

基于 Biot 形式波动方程的一维非饱和土柱瞬态响应研究^{*}

刘砚山¹, 吉姿洁², 赵 云²

(1. 河南省城乡建筑设计院有限公司, 郑州 451452;
2. 河南工业大学 土木工程学院, 郑州 450001)

摘要: 基于 Biot 形式的非饱和土波动方程, 本文研究了一维非饱和土柱在动力荷载作用下的瞬态响应问题。目的在于分析非饱和土中的波动特性, 并推导该问题的解析解, 为相关工程问题提供理论依据。在方法上, 考虑饱和度对渗透系数和动剪切模量的影响, 采用分离变量法和状态空间法相结合的方式系统求解了一维非饱和土柱在动载下的瞬态响应问题解析解, 并通过与 Comsol PDE 模块的有限元数值结果对比, 验证了解答的正确性。结果显示: 在非饱和土中, 由于渗透系数较低, 仅能观测到一种压缩波; 随着固有渗透系数的增大, 孔隙水压力的瞬态响应峰值逐渐减小; 同时, 饱和度增加会导致孔隙水压力响应幅值明显上升。结论认为, 饱和度与渗透系数对非饱和土中的波动响应具有显著影响, 解析解能够有效预测瞬态响应特征, 并为非饱和土动力学行为分析提供理论支持。

关键词: 瞬态响应; 非饱和土; 解析解; 状态空间法

中图分类号: TU435 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.460155

Transient Responses of 1D Unsaturated Soil Columns Based on the Biot-Type Wave Equations

Liu Yanshan¹, Ji Zijie², Zhao Yun²

(1. *Urban & Rural Construction and Designing Institute of Henan Province Co., Ltd., Zhengzhou 451452, P.R. China;*
2. *College of Civil Engineering and Architecture, Henan University of Technology, Zhengzhou 450001, P.R. China*)

Abstract: Based on the Biot-type wave equations for unsaturated soils, the transient responses of 1D unsaturated soil columns subjected to dynamic loading were investigated, to analyze wave propagation characteristics in unsaturated soils and derive analytical solutions to provide a theoretical basis for relevant engineering problems. The effects of saturation on both the permeability coefficient and the dynamic shear modulus were incorporated into the governing equations. With the separation of variables method plus the state space method, a systematic analytical solution of the transient response was obtained. The validity of the solution was verified

^{*} 收稿日期: 2025-08-28; 修订日期: 2026-06-23

基金项目: 国家自然科学基金(52578399); 河南省科技攻关计划(252102320021); 河南工业大学拓新团队培育项目(2024TXTD15); 河南省高等学校重点科研项目(26B410001)

作者简介: 刘砚山(1989—), 男, 高级工程师(E-mail: yanshan_8903@163.com);
赵云(1989—), 男, 博士(通信作者, E-mail: zhaoyun1106@163.com)。

引用格式: 刘砚山, 吉姿洁, 赵云. 基于 Biot 形式波动方程的一维非饱和土柱瞬态响应研究[J]. 应用数学和力学, 2026, 47(7): 886-894.

through comparison with the finite element results from COMSOL's PDE module. The results indicate that, only 1 compression wave occurs in unsaturated soil due to its relatively low permeability. As the intrinsic permeability increases, the peak transient pore water pressure response will gradually decreases. Furthermore, an increase in the saturation leads to a significant rise in the amplitude of the pore water pressure response. Both the saturation and the permeability considerably influence the wave-induced responses in unsaturated soils. The proposed analytical method effectively predicts transient response characteristics and provides a theoretical support for analyzing the dynamic behaviors of unsaturated soils.

Key words: transient response; unsaturated soil; analytical solution; state-space method

0 引 言

动荷载下非饱和土体的瞬态响应问题是土动力学的重要研究内容,在地震工程和交通岩土工程等方面有着广泛的应用.寻求不同工况下的非饱和土的瞬态响应解答对研究波在非饱和土中的传播具有重要意义.

