

考虑外磁场的偶应力半空间非完好界面的 弹性波反射^{*}

王长达^{1,2}, 周 洋^{1,2}, 王子翊¹, 李月秋³

(1. 防灾科技学院 地震工程与建筑安全学院, 河北 三河 065201;
2. 河北省工程结构多灾害韧性与应急处置技术创新中心, 河北 三河 065201;
3. 华北科技学院 理学院, 河北 三河 065201)

摘要: 研究了外磁场调控下弹性波在偶应力固体中弹性界面处的反射问题. 首先, 应用偶应力理论和 Maxwell 电磁学理论推导出了弹性波传播的控制方程和三种波(P 波、SV 波和 SS 波), 并且发现外磁场会通过 Lorentz 力对弹性波的传播产生影响, 但不会产生新的波动模式. 其次, 根据弹性界面条件得到相应线性代数方程组, 推导出了 P 波和 SV 波入射时各种反射波相对于入射波的振幅比. 然后, 用能流比定义反射系数, 讨论了 P 波入射时外磁场、3 个弹性常数、偶应力参数和入射波的角频率对弹性波反射系数的影响. 最后, 通过各波的法向能量守恒检验了数值结果的准确性.

关键词: 外磁场; 偶应力; 弹性界面; 反射; 能量守恒

中图分类号: O347.4⁺1 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.460152

Reflection of Elastic Waves at Imperfect Interface in a Couple-Stress Half-Space Under the External Magnetic Field

Wang Changda^{1,2}, Zhou Yang^{1,2}, Wang Ziyi¹, Li Yueqiu³

(1. School of Earthquake Engineering and Building Safety, Institute of Disaster Prevention,
Sanhe, Hebei 065201, P.R. China;
2. Hebei Technology Innovation Center for Multi Hazard Resilience and Emergency
Handling of Engineering Structures, Sanhe, Hebei 065201, P.R. China;
3. College of Science, North China Institute of Science and Technology,
Sanhe, Hebei 065201, P.R. China)

Abstract: The reflection problem of elastic waves at the elastic interface in couple-stress solids was studied under the influence of an external magnetic field. Firstly, based on the couple stress theory and Maxwell's electromagnetic theory, the governing equations for the propagation of elastic waves and 3 types of waves (the P

* 收稿日期: 2025-08-28; 修订日期: 2025-11-11

基金项目: 国家自然科学基金(52278489); 河北省工程结构多灾害韧性与应急处置技术创新中心开放基金(FZ246305); 河北省自然科学基金(E2024512014); 廊坊市科学技术研究与发展计划(2024011030)

作者简介: 王长达(1985—), 男, 讲师, 博士(通信作者. E-mail: wangchangda@139.com);
周洋(1987—), 男, 教授, 博士, 硕士生导师(E-mail: zhouyang@cidp.edu.cn);
李月秋(1977—), 女, 教授, 博士, 硕士生导师(E-mail: liyueqiu2004@163.com).

引用格式: 王长达, 周洋, 王子翊, 李月秋. 考虑外磁场的偶应力半空间非完好界面的弹性波反射[J]. 应用数学和力学, 2026, 47(8): 1009-1018.

wave, the SV wave and the SS wave) were derived. It was also found that the external magnetic field affects the propagation of elastic waves through the Lorentz force, but no new wave patterns are generated. Secondly, based on the elastic interface conditions, the corresponding linear algebraic equations were obtained, and the amplitude ratios of various reflected waves relative to the incident wave in the case of incident P waves and SV waves were derived. Then, the reflection coefficient was defined with the energy flow ratio, and the effects of the external magnetic field, 3 elastic constants, couple stress parameters, and the angular frequency of the incident wave on the elastic wave reflection coefficient, were discussed for the incident P wave. Finally, the accuracy of the numerical results was verified through the conservation of normal energy for each wave.

Key words: external magnetic field; couple stress; elastic interface; reflection; energy conservation

0 引言

了解地壳中电磁场与弹性波之间的耦合关系,能帮助我们更准确地判断地震发生概率,并且可以通过外加电磁场对弹性波动进行调控,这一领域持续引起诸多专家学者关注.1955年,Knopoff^[1]研究了均匀静态磁场中弹性波的传播.1963年,Dunkin和Eringen^[2]通过引入 Lorentz 力并且应用线性化方法,研究了自由无限弹性板在静场中的振动,以及弹性波在均匀静磁场和均匀静电场中的传播问题.1966年,Yu和Tang^[3]在三种初应力状态下,研究了弹性波在均匀磁场中的传播.1968年,Lilley和Smylie^[4]通过级数展开讨论了导体中的弹性波在非均匀磁场中的传播问题.1972年,Suchtelen^[5]考虑了电磁场对弹性波的扰动问题.1990年,Chattopadhyay和Choudhury^[6]研究了在自增强介质中磁弹性横波的传播问题.2023年,岳田田和李月秋等^[7]应用 Maxwell 电磁学理论研究了弹性波在外磁场调控下的反射和透射问题.

最近二十年,弹性波反射透射问题成为弹性波动力学的重要研究领域,外磁场调控导电固体中弹性波的传播引起了学者的广泛关注.2006—2010年,Othman等^[8-10]通过引入 Lorentz 力和广义热弹性理论,研究了弹性波在电磁热弹性固体中的反射问题.2015年,Kumar等^[11-12]研究了平面 SH 波在夹在两个半无限非均匀黏弹性半空间之间的各向异性磁弹性层的反射和透射.Wang和Wei等^[13]讨论了黏弹性边界条件对弹性波在偶应力半空间反射的影响.2019年,Singh和Chattopadhyay等^[14]研究了在功能梯度预应力磁黏弹性纤维增强复合材料结构中 Love 波的传播.2020年,Gunghas等^[15]研究了半无限大均匀各向同性磁热弹性介质中波的传播特征.2023—2025年,Li等^[16-20]应用 Maxwell 电磁学理论和应变梯度理论,分别讨论了 P 波、SV 波和 SH 波入射时,外部磁场对两种偶极梯度弹性固体界面处反射波和透射波的影响;考虑微结构效应和 Lorentz 力作用下,弹性波在具有夹层结构介质中的反射和透射;考虑分数阶热弹性效应和微结构效应,耦合波在磁-电-热-弹性界面处的反射透射;基于 GN-II 型热传导和偶极梯度弹性理论的外磁场下热弹性波在界面处的反射与透射;考虑分数阶热弹性理论的外磁场对热弹性耦合波反射和透射的影响.Yang等^[21]研究了功能梯度材料中周期性非均匀结构对弹性 SH 波衰减的影响.

