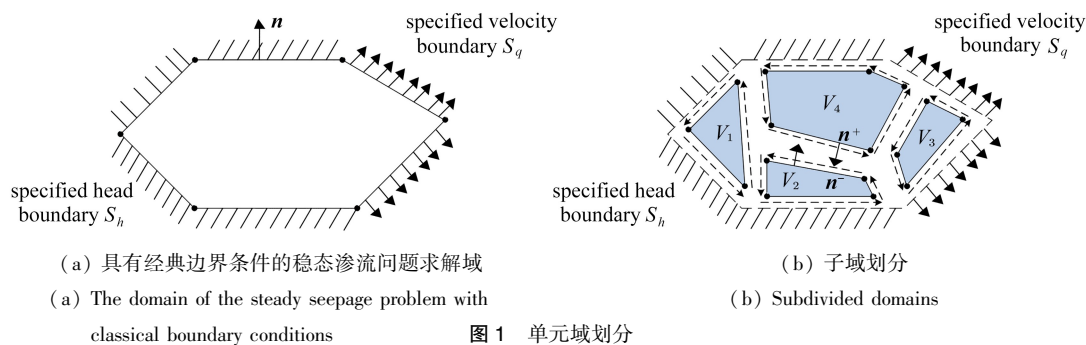
其中, $h$ 是总水头, $\mathbf{i}$ 表示水力梯度, $\mathbf{q}$ 是比流量, $\mathbf{K}$ 表示水力传导率的三阶张量, $s$ 是源项, $\nabla = \partial/\partial \mathbf{x}$ 是梯度

算子.考虑以下流速边界  $S_q$  和水头边界  $S_h$  上的两个边界条件:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = \bar{q}, \quad \text{on } S_q, \quad (4)$$

$$h = \bar{h}, \quad \text{on } S_h, \quad (5)$$

其中  $\bar{q}$  是规定的通量,  $\bar{h}$  是规定的水头,  $\mathbf{n}^T = \{n_x \ n_y\}$  是由单元边界指向外部的单位法向量, 积分外表面  $S = S_h \cup S_q$ .



如图 1(b) 所示, 将域  $V$  分为多个子域  $V_e$ , 求解方法包含两个主变量: 水头  $h$  和渗流通量  $\mathbf{q}$ . 水头在单元域  $V_e$  内用  $h$  表示, 在各单元间边界  $S_e$  上用  $h^*$  表示. 积分面  $S = S_h \cup S_q \cup S_e$ , 其中  $S_e$  在内部表面集合遍历两次, 每次在不同方向上.

考虑两个强形式的方程:

$$\mathbf{i}^h - \mathbf{i}^q = \nabla h - (-\mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{q}) = 0, \quad \text{in } V, \quad (6)$$

$$\mathbf{n}^+ \cdot \mathbf{q} + \mathbf{n}^- \cdot \mathbf{q} = 0, \quad \text{on } S_e. \quad (7)$$

方程(6)是由方程(1)的动力学关系和方程(2)的本构关系推导而来, 表征了水力梯度间的强约束联系. 其中  $\mathbf{i}^h$  由方程(1)水头场  $h$  梯度运算得到,  $\mathbf{i}^q$  由方程(2)本构关系反推计算得到, 通过强制约束两者之差为零, 实现动力学与本构关系的统一,  $\mathbf{K}$  的可逆性是本构关系反推成立的前提. 方程(7)是界面流量平衡条件, 强制相邻单元在界面上满足流量平衡,  $\mathbf{n}^+$  和  $\mathbf{n}^-$  分别是内表面相对两侧的外向单位法线.

根据 Felippa<sup>[30-31]</sup> 的广义符号表示法, 杂交变分原理是两项之和: 一个是内部泛函, 一个是界面势能. 这种分解不仅体现了问题的物理本质, 还揭示了不同能量贡献之间的耦合机制. 内部泛函描述系统内部域的能量贡献, 通常与场变量的梯度或导数相关, 主导着渗流过程的扩散效应. 界面势能描述边界或内部界面上的能量贡献, 强制边界约束或界面连续性.

首先将方程(6)乘以变分场  $\delta \mathbf{q}$  并积分, 得内部余能泛函:

$$\delta \Pi_c = \int_V \delta \mathbf{q} \cdot (\mathbf{i}^h - \mathbf{i}^q) dV = 0. \quad (8)$$

通过方程(1)和(2)推导得

$$\delta \Pi_c = \int_V \delta \mathbf{q} \cdot (\nabla h + \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{q}) dV = 0. \quad (9)$$

对方程(9)第一项应用散度定理, 将其转化为边界积分和域积分的组合形式:

$$\int_V \delta \mathbf{q} \cdot (\nabla h) dV = - \int_V \delta (\nabla \cdot \mathbf{q}) h dV + \int_S h (\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{q}) dS,$$

且在指定流速边界  $S_q$  上,  $\delta \mathbf{q} = \mathbf{0}$ , 所以得

$$\delta \Pi_c = \int_V \delta \mathbf{q} \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{q} dV - \int_V \delta (\nabla \cdot \mathbf{q}) h dV + \int_{S_h} h (\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{q}) dS = 0. \quad (10)$$

在界面势能方面, 引入指定水头边界条件弱形式方程(5), 可得

$$\delta \Pi_{\text{HBC}} = \int_{S_h} \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{q} (h - \bar{h}) dS = 0. \quad (11)$$

将方程(10)、(11)两项求和销项, 可得

$$\delta \Pi_c = \int_V \delta \mathbf{q} \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{q} dV - \int_V \delta (\nabla \cdot \mathbf{q}) h dV + \int_{S_h} \bar{h} (\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{q}) dS = 0, \tag{12}$$

在上式中,在域  $V$  内  $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$ , 导致它相应的变分项消失.