当前,常用的非饱和土波动理论主要有两种,一是基于混合物理论的多孔介质理论^[1-3],该理论基于严格的热力学定律,可以较好地描述土体内多相介质间的耦合作用,然而,该模型诸多参数需要通过理想试验获得,不便于推广应用.另一种是在饱和土基础上,可描述三相土体力学特性的 Biot 理论^[4-5].尽管 Biot 理论基于唯象获得,但由于其理论相对简单,可以用相对较少的参数描述非饱和土的力学特性,在工程实践中得到广泛应用.如在交通岩土工程领域, Lu 等^[6]采用双重 Fourier 变换方法,给出了移动荷载下非饱和半空间的动力响应.在桩基工程中, Zhang 等^[7]给出了非饱和土层中群桩的动力响应.在海洋岩土工程中, Ma 等^[8]建立了流体-非饱和和多孔介质双层模型,给出半解析解.在地震工程方面,考虑热效应,马强等^[9]研究了 P 波入射非饱和土自由场地震动响应.

可以看出,当前非饱和土的动力问题已经得到广泛关注,然而由于非饱和问题的复杂性,当前对动力问题的求解往往采用数值方法和积分变换法,时域内的解析解答并不多见.基于 Zienkiewicz 等^[10]提出的非饱和和多孔介质波动方程, Shan 等^[11]和 Zhao 等^[12-13]给出了一系列瞬态响应问题解析和半解析解,然而, Zienkiewicz 的波动方程没有考虑土水曲线在非饱和土中的作用.此外,当前已有的解答没有考虑饱和度变化对动剪切模量、渗透系数等参数的影响,从而导致出现一些不合理的结果,如超静孔压随着饱和度增加而降低.在动力过程中,孔隙水/气压力瞬变,导致吸力瞬时变化,进而引起饱和度重新分布,这又反过来实时改变着土体的刚度和渗透性.这种“动力场-流体压力场-饱和度场-材料参数场”之间的强非线性、时变耦合效应,使得建立和求解考虑 SWCC 曲线的非饱和土波动方程较为困难.非饱和土的力学与水力特性(如剪切模量、压缩性、渗透系数)强烈依赖于饱和度,而饱和度本身又随着土中的吸力(与 SWCC 直接相关)和动力荷载导致的孔隙水/气压力变化动态演化,准确描述这一复杂的、路径依赖的耦合本构关系,是当前非饱和土研究的挑战.因此,许多早期研究为了获得数学上可处理的解析解,不得不将这些参数设为常量.然而,忽略 SWCC 和饱和度的动态影响,将无法真实反映非饱和土在动荷载下的瞬态响应机理.基于连续介质力学和空间平均化方法,明确考虑 SWCC 及饱和度的影响,文献[6-7,14]等建立了相应的非饱和波动方程,相较于传统模型有了较大改进.但也由此引入了以下难点:①波动方程本身是非线性,传统解析方法难以进行求解;②诸多参数是饱和度的函数,强非线性、时变耦合效应使得求解困难,尤其是解析解难以获得.本文通过引入参数化函数方程来表征剪切模量和动力渗透系数随饱和度的变化情况,将复杂的非线性问题在特定条件下进行了线性化或准线性化处理,从而使得问题既考虑饱和度关键影响,又能在数学上可解.本文在前人研究基础上,基于 Biot 形式的非饱和土波动方程,考虑饱和度对剪切模量和渗透系数影响,采用分离变量法和状态空间法给出一维非饱和土柱在动载作用下的瞬态响应问题解析解,系统分析了饱和度和渗透系数对非饱和土柱瞬态响应的影响.

1 分析模型

建立如图 1 所示的一维非饱和土柱理论分析模型,土层高度为 H ,在上表面施加应力边界条件,在下表

面施加位移边界条件.对于一维问题,波仅在 z 方向上传播.

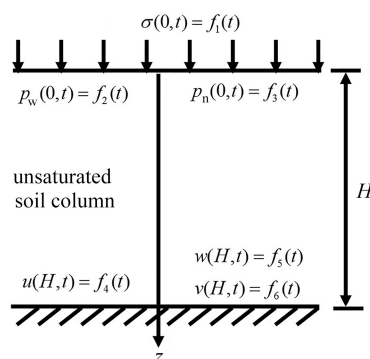


图1 一维非饱和土柱计算模型

Fig. 1 The analytical model of the 1D unsaturated soil

2 控制方程与求解方法

2.1 控制方程

对于非饱和土,其动量平衡方程如下:

$$\sigma_{,z} - \rho u_{,tt} - \rho_w w_{,tt} - \rho_n v_{,tt} = 0, \quad (1)$$

$$p_{w,z} + \rho_w u_{,tt} + \rho_w w_{,tt} / (nS_w) + \rho_w g w_{,t} / k_w = 0, \quad (2)$$

$$p_{n,z} + \rho_n u_{,tt} + \rho_n v_{,tt} / (nS_n) + \rho_n g v_{,t} / k_n = 0, \quad (3)$$