经典弹性理论不能精确地描述材料在微纳米尺度上的力学行为,为了考虑介质中的微结构效应,1962年,Toupin^[22]和Mindlin等^[23]提出了线性化、各向同性、均匀和中心对称条件下的偶应力理论.在偶应力理论的基础上,微结构理论^[24]和应变梯度理论^[25]等其他广义连续介质理论相继建立起来.偶应力理论既能反映材料微结构,特征参数又小于其他广义连续介质理论,因此得到广泛的应用.张立明和张波等^[26]基于修正偶应力和双变量高阶剪切变形理论,发展了面内压缩荷载作用下双层微板系统的屈曲模型.赵英治和唐怀平等^[27]考虑修正偶应力和 Timoshenko 梁理论,研究了 Winkler 弹性地基上多孔二维功能梯度材料微梁自由振动无量纲振动频率变化规律的问题.Su和Guan等^[28]将偶应力理论与 Biot 理论相结合,并引入高阶微惯性效应,研究了微/纳饱和流体多孔材料中弹性波传播的尺寸效应.吕鑫和柯燎亮等^[29]基于偶应力理论、Hankel 积分变换和积分最小二乘法,研究了横观各向同性压电半空间和刚性绝缘球压头尺度依赖的轴对称无摩擦接触问题.张漫哲和冯志强等^[30]应用双向渐进结构拓扑优化(BESO)方法在修正偶应力弹性理论中进行应力优化,建立了考虑偶应力贡献的非经典等效应力的新型公式.

本文研究了在外加磁场作用下,弹性波在偶应力固体中的传播行为,并考虑弹性波在弹性边界的反射问

题,通过求解控制方程得到三种平面波:纵波(P波)、横波(SV波)和横波模式的表面波(S型SS波).SV波和SS波为色散波,在考虑外加磁场的情况下,弹性波的色散特征保持不变.利用弹性界面条件,得到一个线性代数方程组,推导出各反射波相对于入射波的振幅比;利用能流比定义了反射系数,揭示了外磁场、3个弹性常数、偶应力参数和入射波的角频率对弹性波传播的影响,并验证了能量守恒.外加磁场通过 Lorentz 力的作用对弹性波传播产生影响,但只是影响速度,不产生新的波动模式和影响弹性波的色散特征.相应的理论成果可以应用在地震预测和防灾减灾领域中.

1 外磁场作用下偶应力固体中的弹性波

对于均匀、完全导电的弹性固体,电磁场由 Maxwell 方程组表示为

$$\nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{J} + \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}, \quad (1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \dot{\mathbf{h}}, \quad (1b)$$

$$\mathbf{E} = -\mu_0(\dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{H}_0), \quad (1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = 0, \quad (1d)$$

其中, ∇ 是 Hamilton 算子, μ_0 和 ε_0 分别为磁导率和电导率, $\mathbf{H}_0$ 为外加磁场强度矢量, $\mathbf{h}$ 和 $\mathbf{E}$ 分别为感应磁场和电场强度矢量, $\mathbf{J}$ 是位移电流密度矢量, $\mathbf{u}$ 是位移矢量.

偶应力固体的本构关系为^[23,13]

$$\boldsymbol{\tau}^S = \lambda \boldsymbol{\varepsilon}_S \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2a)$$

$$\boldsymbol{\mu}^D = 4\eta \boldsymbol{\chi} + 4\eta' \boldsymbol{\chi}_C, \quad (2b)$$

其中, λ 和 μ 是经典弹性中的 Lamé 常数, η 和 η' 是考虑偶应力效应产生的材料常数, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 是应变张量, $\boldsymbol{\chi}$ 是曲率-扭曲张量, $\boldsymbol{\tau}^S$ 是应力张量 $\boldsymbol{\tau}$ 的对称部分, $\boldsymbol{\mu}^D$ 是偶应力张量 $\boldsymbol{\mu}$ 的斜偏部分.

考虑电磁弹性半空间 ($y \geq 0$), 假设外加磁场 $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{e}_z$ ($\mathbf{e}_z$ 是沿 z 轴方向的单位向量, H_0 是常数). 外加磁场下偶应力固体中弹性波的运动方程(控制方程)表示为^[7,13,16-20]

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \eta \nabla^2 [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})] + \mathbf{F} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (3)$$

其中, ρ 是质量密度, $\mathbf{F} = \mu_0(\mathbf{J} \times \mathbf{H}_0)$ 为 Lorentz 力.

根据式(1), 得到 Lorentz 力的表达式为

$$\mathbf{F} = \mu_0(\nabla \times \mathbf{h} - \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}) \times \mathbf{H}_0 = \mu_0 H_0^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \varepsilon_0 \mu_0^2 H_0^2 \ddot{\mathbf{u}}. \quad (4)$$

对于平面应变的情况, 位移 $u_z = 0$, u_x 和 u_y 是 x 和 y 的函数, 矢量势 $\boldsymbol{\psi} = \psi(x, y) \mathbf{e}_z$, 由 Helmholtz 定理得

$$\mathbf{u}(x, y) = u_x(x, y) \mathbf{e}_x + u_y(x, y) \mathbf{e}_y = \nabla \varphi(x, y) + \nabla \times \boldsymbol{\psi}(x, y) \mathbf{e}_z, \quad (5)$$

其中, $\varphi(x, y)$ 和 $\psi(x, y)$ 是势函数.