方程(7)关于界面势能的弱形式可描述为

$$\delta \Pi_{int} = \int_{S_e} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{q} \delta h^* + \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{q} h^*) dS = 0, \tag{13}$$

两项积分为零,表明界面能量交换达到动态平衡,即在单元之间的边界  $S_e$  上弱化了质量平衡,弱形式允许界面两侧水头不连续,但通量整体守恒,因为边界水头  $h^*$  和渗流量  $\mathbf{q}$  都是主变量,为方便建立单元矩阵和向量,使用了以下关系重写对  $S_e$  的积分,

$$\int_{S_e} f dS = \int_S f dS - \int_{S_h} f dS - \int_{S_q} f dS, \tag{14}$$

其中  $f$  是一个标量函数.考虑方程内部泛函(12)和界面势能(14),以及在边界  $S_h$  上,  $h^* = \bar{h}$ ,且在指定流速边界  $S_q$  上,  $\delta \mathbf{q} = \mathbf{0}$ ,在指定水头边界  $S_h$  上,  $\delta h = 0$ , 则

$$\delta \Pi = \int_V \delta \mathbf{q} \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{q} dV + \int_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{q} \delta h^* + \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{q} h^*) dS + \int_{S_q} \delta h^* \bar{q} dS = 0. \tag{15}$$

在这种情况下,由式(15)可以推出相应的最小化变分原理:

$$\Pi[\mathbf{q}, h^*] = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{q} \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{q} dV + \int_S h^* \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} dS - \int_{S_q} h^* \bar{q} dS. \tag{16}$$

### 1.1 渗流杂交元及其弱形式

在渗流分析研究中,假设土石混合体内各材料相的渗流量场相互独立,以反映界面处渗流量的不连续性.基于渗流量完整多项式函数,可推导单元内各相平衡渗流场表达式:

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^i \beta_{j,i-j} x_j y_{i-j}. \tag{17}$$

一阶完备多项式能够精确地描述物理场的常梯度状态,这是渗流问题中最基础的解形式,若多项式阶数不足(如零阶时),则无法表征梯度,导致矩阵秩缺失.为保证渗透系数矩阵  $\mathbf{K}_q$  的可逆性,渗流量函数至少应从一阶完备多项式开始,

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=0}^i \beta_{j,i-j} x_j y_{i-j}. \tag{18}$$

在平面问题中,根据渗流量函数,可导出两个渗流量分量  $\mathbf{q} = (q_x \quad q_y)^T$ ,

$$q_x = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad q_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \tag{19}$$

将  $\mathbf{q}$  用基函数矩阵  $\mathbf{P}$  和未知系数向量  $\boldsymbol{\beta}$  表示为

$$\mathbf{q} = \mathbf{P}\boldsymbol{\beta}, \tag{20}$$

其中  $\mathbf{P}$  是一个  $2 \times m$  的矩阵,举例来说,一个无源项( $s = 0$ ) 渗流量 3 阶完备多项式公式为

$$\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 \\ -1 & 0 & -2x & -y & 0 & -3x^2 & -2xy & -y^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_9 \end{pmatrix} = \mathbf{P}\boldsymbol{\beta}. \tag{21}$$

对边界上  $h$  的处理须保证:在边界  $S = S_h \cup S_q \cup S_e$  上,  $h$  的唯一性(即  $C^0$  连续);在水头边界  $S_h$  上,  $h = \bar{h}$ .对节点水头进行 Lagrange 线性插值,得边界水头为

$$h = \mathbf{L}\mathbf{d}, \quad \text{on } S, \tag{22}$$

其中,  $\mathbf{d}$  是边界节点水头向量,  $\mathbf{L} = (1 - \xi \quad \xi)$  是插值向量,  $\xi$  是局部坐标,取值为  $[0, 1]$ .域内水头使用线性插值函数求得,其数学表述为

$$h(x, y) = \sum_{i=3}^m L_i(\xi) \mathbf{d}. \tag{23}$$

由于土石混合体内部岩块分布的随机性和不规则形状, Voronoi 单元边数也是不确定的, 并且边数往往大于 4. 整个域内的杂交渗流单元可以包含不同的边数, 正是这种单元与传统有限元的区别. 传统有限元在处理边数大于 4 的单元时, 碰到的最大困难是很难构造  $n$  次插值多项式, 以保证水头场在单元内部和单元边界上均协调一致; 另外容易导致渗透矩阵的奇异. 然而, 渗流杂交单元在处理边数大于 4 的单元时, 为了域内边界水头的协调连续, 先将全域通过 Delaunay 三角剖分离散, 基于三角形线性形函数的节点插值方法求得. 这样, 边数的增加不会带来构造插值函数的困难.