式中, σ 为总应力,以拉为正; p_w 和 p_n 为孔隙水和孔隙气压力,以压为正; u 为固体骨架绝对位移, w 和 v 分别为孔隙水和孔隙气的相对位移,与固体骨架绝对位移间满足, $w = nS_w(\bar{w} - u)$ 和 $v = nS_n(\bar{v} - u)$, $\bar{w}$ 和 $\bar{v}$ 分别为孔隙水和孔隙气的绝对位移, n 为材料孔隙率, S_w 和 S_n 分别为孔隙水和孔隙气的饱和度,满足 $S_w + S_n = 1$; ρ 为非饱和土的密度,满足表达式 $\rho = (1 - n)\rho_s + nS_w\rho_w + nS_n\rho_n$,其中, ρ_s , ρ_w 和 ρ_n 分别为固体颗粒、孔隙水和孔隙气的密度; k_w 和 k_n 分别为孔隙水和孔隙气的渗透系数,表达式分别为 $k_w = \rho_w g \kappa k_{rw} / \eta_w$ 和 $k_n = \rho_n g \kappa k_{rn} / \eta_n$, κ 为非饱和土的固有渗透系数, k_{rw} 和 k_{rn} 分别为孔隙水和孔隙气的相对渗透系数, η_w 和 η_n 分别为孔隙水和孔隙气的动力黏滞系数, g 为重力加速度,方程中符号下标中的“,”表示对某一变量(如坐标 z 和时间 t)求导.

渗流连续方程采用积分形式^[6-7, 14]:

$$A_{11}p_w + A_{12}p_n + A_{13}u_{,z} + v_{,z} = 0, \quad (4)$$

$$A_{21}p_w + A_{22}p_n + A_{23}u_{,z} + w_{,z} = 0, \quad (5)$$

式中

$$A_{11} = nA_s + (1 - S_w) \frac{\alpha\chi - nS_w}{K_s}, A_{12} = (1 - S_w) \left(\frac{\alpha(1 - \chi) - n(1 - S_w)}{K_s} + \frac{n}{K_n} \right) - nA_s,$$

$$A_{13} = (1 - S_w) \left(1 - \frac{K_b}{K_s} \right), A_{21} = \frac{S_w(\alpha\chi - nS_w)}{K_s} - nA_s + \frac{nS_w}{K_w}, A_{22} = \frac{(\alpha(1 - \chi) - n(1 - S_w))S_w}{K_s} + nA_s,$$

$$A_{23} = S_w \left(1 - \frac{K_b}{K_s} \right), A_s = -amd(1 - S_{w0}) (S_e)^{(m+1)/m} ((S_e)^{-1/m} - 1)^{(d-1)/d},$$

χ 为有效应力系数; S_{w0} 为束缚饱和度, $S_e = (S_w - S_{w0}) / (1 - S_{w0})$; $\alpha = 1 - K_b/K_s$; a, m, d 为V-G模型的参数; K_s, K_b, K_w 和 K_n 分别为固相、土骨架、液相和气相的体积压缩模量.

方程(4)和方程(5)可进一步改写为

$$p_w = \frac{A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22}}{\Delta} u_{,z} + \frac{A_{12}}{\Delta} w_{,z} - \frac{A_{22}}{\Delta} v_{,z}, \quad (6)$$

$$p_n = \frac{A_{13}A_{21} - A_{11}A_{23}}{\Delta} u_{,z} - \frac{A_{11}}{\Delta} w_{,z} + \frac{A_{21}}{\Delta} v_{,z}, \quad (7)$$

式中, $\Delta = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$.