由式(5)结合式(3)和(4), 整理后得到

$$(1 + \bar{H}_0^2) \nabla^2 \varphi + \left(\frac{\omega^2 \bar{H}_0^2}{V_D^2} + \frac{\omega^2}{V_1^2} \right) \varphi = 0, \quad (6a)$$

$$\frac{V_2^2}{V_1^2} (1 - l^2 \nabla^2) \nabla^2 \psi + \left(\frac{\omega^2 \bar{H}_0^2}{V_D^2} + \frac{\omega^2}{V_1^2} \right) \psi = 0, \quad (6b)$$

其中, $V_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ 和 $V_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ 分别是经典弹性固体中的纵波和横波的速度; $V_D = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ 是电磁波的速度; $\bar{H}_0 = (H_0/V_1) \sqrt{\mu_0/\rho}$, 当 $H_0 \rightarrow 0$ 时, 外磁场影响逐渐消失, 式(8a)—8(c)退化为经典偶应力弹性情况; $l = \sqrt{\eta/\mu}$ 是偶应力效应中的微结构特征参数, 具有长度的量纲. 从式(6a)和(6b)可以看出, 电磁效应既影响 P 波, 也影响 SV 波, 但是影响的效果并不相同.

设波的势函数分别为

$$\varphi = A \exp[i(\boldsymbol{\sigma}_P \cdot \mathbf{r} - \omega t)], \quad (7a)$$

$$\psi = B \exp[i(\boldsymbol{\sigma}_S \cdot \mathbf{r} - \omega t)], \quad (7b)$$

其中, A 和 B 分别表示纵波和横波的振幅, $\boldsymbol{\sigma}$ 是波数矢量, $\mathbf{r}$ 为波传播方向上的单位矢量, ω 是角频率.

将式(7a)和(7b)代入式(6a)和(6b)中,得

$$\sigma_p^2 = \frac{\omega^2}{\bar{H}_0^2 + 1} \left(\frac{\bar{H}_0^2}{V_D^2} + \frac{1}{V_1^2} \right), \quad (8a)$$

$$\sigma_{sv}^2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \frac{l^2 \omega^2}{V_2^2} \left(\frac{V_1^2 \bar{H}_0^2}{V_D^2} + 1 \right)}}{2l^2}, \quad (8b)$$

$$\sigma_{ss}^2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{l^2 \omega^2}{V_2^2} \left(\frac{V_1^2 \bar{H}_0^2}{V_D^2} + 1 \right)}}{2l^2}. \quad (8c)$$

这表明在偶应力固体中,有一个P波、一个SV波和一个SS波,其波数分别为 σ_p 、 σ_{sv} 和 σ_{ss} ,具有横波模式的SS波是考虑偶应力效应新产生的波型,但是外磁场不会产生新的波动模式。

2 非完好界面条件和振幅比

入射P波(纵波)或SV波(横波)从半无限大介质中向非完好界面倾斜入射,经过界面反射形成反射的P波、SV波和表面波,如图1所示.入射纵波 φ^I 、入射横波 ψ_{z1}^I 、反射纵波 φ^R 、反射横波 ψ_{z1}^R 和反射表面波 ψ_{z2}^R (横波模式)分别用势函数表示为

$$\varphi^I = A_1 \exp[i(\xi x - \alpha y - \omega t)], \quad (9a)$$

$$\psi_{z1}^I = B_1 \exp[i(\zeta x - \beta y - \omega t)], \quad (9b)$$

$$\varphi^R = A_2 \exp[i(\xi x + \alpha y - \omega t)], \quad (9c)$$

$$\psi_{z1}^R = B_2 \exp[i(\zeta x + \beta y - \omega t)], \quad (9d)$$

$$\psi_{z2}^R = C_2 \exp[-\gamma y + i(\zeta x - \omega t)], \quad (9e)$$

其中, A_1, B_1, A_2, B_2 和 C_2 分别是各种波的振幅; ξ 和 ζ 是视波数; α 和 β 分别是P波和SV波波数矢量在 y 方向的分量; γ 为表面波的衰减系数,波数之间的关系为

$$\sigma_p^2 = \omega^2/V_1^2, \quad (10a)$$

$$\sigma_p^2 = \xi^2 + \alpha^2, \quad (10b)$$

$$\sigma_{sv}^2 = \zeta^2 + \beta^2, \quad (10c)$$

$$\gamma^2 = \sigma_{ss}^2 + \zeta^2. \quad (10d)$$

由式(8a)——(8c)得到外磁场作用下偶应力固体中P波、SV波和SS波的相速度分别是 $V_p = \omega/\sigma_p$, $V_{sv} = \omega/\sigma_{sv}$ 和 $V_{ss} = \omega/\zeta$,从中可以看出外磁场不影响波的色散特性,即外磁场扰动下的P波仍是非色散波,而SV波和SS波仍然是色散的,外磁场只改变弹性波传播速度的大小。

界面中会存在各种缺陷和损伤,界面连接的基体之间不再是完好的黏结,界面处的应力和位移不能同时保持连续性,弹簧模型是一种弱连接的非完好界面,弹性支撑边界的弹性效应可以影响边界处的力学行为,其表达式为

$$p_{yy}|_{y=0} = K_n u_y|_{y=0}, \quad (11a)$$

$$p_{yx}|_{y=0} = K_\tau u_x|_{y=0}, \quad (11b)$$

$$\mu_{yz}|_{y=0} = K_g \omega_z|_{y=0}, \quad (11c)$$

其中, K_n 是法向弹性常数, K_τ 是切向弹性常数, K_g 是旋转弹性常数, p_{yy} 和 p_{yx} 是应力, μ_{yz} 是偶应力,应力和偶应力与势函数的关系为^[23,13]

$$p_{yy} = \sigma_{yy}^S, \quad (12a)$$

$$p_{yx} = \sigma_{yx}^S + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mu_{xz}^d}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{yz}^d}{\partial y} \right), \quad (12b)$$

$$\mu_{yz} = 4\eta\omega_{z,y} + 4\eta'\omega_{y,z} = 4\eta\omega_{z,y}, \quad (12c)$$

$$p_{xx} = \sigma_{xx}^S, \quad (12d)$$

$$p_{xy} = \sigma_{xy}^S - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mu_{xz}^d}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{yz}^d}{\partial y} \right), \quad (12e)$$

$$\mu_{xz} = 4\eta\omega_{z,x} + 4\eta'\omega_{x,z} = 4\eta\omega_{z,x}. \quad (12f)$$