将式(20)与式(22)代入式(16)中, 因此有限元离散化后的泛函表达式为

$$\Pi_{MC} = \sum_e \left\{ \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{P}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{P} \boldsymbol{\beta} dV + \int_S \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{P}^T \mathbf{n}^T \mathbf{L} dS - \int_{S_q} \bar{q} \mathbf{L} dS \right\}. \quad (24)$$

## 1.2 求解方法

为简化推导, 对式(24)进行以下处理, 将其中域积分和线积分分别用  $\mathbf{H}$  和  $\mathbf{G}$  表示, 并简化指定流速边界项  $\mathbf{Q}$ , 得到

$$\mathbf{H} = \int_V \mathbf{P}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{P} dV, \quad \mathbf{G} = \int_S \mathbf{P}^T \mathbf{n}^T \mathbf{L} dS, \quad \mathbf{Q} = \int_{S_q} \bar{q} \mathbf{L} dS. \quad (25)$$

由此, 方程(24)改写为

$$\Pi_{MC} = \sum_e \left\{ \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{G} \mathbf{d} - \mathbf{Q} \mathbf{d} \right\}. \quad (26)$$

根据驻值条件, 将  $\Pi_{MC}$  关于系数向量  $\boldsymbol{\beta}$  的一阶变分设为  $\mathbf{0}$ ,

$$\frac{\partial \Pi_{MC}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}, \quad (27)$$

得到单元内运动关系的弱表达式:

$$-\mathbf{H} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{G} \mathbf{d}, \quad (28)$$

上式中未知系数向量  $\boldsymbol{\beta}$  可表示为

$$\boldsymbol{\beta} = -\mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{d}. \quad (29)$$

根据驻值条件, 将  $\Pi_{MC}$  关于节点水头向量  $\mathbf{d}$  的一阶变分设为  $\mathbf{0}$ ,

$$\frac{\partial \Pi_{MC}}{\partial \mathbf{d}} = \mathbf{0}, \quad (30)$$

得到每个单元流量互易关系的弱形式:

$$\mathbf{G} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{Q}, \quad (31)$$

联立单元内运动关系与流量互易关系, 得

$$-\mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{d} = \mathbf{Q}. \quad (32)$$

上式可用于求解单元节点水头, 其中  $\mathbf{Q}$  是流量向量, 该单元的渗透系数矩阵  $\mathbf{K}_e$  最终可以表示为

$$\mathbf{K}_e = -\mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}, \quad (33)$$

渗流场总渗透系数矩阵  $\mathbf{K}_q$  为

$$\mathbf{K}_q = \sum_e \mathbf{K}_e. \quad (34)$$

如果假设系统自由度总数为  $n$ , 运动约束的数量为  $l$ , 当  $\text{rank}(\mathbf{K}_q) < n - l$  时, 总渗透系数矩阵就会奇异. 从总渗透系数矩阵的角度来看, 保证该矩阵不奇异的必要条件是  $m > n - l$ , 这里,  $m$  是独立的渗流系数的总个数. 因此, 选择适当数量的渗流系数对获得精确可靠的计算结果至关重要. 总渗透系数矩阵  $\mathbf{K}_q$  与矩阵  $\mathbf{H}$  的逆矩阵直接相关, 故采用最少渗流系数构建非奇异刚度渗透矩阵最具优势. 需要注意的是, 增加渗流系数数量会提升“单元刚度”, 因而虽然理想情况应满足  $m = n - l$ , 但实际计算中往往难以达成. 此外, 渗流系数的完整多项式插值必须确保渗透矩阵的旋转不变性.

## 2 数值算例

为了证明渗流杂交单元的性能, 我们使用 MARC 商业仿真软件对 2 个数值算例进行了对比验证. 研究检

查的显著特征包括: ① 与传统有限元方法相比, 通量结果的准确性; ② 域内水头分布及水头等值线分布; ③ 基函数矩阵项数对渗流分布的影响. 第一个算例研究了承压渗流下带界面的土石混合体渗流场, 第二个算例考虑在上下游存在水头差工况下的各向异性均质坝基渗流场.

### 2.1 算例 1: 考虑土石界面的非均质土石混合体渗流分析

为验证方法的可行性与数值精度, 考虑一个上下两侧为不透水边界的带界面的土石混合体, 高为  $H = 10.0\text{ m}$ , 宽为  $L = 10.0\text{ m}$ , 渗流域左侧水头  $H_1 = 40.0\text{ m}$ , 右侧下游水头  $H_2 = 30.0\text{ m}$ . 材料均为各向同性, 其中细砂渗透系数  $k = 1 \times 10^{-5}\text{ m/s}$ , 砂岩渗透系数  $k = 1 \times 10^{-8}\text{ m/s}$ , 图 2(a) 为 MARC 模型, 经过收敛性验证, 使用 12 397 个三节点三角形单元建模, 而使用 HS-FEM 方法构建的模型仅需 60 个单元(图 2(b)).