固体骨架本构方程为

$$\sigma + \alpha(S_w p_w + S_n p_n) = (\lambda + 2\mu)u_{,z}. \quad (8)$$

上述控制方程(1)~(8)写为矩阵形式为

$$Ku_{,zz} - Mu_{,tt} - Cu_{,t} = 0, \quad (9)$$

其中

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma \\ -p_w \\ -p_n \end{Bmatrix} = Ku_{,z}, \quad u = \begin{Bmatrix} u \\ w \\ v \end{Bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_w g/k_w & 0 \\ 0 & 0 & \rho_n g/k_n \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} \rho & \rho_w & \rho_n \\ \rho_w & \rho_w/(nS_w) & 0 \\ \rho_n & 0 & \rho_n/(nS_n) \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix},$$

其中

$$B_{11} = \lambda + 2\mu + \frac{(A_{13}A_{22} - A_{12}A_{23})S_w\alpha}{\Delta} + \frac{(A_{11}A_{23} - A_{13}A_{21})S_n\alpha}{\Delta}, \quad B_{12} = \frac{(A_{11}S_n - A_{12}S_w)\alpha}{\Delta},$$

$$B_{13} = \frac{(A_{22}S_w - A_{21}S_n)\alpha}{\Delta}, \quad B_{21} = \frac{A_{13}A_{22} - A_{12}A_{23}}{\Delta}, \quad B_{22} = \frac{-A_{12}}{\Delta}, \quad B_{23} = \frac{A_{22}}{\Delta},$$

$$B_{31} = \frac{A_{11}A_{23} - A_{13}A_{21}}{\Delta}, \quad B_{32} = \frac{A_{11}}{\Delta}, \quad B_{33} = \frac{-A_{21}}{\Delta}.$$

2.2 边界条件与初始条件

如图 1 所述,本文模型假设如下边界条件:

$$\begin{cases} \sigma(0,t) = f_1(t), p_w(0,t) = f_2(t), p_n(0,t) = f_3(t), \\ u(H,t) = f_4(t), w(H,t) = f_5(t), v(H,t) = f_6(t). \end{cases} \quad (10)$$

本文采用如下初始条件,即

$$u(z,0) = g_1 = (g_{11}, g_{12}, g_{13})^T, \quad u_{,t}(z,0) = g_2 = (g_{21}, g_{22}, g_{23})^T, \quad (11)$$

式中, $g_{11} \sim g_{23}$ 为任意函数.

控制方程(9)以及边界条件(10)和初始条件(11)组成本问题定解模型.

3 求解过程

3.1 边界齐次化

为求解控制方程(9),首先将边界进行齐次化处理,位移 u 写成两部分之和:

$$u(z) = u^d + u^s, \quad (12)$$

式中上标 d 和 s 分别代表动力分量和静力分量.

静力分量表达式如下:

$$u^s = u^s_{,z}(z-H) + u(H,t) = K^{-1} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ -f_2(t) \\ -f_3(t) \end{bmatrix} (z-H) + \begin{bmatrix} f_4(t) \\ f_5(t) \\ f_6(t) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

将 u^s 表达式代入边界条件(10),可得

$$\sigma^d(0,t) = 0, p_w^d(0,t) = 0, p_n^d(0,t) = 0, u^d(H,t) = 0, w^d(H,t) = 0, v^d(H,t) = 0. \quad (14)$$

代入初始条件(11),可得

$$u^d(z,0) = g_1 - u^s(z,0), \quad u^d_{,t}(z,0) = g_2 - u^s_{,t}(z,0). \quad (15)$$

代入到控制方程(9)中,可得

$$Ku_{,zz}^d - Mu_{,tt}^d - Cu_{,t}^d = Mu_{,tt}^s + Cu_{,t}^s - Ku_{,zz}^s. \quad (16)$$

至此,原非齐次边界问题已转换为齐次边界问题,包括控制方程(16)、边界条件(14)和初始条件(15)。

3.2 齐次方程解

首先求解对应的齐次方程解:

$$Ku_{,zz}^d - Mu_{,tt}^d - Cu_{,t}^d = 0. \quad (17)$$

根据分离变量法,假设方程(17)的解答具有如下形式:

$$u^d = T(t)Z(z). \quad (18)$$

将式(18)代入式(17)可得

$$Z_{,zz}(z) - \lambda Z(z) = 0, \quad (19)$$

式中, λ 为任意常数。

容易证明只有当 $\lambda = -\omega^2 < 0$ 时,方程(19)有非零解:

$$Z(z) = c_1 \cos(\omega z) + c_2 \sin(\omega z). \quad (20)$$

代入边界条件(14)可得

$$c_1 = 1, c_2 = 0, \omega_k = \frac{2k-1}{2H} \pi, \quad k = 1, 2, 3, \dots. \quad (21)$$