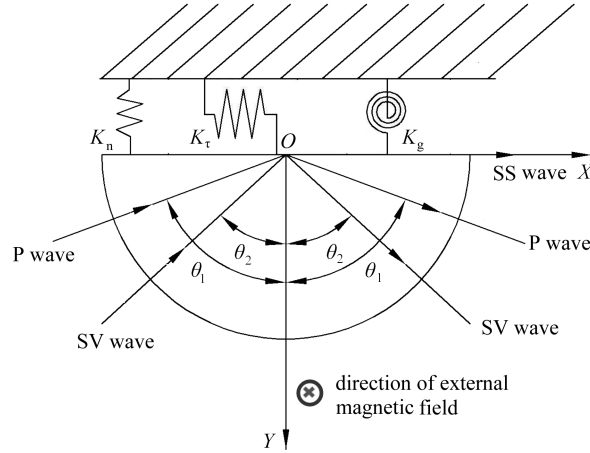


图 1 外磁场作用下入射 P 波和 SV 波在偶应力固体半空间非完好界面的反射

Fig. 1 Reflection of the incident P wave and SV wave at the incomplete boundary of a couple stress solid half-space under the external magnetic field

位移 u_x, u_y 和转角 ω_z 与势函数的关系为

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_z}{\partial y}, \quad (13a)$$

$$u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x}, \quad (13b)$$

$$\omega_z = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial y \partial y} \right) = -\frac{1}{2} \nabla^2 \psi_z. \quad (13c)$$

由以上各式,结合各波的函数表达式(9a)—(9e)和边界条件(11a)—(11c),边界条件对于任何时间 t 和任何坐标 x 都成立,这要求

$$\xi = \zeta, \quad (14)$$

即纵波和横波(入射波和反射波)的视波数必须相等.由 Snell 定律可得纵波和横波的入射角和反射角关系为

$$\frac{\omega \sin \theta_1^I}{V_P} = \frac{\omega \sin \theta_2^I}{V_{SV}} = \frac{\omega \sin \theta_1^R}{V_P} = \frac{\omega \sin \theta_2^R}{V_{SV}} = \xi. \quad (15)$$

最终,可以得到矩阵形式

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{bA}_1 + \mathbf{cB}_1, \quad (16)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (a_{ij})_{3 \times 3}, \mathbf{b} = (b_i)_{3 \times 1}, \mathbf{c} = (c_i)_{3 \times 1}, \quad i, j = 1, 2, 3; \\ a_{11} &= \mu(2\xi^2 - \omega^2/V_2^2) - iK_n\alpha, a_{12} = 2\mu\xi\beta + iK_n\zeta, a_{13} = 2i\mu\gamma\zeta + iK_n\zeta, \\ a_{21} &= -2\mu\xi\alpha - iK_\tau\zeta, a_{22} = \mu(2\zeta^2 - \omega^2/V_2^2) - iK_\tau\beta, a_{23} = \mu(2\zeta^2 - \omega^2/V_2^2) + K_\tau\gamma, \\ a_{31} &= 0, a_{32} = 2i\eta\beta\sigma_{SV}^2 - \frac{1}{2}K_g\sigma_{SV}^2, a_{33} = 2\eta\gamma\sigma_{SS}^2 + \frac{1}{2}K_g\sigma_{SS}^2; \\ b_1 &= -\mu(2\xi^2 - \omega^2/V_2^2) - iK_n\alpha, b_2 = -2\mu\xi\alpha + iK_\tau\zeta, b_3 = 0; \\ c_1 &= 2\mu\xi\beta - iK_n\zeta, c_2 = -\mu(2\zeta^2 - \omega^2/V_2^2) - iK_\tau\beta, c_3 = 2i\eta\beta\sigma_{SV}^2 + \frac{1}{2}K_g\sigma_{SV}^2. \end{aligned}$$

式(16)中, $\mathbf{x} = [A_2, B_2, C_2]^T$ 是反射波的振幅; $\mathbf{b}$ 与入射 P 波相关; $\mathbf{c}$ 与入射 SV 波相关, 反射波相对入射波的振幅比通过求解方程组(16)获得, 当 $B_1 = 0$, 即为入射 P 波时, $\mathbf{x}/A_1$ 为各个波对应的振幅比。

3 能流比反射系数和能量守恒

沿 x 和 y 轴正方向的能流计算公式分别为

$$I_x = - [\operatorname{Re}(p_{xx}) \cdot \operatorname{Re}(\dot{u}_x) + \operatorname{Re}(p_{xy}) \cdot \operatorname{Re}(\dot{u}_y) + \operatorname{Re}(\mu_{xz}) \cdot \operatorname{Re}(\dot{\omega}_z)], \quad (17a)$$

$$I_y = - [\operatorname{Re}(p_{yx}) \cdot \operatorname{Re}(\dot{u}_x) + \operatorname{Re}(p_{yy}) \cdot \operatorname{Re}(\dot{u}_y) + \operatorname{Re}(\mu_{yz}) \cdot \operatorname{Re}(\dot{\omega}_z)]. \quad (17b)$$

一个周期内能流平均值计算公式为

$$\langle I_i \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T I_i(t) dt, \quad i = x, y. \quad (18)$$

沿着 $\mathbf{n}$ 方向传播的能流为

$$\langle I_n \rangle \mathbf{e}_n = \langle I_x \rangle \mathbf{e}_x + \langle I_y \rangle \mathbf{e}_y. \quad (19)$$

入射和反射 P 波和 SV 波的能流分别为

$$\langle I_n^I \rangle_P = \frac{\sigma_P \mu \omega^3}{2V_2^2} |A_1|^2, \quad (20a)$$

$$\langle I_n^I \rangle_{SV} = \frac{1}{2} \sigma_{SV} (\mu \omega^3 / V_2^2 + \eta \sigma_{SV}^4 \omega) |B_1|^2, \quad (20b)$$

$$\langle I_n^R \rangle_P = \frac{\sigma_P \mu \omega^3}{2V_2^2} |A_2|^2, \quad (20c)$$

$$\langle I_n^R \rangle_{SV} = \frac{1}{2} \sigma_{SV} (\mu \omega^3 / V_2^2 + \eta \sigma_{SV}^4 \omega) |B_2|^2. \quad (20d)$$

表面波的能流为

$$\langle I_n^R \rangle_{SS} = \langle I_x^R \rangle_{SS} = \frac{1 - e^{-2}}{4} \zeta \omega \left(4\mu \gamma^2 + \eta \sigma_{SS}^4 + \mu \frac{\omega^2}{V_2^2} \right) |C_2|^2. \quad (21)$$