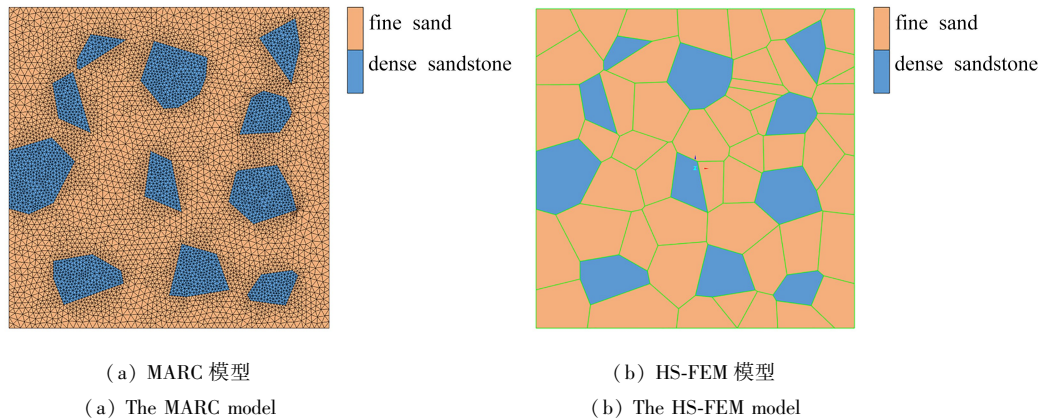


图 2 土石混合体模型对比

Fig. 2 Comparison of soil-rock mixture models

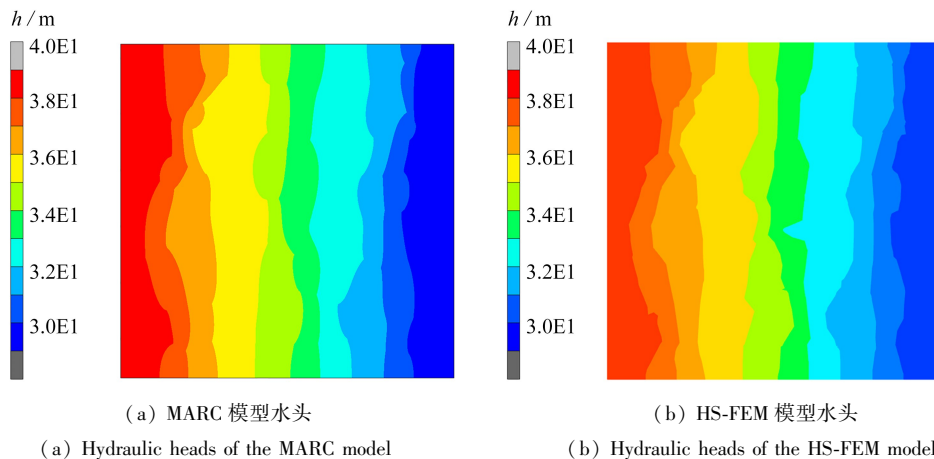
注 为了解释图中的颜色, 读者可以参考本文的电子网页版本, 后同.

HS-FEM 方法计算耗时 7 s, 峰值内存占用 10.76 MB, MARC 耗时 8.9 s, 峰值内存占用 159 MB. 图 3(a)、3(b) 分别展示了 MARC 模型和 HS-FEM 模型的域内水头分布云图, 结果显示二者具有高度一致性. 图 3(c)、3(d) 为水平渗流量  $q_x$  云图, 图 3(e)、3(f) 为竖直渗流量  $q_y$  云图. 特别值得注意的是, HS-FEM 方法在土石界面位置对渗流变化的捕捉更为敏感.

### 2.2 算例 2: 各向异性均质坝基渗流分析

考虑一个底部不透水的各向异性均质坝基模型, 如图 4 所示, 该坝基高为  $H = 90.0\text{ m}$ , 坝宽为  $L = 200.0\text{ m}$ , 渗流域顶部左侧水头  $H_1 = 40.0\text{ m}$ , 顶部右侧水头  $H_2 = 20.0\text{ m}$ , 顶部中央设有止水闸门, 其他边界无渗流通过. 坝基渗透系数为  $k_x = 4 \times 10^{-5}\text{ m/s}$ ,  $k_y = 1 \times 10^{-5}\text{ m/s}$ .

MARC 模型如图 5(a) 所示, 经过收敛性验证, 使用 35 574 个三节点三角形单元建模, 而使用 HS-FEM 方法构建的模型仅需 200 个单元(图 5(b)).