则方程(17)的解可以写成如下形式:

$$u^d = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) Z_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cos(\omega_k z). \quad (22)$$

3.3 非齐次方程解

将方程(22)代入方程(16)中,可得

$$K \sum_{k=1}^{\infty} Z_{k,zz}(z) T_k(t) - M \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(z) T_{k,tt}(t) - C \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(z) T_{k,t}(t) = Mu_{,tt}^s + Cu_{,t}^s. \quad (23)$$

将式(22)同时左乘 $Z_k(z)$, 利用三角函数正交性,可得

$$MT_{k,tt}(t) + CT_{k,t}(t) + \omega_k^2 KT_k(t) = G_k(t) = \frac{2}{H} \int_0^H Z_k(z) (-Mu_{,tt}^s - Cu_{,t}^s) dz. \quad (24)$$

采用类似的方法,将方程(22)代入初始条件(15)中,可以获得

$$T_k(0) = \frac{2}{H} \int_0^H Z_k(z) (g_1 - u^s(z, 0)) dz, \quad T_{k,t}(0) = \frac{2}{H} \int_0^H Z_k(z) (g_2 - u_{,t}^s(z, 0)) dz. \quad (25)$$

将方程(24)改写为如下矩阵:

$$\frac{d}{dt} X(t) = NX(t) + H(t), \quad (26)$$

$$\text{式中, } X(t) = \begin{Bmatrix} T_k \\ T_{k,t} \end{Bmatrix}, \quad H(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ M^{-1}G_k \end{Bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I \\ -\omega_k^2 M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}.$$

方程(26)解的形式为

$$X(t) = e^{Nt} X(0) + e^{Nt} \int_0^t e^{-N\tau} H(\tau) d\tau, \quad (27)$$

式中, $X(0) = \begin{Bmatrix} T_k(0) \\ T_{k,t}(0) \end{Bmatrix}$, 矩阵方程 e^{Nt} 可由 Hamilton-Cayley 定理获得^[15]。

继而可以根据式(22)获得 u^d , 根据式(12)获得位移 u 解答. 对式(22)进行求导, 再根据方程(9)可获得原问题的应力 σ 解答:

$$u(z) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cos(\omega_k z) + K^{-1} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ -f_2(t) \\ -f_3(t) \end{bmatrix} (z - H) + \begin{bmatrix} f_4(t) \\ f_5(t) \\ f_6(t) \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$\sigma = -K\omega_k \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin(\omega_k z) + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ -f_2(t) \\ -f_3(t) \end{bmatrix}.$$

(29)

4 结果验证与分析

4.1 结果验证

在进行非饱和土柱的瞬态响应分析时,需要考虑饱和度对渗透系数和动剪切模量的影响.

Lo 等^[16]给出了相对渗透系数 k_{rw} 和 k_m 的计算方法:

$$k_{rw} = \sqrt{S_e} (1 - (1 - (S_e)^{1/m})^m)^2, k_m = \sqrt{1 - S_e} (1 - (S_e)^{1/m})^{2m}.$$

(30)

饱和度对动剪切模量 μ 的影响,如下式所示^[6-7,17]:

$$\mu = \mu_s + 2\,050 \cdot \tan\phi' \int_0^{p_c} \frac{S_r - S_{w0}}{1 - S_{w0}} d(p_n - p_w),$$

(31)

式中 μ_s 为土体在饱和状态时的值.

无特别说明,本文均采用表 1 所示的参数进行计算^[6].

表 1 材料参数

Table 1 Values of parameters

phase	parameter	unit	value
air	K_n	kPa	145
	η_n	N·s/m ²	1.8×10 ⁻⁵
	ρ_n	kg/m ³	1.28
water	K_w	GPa	2.25
	η_w	N·s/m ²	0.001
	ρ_w	kg/m ³	1 000
solid	K_s	GPa	35
	ρ_s	kg/m ³	2 650
skeleton	K_b	MPa	8.33
	μ_s	MPa	3.85
	n	—	0.45
	S_r	—	0.2~1.0
	S_{w0}	—	0.05
	κ	m ²	5.3×10 ⁻¹⁰
	ϕ'	(°)	10
	a	Pa ⁻¹	1.0×10 ⁻⁴
	m	—	0.5
	d	—	2