弹性边界的能流为

$$\langle I_t \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(u_y K_n \dot{u}_y^* + u_x K_\tau \dot{u}_x^* + \omega_z K_g \dot{\omega}_z^*) = 0. \quad (22)$$

这是由于弹簧约束周期性地储存和释放能量但不吸收能量, 一个周期的平均能流是零。

用反射波对入射波的能流比定义为反射系数:

$$E_j = \langle I_n^R \rangle_j / \langle I_n^I \rangle_i, \quad i = P, SV; j = P, SV, SS, \quad (23)$$

其中, $\langle I_n^I \rangle_i$ 是入射波的能流, $\langle I_n^R \rangle_j$ 是反射波的能流密度。

根据能量守恒, 在边界处单位面积上的输入能流等于同一区域的输出能流, 定义能量守恒指数:

$$E = (\langle I_y^R \rangle_P + \langle I_y^R \rangle_{SV}) / \langle I_y^I \rangle_i = 1, \quad i = P, SV. \quad (24)$$

表面波不参与能量守恒的校核, 式(24)可用于验证数值结果的准确性。

4 数值算例和讨论

设定材料参数: Lamé 常数 $\lambda = 2.2 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$, $\mu = 1.1 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$, 密度 $\rho = 2.6 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, 磁导率常数 $\varepsilon_0 = 10^{-9} / (36\pi) \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$, 介电常数 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$, 偶应力参数 $\eta = 0.011 \text{ N}$, 外加磁场强度 $H_0 = 10^7 / (4\pi) \text{ A/m}$, 法向弹性常数 $K_n = 1 \times 10^{16} \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$, 切向弹性常数 $K_\tau = 1 \times 10^{16} \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$, 旋转弹性常数 $K_g = 1 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, 角频率 $\omega = 6 \times 10^9 \text{ rad/s}$ 。

图2展示了在 P 波入射情况时, 外磁场对反射 P 波、反射 SV 波和反射表面波的影响。可以观察到, 随着外磁场的单调增加, 反射 P 波逐渐的增加, 反射 SV 波和反射表面波逐渐的减少。这说明 P 波入射时, 外磁场能抑制弹性波的模式转换, 更好地促进与入射波相同模式的波在界面处的反射。当外磁场逐渐减小并趋于 0

时,各波反射系数接近于经典偶应力弹性情况,验证了方法的有效性。

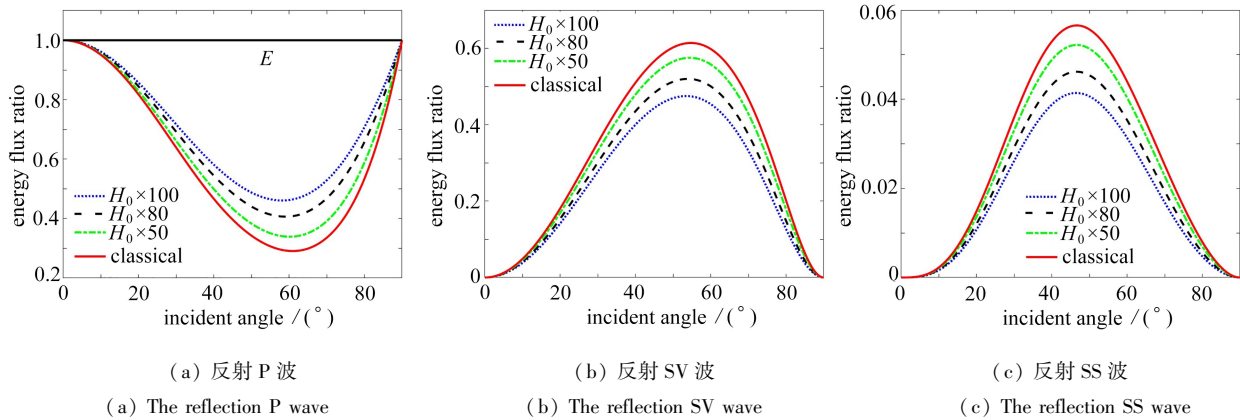


图 2 P 波入射时外磁场 H_0 对反射系数的影响

Fig. 2 Influences of external magnetic field H_0 on the reflection coefficients in the incident P wave situation

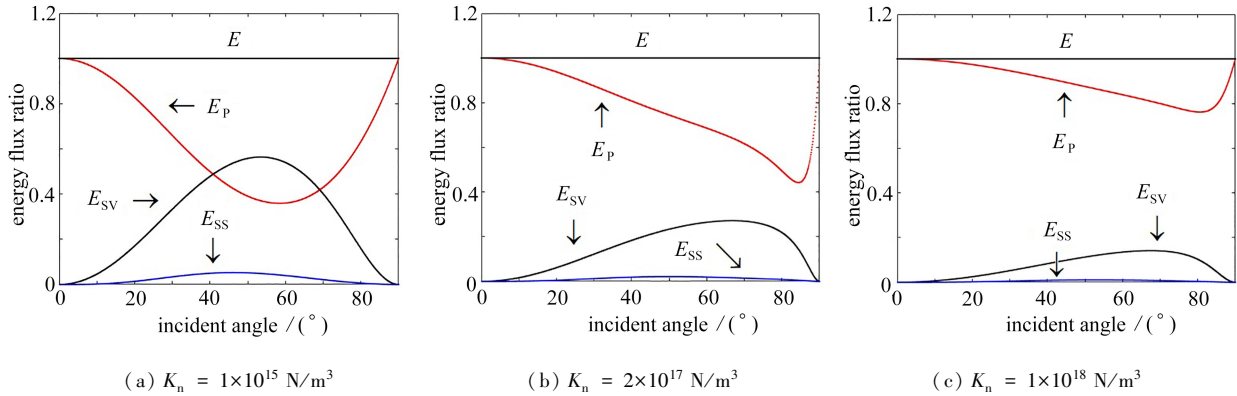


图 3 P 波入射时法向弹性常数 K_n 对反射系数的影响

Fig. 3 Influences of normal stiffness K_n on the reflection coefficients in the incident P wave situation