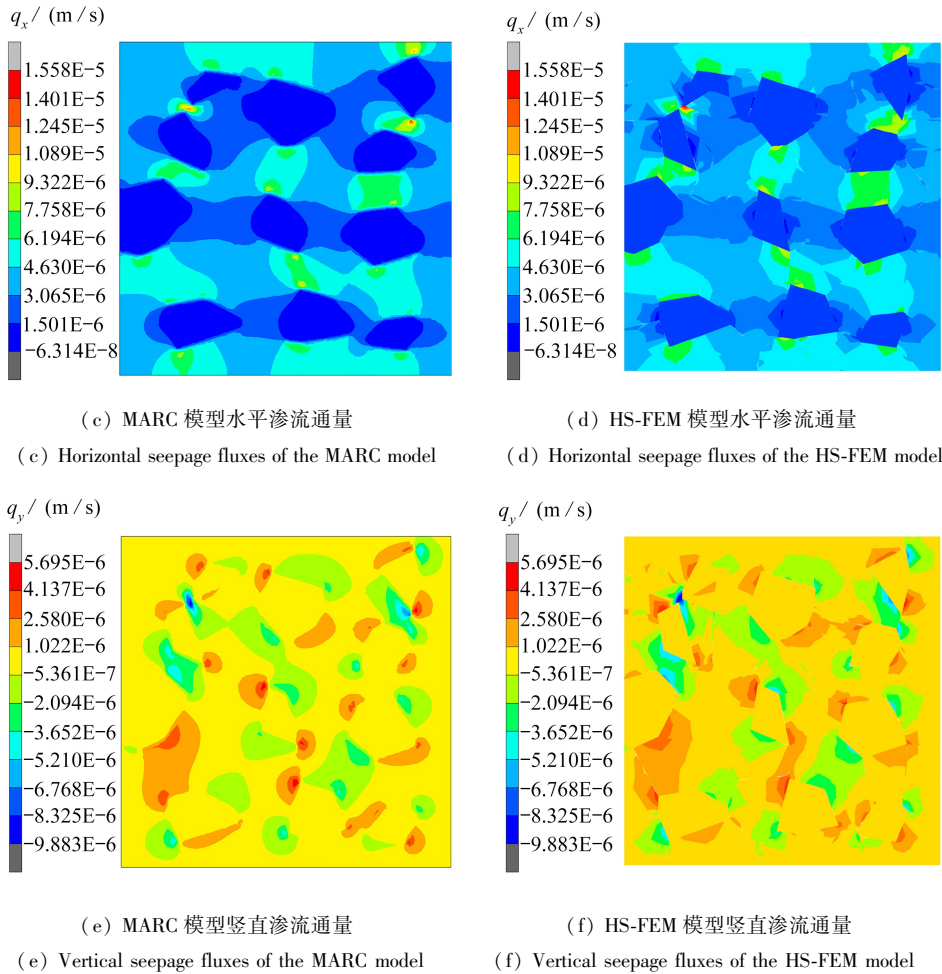


图3 水头及渗流量分布云图对比

Fig. 3 Comparative contour plots of hydraulic head and seepage flux

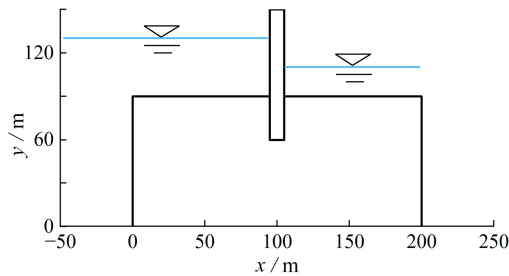


图4 工况条件下的各向异性均质坝基模型

Fig. 4 The anisotropic homogeneous dam foundation model under operational conditions

HS-FEM 方法计算耗时 7 s, 峰值内存占用 14.32 MB, MARC 耗时 16.4 s, 峰值内存占用 200 MB. 图 6 (a)、6(b) 分别是 MARC 模型和 HS-FEM 模型水头等值线分布图, 渗流方向从左向右, 在闸门左右两侧水头梯度平缓, 与 Darcy 定律预测一致. 在闸门底部位置区域出现显著水力梯度, 表明该区域存在潜在冲刷风险.

图 7(a)、7(b) 的水平渗流量  $q_x$  云图显示, HS-FEM 模型是右端值大于左端值, 与 MARC 模型存在差异. 图 7(c)、7(d) 的竖直渗流量  $q_y$  分布则表现出良好的一致性, 极值分别出现在闸门底部左右两侧.

考虑到渗流量云图分布情况以及尽可能反映云图变化趋势的目的, 选取了靠近闸门底部  $y = 58$  m 的路径进行对比, 两者基本一致(图 8). 水平渗流量路径对比(图 8(a)) 可以看出在凹处边界附近 MARC 模型显示出强烈的对称性, 与云图对比结果一致, HS-FEM 模型对渗流集中效应捕捉更为明显. 竖直渗流量路径对比(图 8(b)) 可以看出, 在凹处边界附近 HS-FEM 模型对渗流极端值捕捉更为精确.