基于 COMSOL Multiphysics 有限元软件中的 PDE 模块,对该问题进行数值求解.计算过程中,土层厚度 H 为 10 m,饱和度为 0.8,施加荷载为单位阶跃荷载 $f_1(t) = -1$ Pa,其余边界函数均为 0.图 2 给出了 $z = 2$ m 处孔隙水压力响应结果与有限元结果对比.可以看出,在本文计算参数条件下,在非饱和土中只能观察到一种压缩波 P_1 ,两种慢波 P_2 和 P_3 不能被观察到,这与 Li 和 Schanz^[18] 以及 Lo 等^[16] 的研究结果一致,这主要由于真实土体渗透系数较小,流固耦合作用强烈, P_2 波和 P_3 波衰减较快. P_1 压缩波约在 0.02 s 时传播到观察点,经底面反射后,约在 0.17 s 时底面反射波 P_{1b} 传播到观察点,并继续向上传播,在顶面边界反射后,顶面反射波 P_{1u} 约在 0.21 s 时再次传播到 $z = 2$ m 处.随着时间增加,有限元计算结果与本文解答结果具有较好的一致性.

鉴于当前并无适宜的试验结果可用于本文解答的直接验证, Biot 饱和波动理论在理论和工程应用上为广大学者接受,将本文饱和度设置为 0.999,即可将本文解答退化为饱和土的解答. Shan 等^[19] 给出了饱和多孔介质一维瞬态响应解,采用的计算参数如下:

$$\begin{cases} \lambda = 144.7 \text{ MPa}, \mu = 98 \text{ MPa}, k_w = 10^{-2} \text{ m}^4/(\text{N}\cdot\text{s}), K_s = 11 \text{ GPa}, \\ K_w = 3.3 \text{ GPa}, n = 0.48, \rho_s = 2\,700 \text{ kg/m}^3, \rho_w = 1\,000 \text{ kg/m}^3. \end{cases} \quad (32)$$

图3给出了本文解答与退化解的结果对比,可以看出,两者结果比较一致。

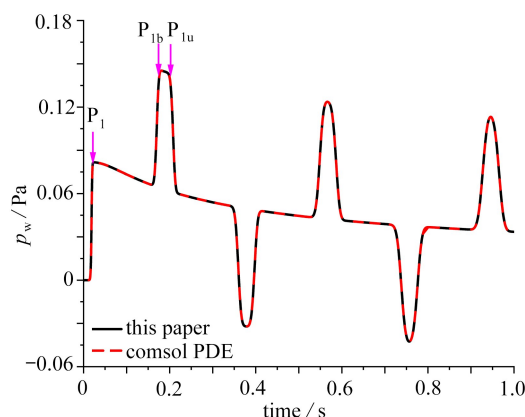


图2 与有限元方法对比

Fig. 2 Comparison with the finite element method

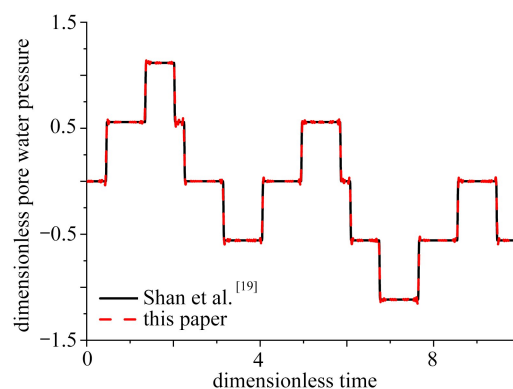


图3 与退化解对比

Fig. 3 Comparison with the saturated soil solution

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同。

4.2 渗透系数影响

Lu 和 Likos^[20]指出,对于常见土体,固有渗透系数 κ 范围在 $10^{-7} \sim 10^{-20}$ 之间浮动。图4给出了固有渗透系数 κ 在 $10^{-8} \sim 10^{-14}$ 之间变动时, $z = 2 \text{ m}$ 处孔隙水压力响应结果随时间变化。可以看出,随着固有渗透系数的增加,孔隙水压力瞬态响应峰值呈现减小趋势,这是因为较高的渗透系数更容易引起孔隙压力的快速消散。当固有渗透系数小于 10^{-12} 时,由于水和气两种流体间存在强烈的黏滞作用,此时非饱和土的波动与单相材料波动相似。