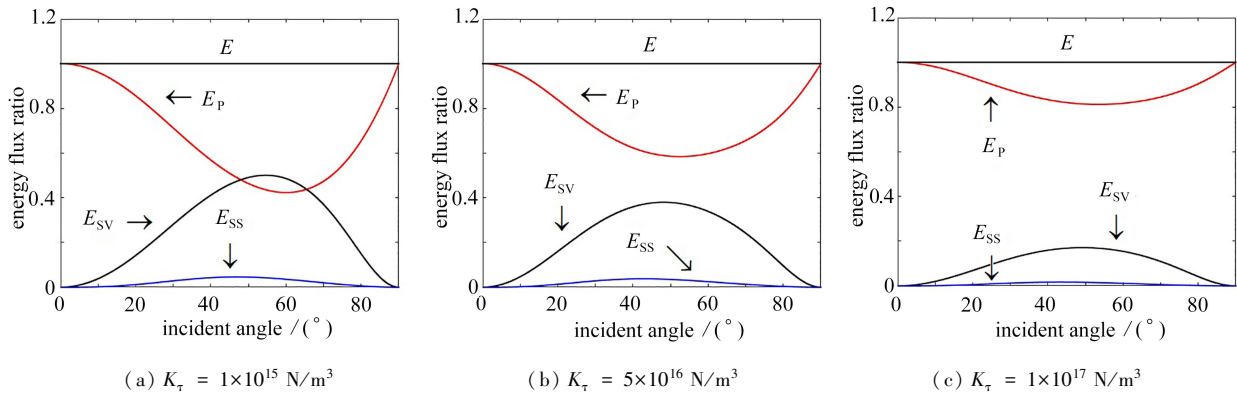


图 4 P 波入射时切向弹性常数 K_τ 对反射系数的影响

Fig. 4 Influences of tangent stiffness K_τ on the reflection coefficients in the incident P wave situation

图 3 至图 5 分别展示了 P 波入射情况时非完好界面(弹性边界)对反射波的影响。图 3 说明法向弹性常数 K_n 的影响:随着法向弹性常数 K_n 的增加,反射 P 波单调地增加,而反射 SV 波和表面波则单调地减少。图 4 说明切向弹性常数 K_τ 的影响:切向弹性系数 K_τ 和法向弹性常数 K_n 的影响相似,即切向弹性常数 K_τ 的增加使反射 P 波增大,使反射 SV 波和表面波减小。图 5 说明旋转弹性常数 K_g 的影响:随着旋转弹性常数 K_g 的增大,反射 P 波和表面波单调地增大,而反射 SV 波则单调地减少。从图中可以发现:法向、切向和旋转弹性常数对反射 P 波和反射 SV 波的影响是相似的,即随着弹性常数的增加使反射 P 波增强,使反射 SV 波减弱。然

而,三种弹性常数对反射表面波有不同的影响,法向弹性常数 K_n 和切向弹性常数 K_t 的增加使反射 SS 波减弱,而旋转弹性常数 K_g 的增加增强了反射 SS 波。

图 6 和图 7 展示了偶应力参数 η 和入射波的角频率 ω 对各反射波的影响。偶应力参数 η 或角频率 ω 的增加提高了 P 波的反射系数,而 SV 波和 SS 波的反射系数没有明显变化。这说明在这个算例中,由于入射波是纵波(P 波),偶应力参数 η 和入射波的角频率 ω 对横波(SV 波)和横波模式的表面波影响较小。图 8 展示了外加磁场对三种波传播速度的影响,由于 P 波是非色散波,所以当外磁场作用消失时,P 波的速度接近于经典弹性固体中纵波波速。

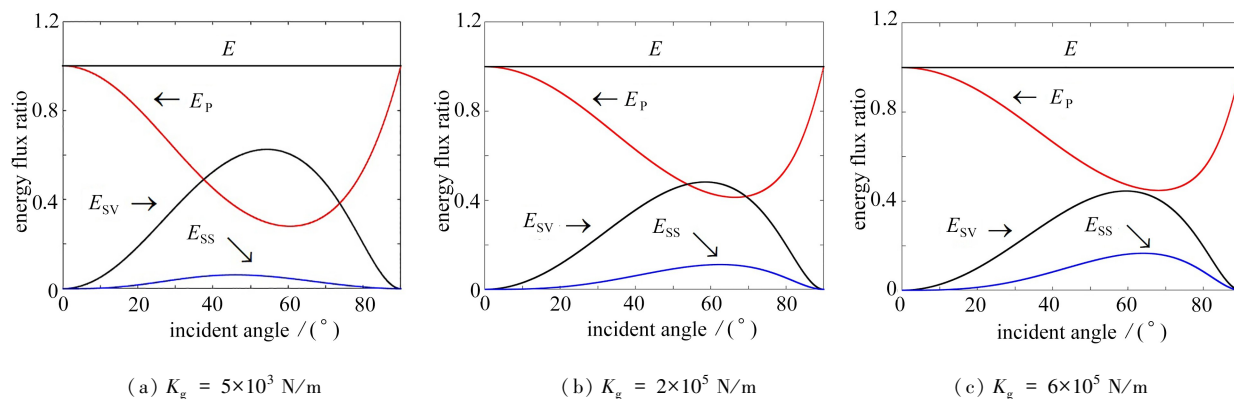


图 5 P 波入射时旋转弹性常数 K_g 对反射系数的影响

Fig. 5 Influences of rotational stiffness K_g on the reflection coefficients in the incident P wave situation