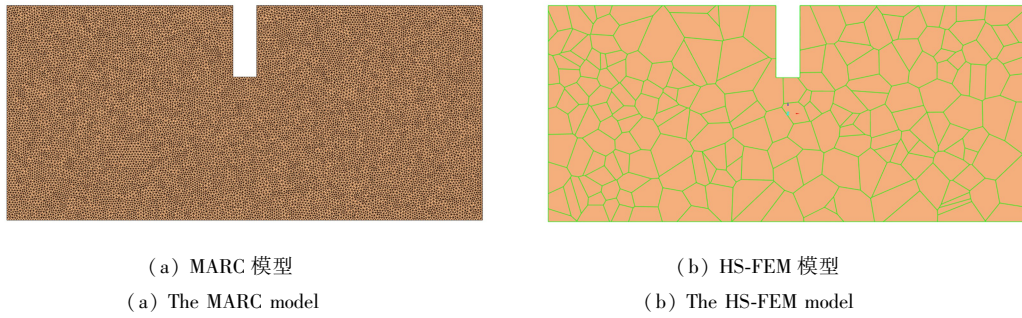


图 5 坝基模型对比

Fig. 5 Comparison of dam foundation models

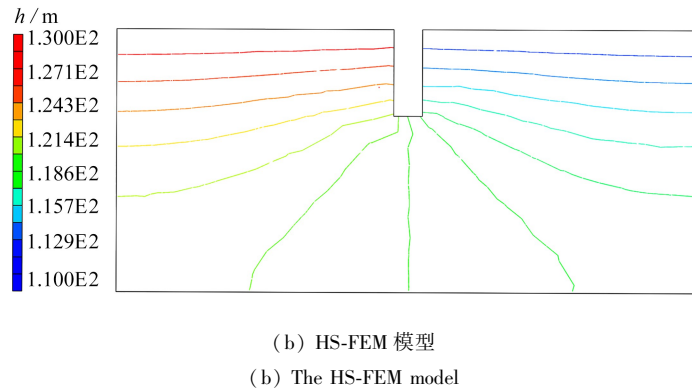
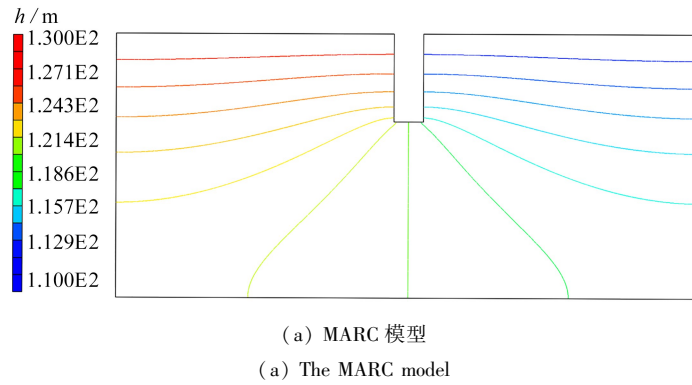
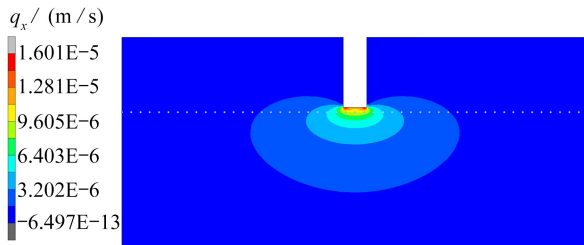


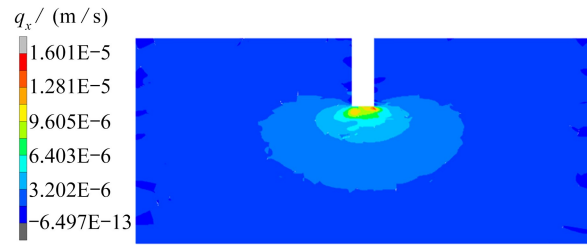
图 6 水头等值线对比

Fig. 6 Comparison of hydraulic head contours

如图 9 所示, 渗流系数多项式分别取 4~9 阶完备多项式, 即  $m$  为 14~54 时, 取路径  $y = 58$  m 时渗流量  $q_x$  对比. 研究表明, 阶数越高, 对渗流集中效应捕捉越精准. 尽管如此, 增加过多的渗流系数个数会导致“单元刚度”增强, 因此选择适当高阶完备多项式是必要且谨慎的.



(a) Horizontal seepage fluxes of the MARC model



(b) Horizontal seepage fluxes of the HS-FEM model

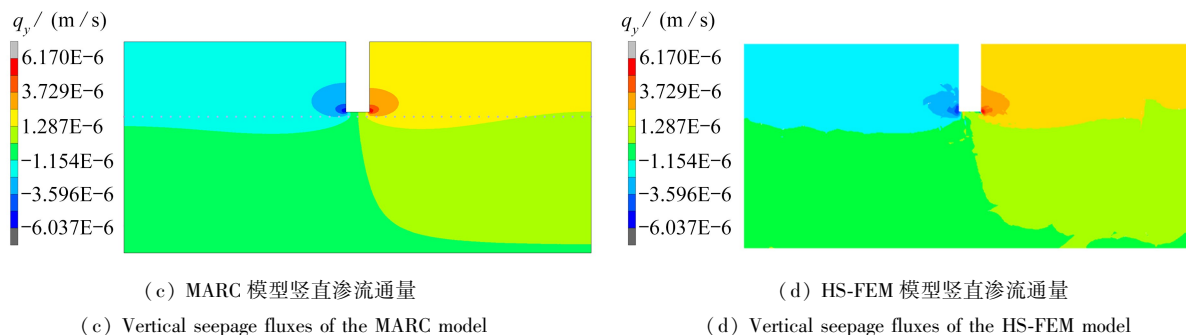
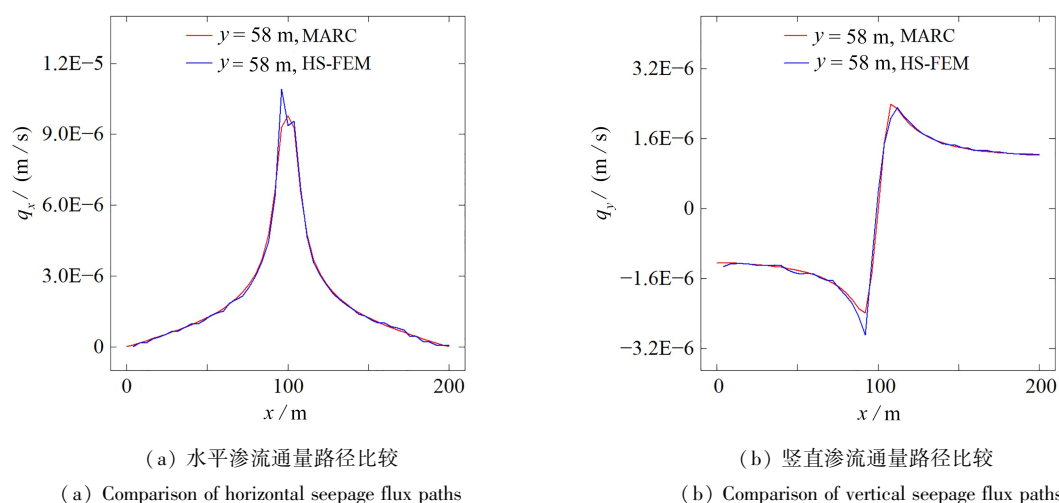
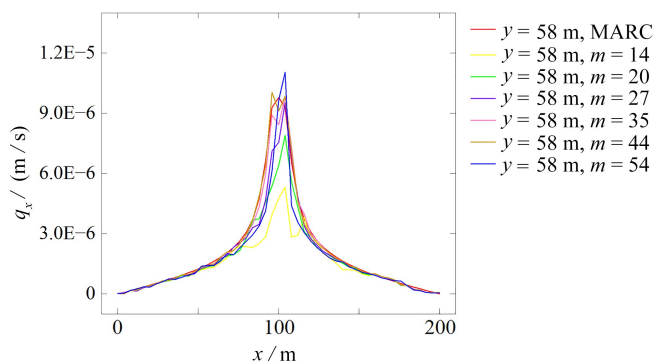