为了能够在结果中展示饱和度等因素对于这两种波的影响,可将渗透系数放大,如调整为 $k_w = S_w \times 10^2$, $k_n = S_n \times 10^2$ 。为避免底部反射对观察波动产生影响,可将层厚设置为较大值,如 $H = 100 \text{ m}$ 。图5中可以清晰地反映出不同饱和度下非饱和介质中压缩波的传播和衰减情况。当渗透系数均较大时,流-固耦合作用很小,3类压缩波的独立传播很明显。从图5可以看出,当 $z = 2 \text{ m}$,饱和度为0.6时,可以观察到 P_1 波、 P_2 波和 P_3 波分别约在0.02 s、0.16 s和0.41 s时传播到观察点 $z = 2 \text{ m}$ 处。

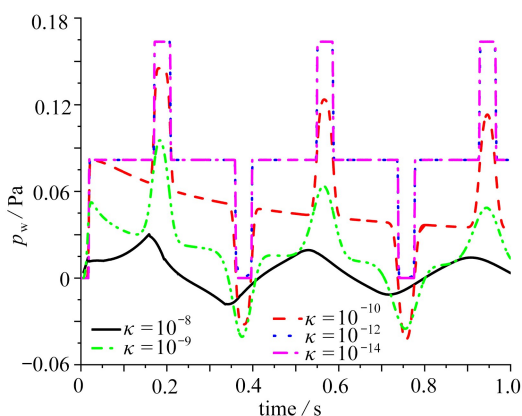


图4 不同渗透系数下孔压时程曲线图

Fig. 4 Time histories of water pore pressures with different permeabilities

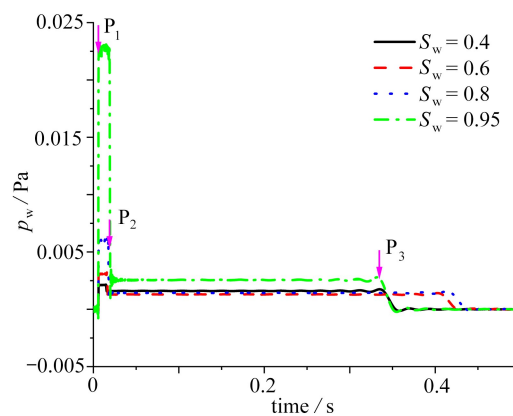


图5 放大渗透系数后孔压时程曲线图

Fig. 5 Time histories of water pore pressures after magnifying the permeability coefficients

4.3 饱和度影响

图6给出了不同饱和度下 $z = 2 \text{ m}$ 处孔隙水压力响应结果随时间变化图。可以看出,随着饱和度增加, P_1

波波速呈减小趋势,随着饱和度增加,孔隙水压力瞬态响应幅值呈增加趋势,尤其当饱和度较高时,孔隙水压力幅值增幅明显.这与 Zhao 等^[12-13]基于 Zienkiewicz 非饱和介质波动方程计算得到的结论不同.本文计算结果更符合实际非饱和土体的响应情况.作者认为前人不合理的结果主要由于以下两点:① 对比 Zienkiewicz 等^[10]和本文采用的非饱和多孔介质波动方程,可以发现,两者主要区别在于渗流连续方程上,本文采用的方程,超静水压 p_w 和气压 p_n 分别为固相位移 u 、液相和气相相对位移 (w, v) 的函数,即 $p_w = f(u, w, v)$, $p_n = f(u, w, v)$; 而 Zienkiewicz 等建立的方程中,超静水压 p_w 和气压 p_n 与气相相对位移无关,即 $p_w = f(u, w)$, $p_n = f(u, w)$, 忽略了流体间的相互作用.② 在计算过程中,文献[11-13]将液相和气相动力渗透系数直接表述为 $k_w = S_w \times 10^x$, $k_n = S_n \times 10^x$ (x 为整数),并不能真实反映渗透系数随饱和度的变化情况,而本文采用方程(30)可以较好地反映非饱和土中两种流体的相互影响.