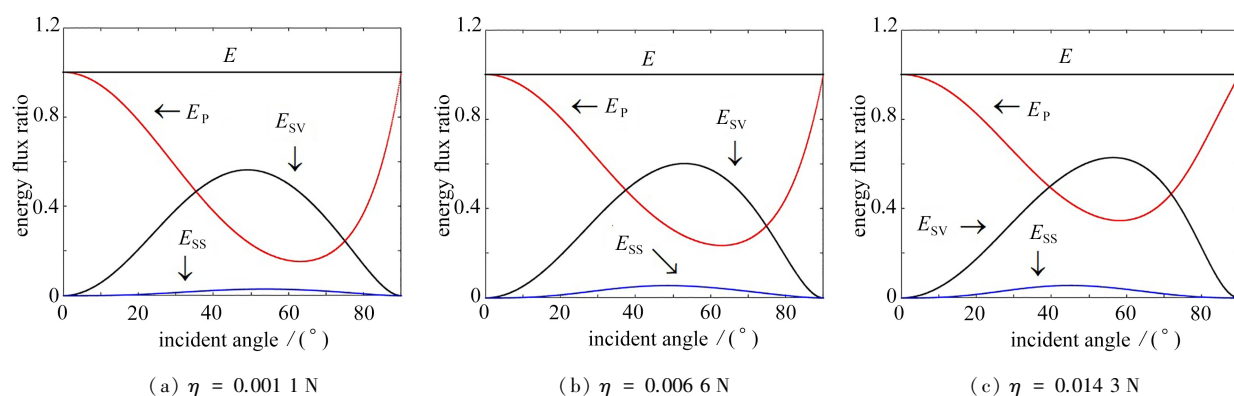


图 6 P 波入射时偶应力参数 η 对反射系数的影响

Fig. 6 Influences of couple-stress constant η on the reflection coefficients in the incident P wave situation

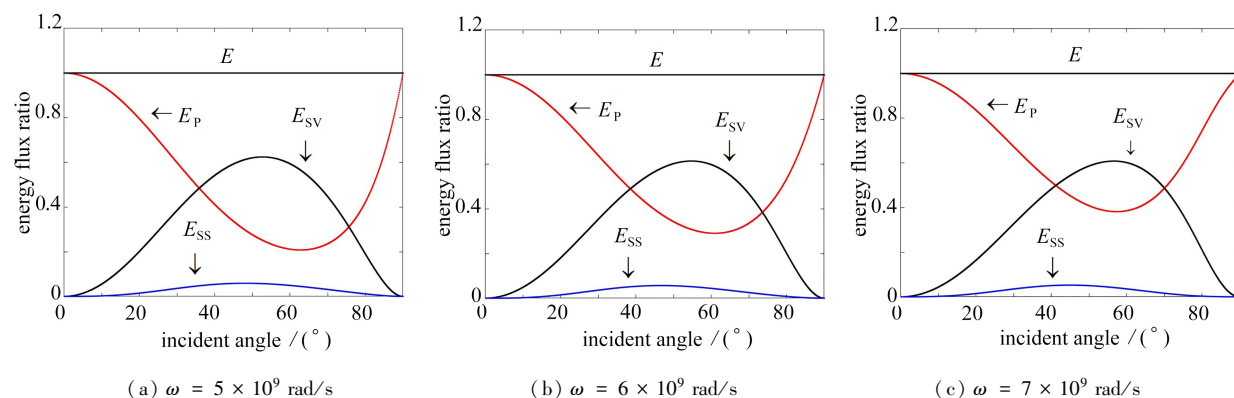
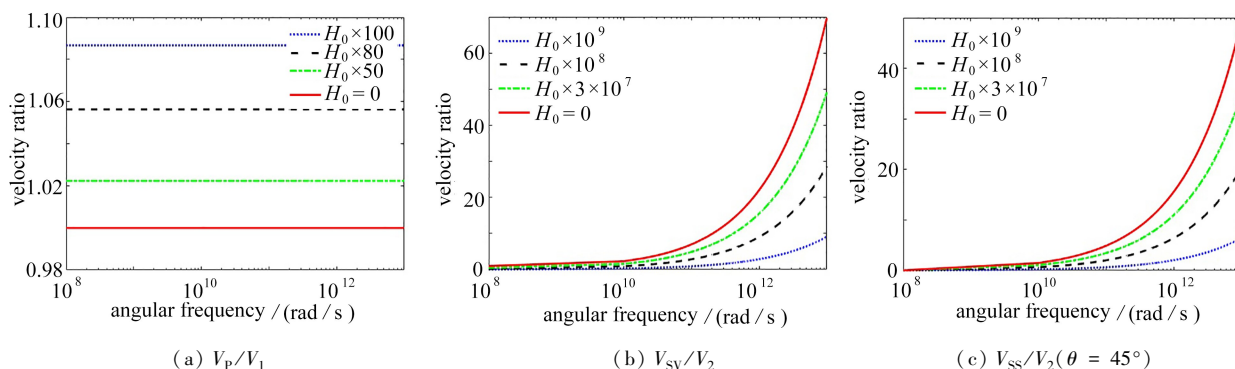


图 7 P 波入射时角频率 ω 对反射系数的影响

Fig. 7 Influences of angular frequency ω on the reflection coefficients in the incident P wave situation

图 8 P 波入射时外磁场 H_0 对波速的影响Fig. 8 Influences of external magnetic field H_0 on the wave velocities in the incident P wave situation

5 结 论

P 波入射时,外磁场、偶应力参数 η 、入射波的角频率 ω 、弹簧的法向弹性常数 K_n 、切向弹性常数 K_t 和旋转弹性常数 K_g 对反射 P 波、反射 SV 波和表面波的影响不完全相同,外磁场、偶应力参数 η 、入射波的角频率 ω 和三种弹性常数均能提高 P 波的反射系数,并且除了偶应力参数 η 和入射波的角频率 ω 都可以抑制弹性波的波型转换,但是旋转弹性常数 K_g 提高了表面波,偶应力参数 η 和入射波的角频率 ω 对 SV 波和表面波影响不大,这与其他情况明显不同.表面波要比反射 P 波和 SV 波低一个量级,这是由于表面波为考虑偶应力效应新产生的波.从图 2 到图 7 能量守恒指数 E 始终保持单位一,这说明反射波满足能量守恒,验证了数值结果的准确性.