图7 渗流量云图对比

Fig. 7 Comparison of seepage flux contours

图8  $y = 58$  m 渗流量路径比较Fig. 8 Comparison of seepage fluxes paths at  $y = 58$  m图9 基函数矩阵  $P$  项数对渗流量  $q_x$  的影响Fig. 9 Influences of the basis function matrix  $P$  term number on seepage components  $q_x$ 

### 3 结 论

本研究基于最小变分原理,提出了一种新型杂交渗流有限元方法(HS-FEM),通过构建渗流问题的杂交有限元泛函,推导了单元离散求解格式.数值模拟结果表明,该方法在模拟非均质土石混合体和各向异性均质坝基渗流问题时,能够准确地捕捉水头分布和渗流量特征,特别是在材料界面处表现出优异的数值稳定性和灵敏度.与传统有限元方法相比,HS-FEM 在计算效率方面具有显著优势,计算时间少于传统有限元,仅需数十至数百个单元即可达到传统有限元数万个单元才收敛的同等精度;传统有限元模型通常涉及  $10^4 \sim 10^5$  量级的自由度,HS-FEM 方法则通过渗流量与节点水头的独立插值将其降至  $10^2$  量级,内存节省 90%.同

时将计算自由度降低 2 个数量级,内存消耗减少约 90%。该方法可灵活处理复杂几何形状简化网格生成过程,以较少单元实现全域渗流场求解,为工程应用提供了高效可靠的数值工具。

该方法框架可扩展至求解三维和其他多物理场耦合分析领域,三维求解面临几何与拓扑复杂性提升、自由度与计算量指数增长、数值积分效率、边界条件与约束处理、材料本构与各向异性等诸多困难,但 Voronoi 杂交渗流单元仍展现出广阔的学术价值与应用前景。未来研究可从以下方面展开:基于渗流-应力耦合理论,建立考虑渗流体积力、孔隙压力和重力等多物理场协同作用的三维坝体稳定性数值模型。