参考文献 (References):

- [1] Knopoff L. The interaction between elastic wave motions and a magnetic field in electrical conductors[J]. *Journal of Geophysical Research*, 1955, **60**(4): 441-456.
- [2] Dunkin J W, Eringen A C. On the propagation of waves on electromagnetic elastic solids[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1963, **1**(4): 461-495.
- [3] Yu C P, Tang S. Magneto-elastic waves in initially stressed conductors[J]. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 1966, **17**(6): 766-775.
- [4] Lilley F E M, Smylie D E. Elastic wave motion and a nonuniform magnetic field in electrical conductors[J]. *Journal of Geophysical Research*, 1968, **73**(20): 6527-6533.
- [5] Suchtelen J V. Product properties: a new application of composite materials[J]. *Philips Research Reports*, 1972, **27**(784): 28-37.
- [6] Chattopadhyay A, Choudhury S. Propagation, reflection and transmission of magnetoelastic shear waves in a self-reinforced medium[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1990, **28**(6): 485-495.
- [7] 岳田田, 李月秋, 王长达. 外磁场调控下弹性波的反射和透射[J]. *力学季刊*, 2023, **44**(4): 1012-1023. (Yue Tiantian, Li Yueqiu, Wang Changda. Reflection and transmission of elastic waves regulated by external magnetic field[J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2023, **44**(4): 1012-1023. (in Chinese))
- [8] Othman M I A, Song Y Q. The effect of rotation on the reflection of magneto-thermoelastic waves under thermoelasticity without energy dissipation[J]. *Acta Mechanica*, 2006, **184**(1-4): 189-204.
- [9] Othman M I A, Song Y Q. Reflection of magneto-thermoelastic waves with two relaxation times and temperature dependent elastic moduli[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2007, **32**(4): 483-500.
- [10] Othman M I A. Generalized electro-magneto-thermoelasticity in case of thermal shock plane waves for a finite conducting half-space with two relaxation times[J]. *Mechanics and Mechanical Engineering*, 2010, **14**(1): 5-30.
- [11] Kumar S, Pal P C, Majhi S. Reflection and transmission of plane SH-waves through an anisotropic magneto-elastic layer sandwiched between two semi-infinite inhomogeneous viscoelastic half-spaces[J]. *Pure and Applied Geophysics*, 2015, **172**(10): 2621-2634.

- [12] Kumar S, Majhi S, Pal P C. Reflection and transmission of plane SH-waves in two semi-infinite anisotropic magnetoelastic media[J]. *Meccanica*, 2015, **50**(9): 1-10.
- [13] Wang C D, Wei P J, Zhang P, et al. Influences of a visco-elastically supported boundary on reflected waves in a couple-stress elastic half-space[J]. *Archives of Mechanics*, 2017, **69**(2): 131-156.
- [14] Singh P, Chattopadhyay A, Singh A.K. Propagation of Love-type wave in functionally graded pre-stressed magneto-visco-elastic fiber-reinforced composite structure[J]. *Waves in Random and Complex Media*, 2019, **31**(5): 1-30.
- [15] Gunghas A, Sheorad D, Kumar S, et al. Waves in a magneto-thermoelastic diffusive half-space with microconcentrations[J]. *Waves in Random and Complex Media*, 2020, **32**(2): 708-727.
- [16] Li Y Q, Bian X Y, Wang C D, et al. The influences of external magnetic field on the reflection and transmission waves at the interface of two dipolar gradient elastic solids[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2023, **121**: 524-541.
- [17] Li Y Q, Yue T T, Bian X Y, et al. Reflection and transmission of elastic waves through a sandwich structure with the microstructural effects and Lorentz force considered[J]. *Acta Mechanica*, 2024, **235**(6): 3831-3848.
- [18] Li Y, Li Y Q, Han Y, et al. Propagation of coupled waves across a magneto-electro-thermo-elastic interface with consideration of fractional order thermoelasticity and microstructural effect[J]. *Acta Mechanica*, 2024, **235**(9): 5469-5488.
- [19] Li Y, Li Y Q, Wang H, et al. Reflection and transmission of thermoelastic waves under an external magnetic field based on GN-II heat conduction and dipolar gradient elasticity[J]. *Acta Mechanica*, 2025, **236**(4): 2583-2598.
- [20] Li Y, Li Y Q, Yue T T, et al. Effects of external magnetic field on the reflection and transmission of thermoelastic coupled waves with consideration of fractional order thermoelasticity[J]. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2025, **32**(10): 2381-2392.
- [21] Li X H, Shen J, Li C L, et al. The impact of periodicity in functionally graded materials on the attenuation of elastic shear waves[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2025, **144**: 116106.
- [22] Toupin R A. Elastic materials with couple-stresses[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1962, **11**(1): 385-414.
- [23] Mindlin R D, Tiersten H F. Effects of couple-stress in linear elasticity[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1962, **11**(1): 415-448.
- [24] Mindlin R D. Micro-structure in linear elasticity[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1964, **16**(1): 51-78.
- [25] Mindlin R D. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1965, **1**(4): 417-438.
- [26] 张立民, 张波, 张旭, 等. 面内压缩荷载作用下双层微板系统的同步/异步屈曲[J]. 应用数学和力学, 2023, **44**(2): 160-167.(Zhang Limin, Zhang Bo, Zhang Xu, et al. Synchronous/asynchronous buckling of double-layered microplate systems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2023, **44**(2): 160-167.(in Chinese))
- [27] 赵英治, 唐怀平, 赖泽东, 等. 弹性地基上多孔二维功能梯度材料微梁自由振动研究[J]. 应用数学和力学, 2023, **44**(11): 1354-1365.(Zhao Yingzhi, Tang Huaiping, Lai Zedong, et al. Free Vibration analysis of porous 2D functionally graded material microbeams on Winkler's foundation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2023, **44**(11): 1354-1365.(in Chinese))
- [28] Su C, Guan W, Yin Y G, et al. Elastic waves in fluid-saturated porous materials with a couple-stress solid phase[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2024, **569**(117993): 1-18.
- [29] 吕鑫, 柯燎亮, 苏洁. 基于偶应力理论的压电材料轴对称接触问题[J]. 应用数学和力学, 2024, **45**(10): 1268-1278.(LÜ Xin, Ke Liaoliang, Su Jie. An axisymmetric contact problem of piezoelectric materials based on the couple stress theory[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2024, **45**(10): 1268-1278.(in Chinese))
- [30] 张漫哲, 顾水涛, 冯志强. 基于修正偶应力理论的应力最小化双向渐进结构拓扑优化方法[J]. 应用数学和力学, 2025, **46**(1): 12-28.(Zhang Manzhe, Gu Shuitao, Feng Zhiqiang. Bidirectional evolutionary topology optimization for stress minimization based on the modified couple stress elasticity[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2025, **46**(1): 12-28.(in Chinese))