#### 参考文献(References):

- [1] NEUMAN S P, WITHERSPOON P A. Finite element method of analyzing steady seepage with a free surface [J]. *Water Resources Research*, 1970, **6**(3): 889-897.
- [2] ZHANG W, DAI B, LIU Z, et al. Unconfined seepage analysis using moving Kriging mesh-free method with Monte Carlo integration[J]. *Transport in Porous Media*, 2017, **116**(1): 163-180.
- [3] DAI Q, LEI Y, ZHANG B, et al. A practical adaptive moving-mesh algorithm for solving unconfined seepage problem with Galerkin finite element method[J]. *Scientific Reports*, 2019, **9**: 6988.
- [4] SHARMA V, FUJISAWA K, MURAKAMI A. Space-time finite element method for transient and unconfined seepage flow analysis[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2021, **197**: 103632.
- [5] CHUGH A K, FALVEY H T. Seepage analysis in a zoned anisotropic medium by the boundary element method [J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1984, **8**(4): 399-407.
- [6] 柴军瑞, 仵彦卿. 采用边界元法确定渗流自由面的一种改进方法[J]. 陕西水力发电, 2000(1): 11-12. (CHAI Junrui, WU Yanqing. A modified iterative approach for solving seepage free surface by BEM[J]. *Journal of Shaanxi Water Power*, 2000(1): 11-12. (in Chinese))
- [7] 葛锦宏, 李广信, 介玉新. 无单元法在有自由面渗流计算中的应用[J]. 计算力学学报, 2003, **20**(2): 241-243. (GE Jinhong, LI Guangxin, JIE Yuxin. Application of element-free method to the seepage calculation with free surface[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2003, **20**(2): 241-243. (in Chinese))
- [8] 张石峰, 李茜, 高佩玲. 天然差分方法在地下水渗流问题中的应用[J]. 计算物理, 2007, **24**(3): 307-312. (ZHANG Shifeng, LI Qian, GAO Peiling. Natural difference method for groundwater seepage[J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2007, **24**(3): 307-312. (in Chinese))
- [9] BARDET J P, TOBITA T. A practical method for solving free-surface seepage problems[J]. *Computers and Geotechnics*, 2002, **29**(6): 451-475.
- [10] 李凤志. 渗流自由面分析的比例边界有限元法[J]. 计算物理, 2009, **26**(5): 665-670. (LI Fengzhi. Scaled boundary finite-element method for seepage free surfaces analysis[J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2009, **26**(5): 665-670. (in Chinese))
- [11] 李珏, 金吾根, 薛馨, 等. Trefftz 间接法解自由面渗流问题[J]. 计算力学学报, 2005, **22**(3): 295-298. (LI Jue, JIN Wugen, XUE Xin, et al. Solution of free surface seepage problems by Trefftz indirect method[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2005, **22**(3): 295-298. (in Chinese))
- [12] 薛馨, 金吾根, 李珏, 等. Trefftz 直接法解渗流自由面问题[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, **24**(13): 2322-2326. (XUE Xin, JIN Wugen, LI Jue, et al. Solution of free surface seepage problems by Trefftz direct method [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2005, **24**(13): 2322-2326. (in Chinese))
- [13] 徐文杰, 王永刚. 土石混合体细观结构渗流数值试验研究[J]. 岩土工程学报, 2010, **32**(4): 542-550. (XU Wenjie, WANG Yonggang. Meso-structural permeability of S-RM based on numerical tests[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2010, **32**(4): 542-550. (in Chinese))
- [14] YAN L, MENG Q X, XU W Y, et al. A numerical method for analyzing the permeability of heterogeneous geo-materials based on digital image processing[J]. *Journal of Zhejiang University (Science A): Applied Physics & Engineering*, 2017, **18**(2): 124-137.
- [15] WEI W, JIANG Q, YE Z, et al. Equivalent fracture network model for steady seepage problems with free surfaces[J]. *Journal of Hydrology*, 2021, **603**: 127156.
- [16] 陈远强, 郑宏, 屈新. 基于数值流形法的降雨入渗与坡面径流耦合算法研究[J]. 应用数学和力学, 2023, **44**

- (12): 1499-1511. (CHEN Yuanqiang, ZHENG Hong, QU Xin. A coupling analysis of rainfall infiltration and slope surface runoff based on the numerical manifold method [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2023, **44**(12): 1499-1511. (in Chinese))
- [17] JIA Z, ZHENG H. A new procedure for locating free surfaces of complex unconfined seepage problems using fixed meshes[J]. *Computers and Geotechnics*, 2024, **166**: 106032.
- [18] ZHAO L, ZHANG H, MAO J, et al. Numerical simulation of the bubbling phenomenon ahead of the dam using a two-phase seepage free surface model[J]. *Computers and Geotechnics*, 2023, **155**: 105239.
- [19] ZHAO L, ZHANG H, MAO J, et al. An ICLS-based method for solving two-phase seepage free surface considering compressible gas in porous media[J]. *Computers and Geotechnics*, 2022, **141**: 104528.
- [20] 李树光, 曲凯. 多孔介质中单相气体局部流动的均质化建模[J]. *应用数学和力学*, 2024, **45**(2): 175-183. (LI Shuguang, QU Kai. Homogenization modeling of single-phase gas local flow in porous media [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2024, **45**(2): 175-183. (in Chinese))
- [21] PIAN T H H. Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions[J]. *AIAA Journal*, 1964, **2**(7): 1333-1336.
- [22] PIN T, PIAN T H H. A variational principle and the convergence of a finite-element method based on assumed stress distribution[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1969, **5**(5): 463-472.
- [23] PIAN T H H, TONG P. Basis of finite element methods for solid continua[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1969, **1**(1): 3-28.
- [24] GHOSH S, MUKHOPADHYAY S N. A material based finite element analysis of heterogeneous media involving Dirichlet tessellations[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1993, **104**(2): 211-247.
- [25] GHOSH S, MALLETT R L. Voronoi cell finite elements[J]. *Computers & Structures*, 1994, **50**(1): 33-46.
- [26] GUO R, SHI H J, YAO Z H. Modeling of interfacial debonding crack in particle reinforced composites using Voronoi cell finite element method[J]. *Computational Mechanics*, 2003, **32**(1): 52-59.
- [27] ZHANG R, GUO R. Voronoi cell finite element method for fluid-filled materials[J]. *Transport in Porous Media*, 2017, **120**(1): 23-35.
- [28] ZHANG R, GUO R. Determination of crack tip stress intensity factors by singular Voronoi cell finite element model[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2018, **197**: 206-216.
- [29] KARCHEWSKI B. Multi-scale modelling of geomechanical behaviour using the Voronoi cell finite element method (VCFEM) and finite-discrete element method (VCFEM-DEM)[D]. Hamilton, Ontario: McMaster University, 2015.
- [30] FELIPPA C A. Parametrized multifield variational principles in elasticity, I: mixed functionals[J]. *Communications in Applied Numerical Methods*, 1989, **5**(2): 79-88.
- [31] FELIPPA C A. A survey of parametrized variational principles and applications to computational mechanics [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1994, **113**(1/2): 109-139.