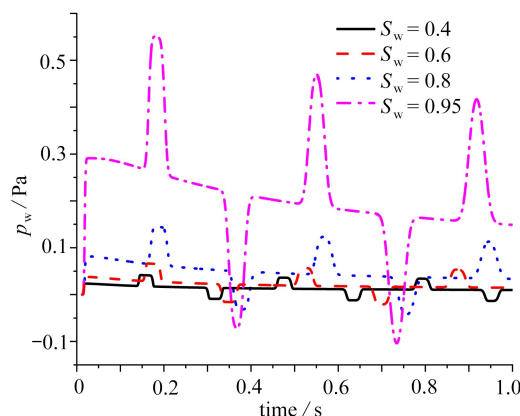


图 6 不同饱和度下孔压时程曲线图

Fig. 6 Time histories of water pore pressures with different saturations

5 结 论

本文基于 Biot-type 形式的非饱和土波动方程,采用分离变量法和状态空间法给出了一维非饱和土柱在动载作用下的瞬态响应问题解析解.有如下结论:

- 1) 在非饱和土中由于渗透系数较小,仅能观察到一种压缩波;
- 2) 随着固有渗透系数的增加,孔隙水压力瞬态响应峰值呈现减小趋势;
- 3) 随着饱和度增加, P_1 波波速呈减小趋势,孔隙水压力幅值呈增加趋势.

本文建立的一维非饱和土柱模型,其核心价值在于通过严格的数学解析方法,揭示饱和度与渗透系数等关键参数对波动和土体瞬态动力响应的内在影响机理和规律,其主要目的在于为理解复杂的非饱和土动力行为提供一个清晰的理论基准和参数分析工具,而非直接、精确地模拟所有现场工况.一维模型适用于波传播的维度远大于其他维度的情况,比如分析域表面作用均布动载,长径比较大的试验土柱、波垂直入射等问题.此外,对于土体需满足控制方程成立的基本假设,如小变形假设,土中水汽处于连通状态等.尽管一维模型是对现实的三维世界的简化,但其在理论和应用上具有充分的合理性:① 采用的控制方程基于 Biot 理论框架,引入土水特征曲线,可以较好地反映非饱和土中的流固相互作用,可以精准地退化至饱和 Biot 波动方程.② 在应用上,基于解析解避免了数值解可能存在的离散误差和收敛性问题,能够清晰深入地揭示波动的本质和进行参数分析,同时可为复杂的数值模型提供验证基准.

需要指出的是,本研究建立的一维解析模型主要揭示了非饱和土动力响应的内在机理,其结论在均匀、小应变及近似一维波传播条件下最为适用.对于复杂的边界条件、强烈的材料非线性或三维波场效应,需发展更高级的数值模型进行深入研究,而本文的解析解可为这类数值模型提供重要的验证基准.

参考文献 (References):

- [1] Wei C, Muraleetharan K K. A continuum theory of porous media saturated by multiple immiscible fluids, I :

- linear poroelasticity[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2002, **40**(16): 1807-1833.
- [2] Hanyga A. Two-fluid porous flow in a single temperature approximation[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2004, **42**(13/14): 1521-1545.
- [3] Lu J F, Hanyga A, Jeng D S. A mixture-theory-based dynamic model for a porous medium saturated by two immiscible fluids[J]. *Journal of Applied Geophysics*, 2007, **62**(2): 89-106.
- [4] Steeb H, Kurzeja P S, Schmalholz S M. Wave propagation in unsaturated porous media[J]. *Acta Mechanica*, 2014, **225**(8): 2435-2448.
- [5] 何子舟, 周凤玺. 定荷载和双面排水条件下非饱和土一维固结的解析解[J]. *应用数学和力学*, 2019, **40**(9): 1035-1047. (He Zizhou, Zhou Fengxi. Analytical solution for 1D consolidation of unsaturated soil under constant load and double-side drainage[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(9): 1035-1047. (in Chinese))
- [6] Lu Z, Fang R, Yao H, et al. Dynamic responses of unsaturated half-space soil to a moving harmonic rectangular load[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2018, **42**(9): 1057-1077.
- [7] Zhang M, Zhao C, Xu C. Lateral dynamic response of pile group embedded in unsaturated soil[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2021, **142**: 106559.
- [8] Ma R, Shan Z, Jing L. Transient response of an unsaturated single-layer seabed subjected to a vertical compressional wave[J]. *International Journal of Geomechanics*, 2024, **24**(7): 04024133.
- [9] 马强, 杨奕琪, 周凤玺, 等. 热效应作用下P波入射非饱和土自由场地地震响应研究[J]. *岩土工程学报*, 2025, **47**(3): 569-579. (Ma Qiang, Yang Yiqi, Zhou Fengxi, et al. Seismic response of free-field earthquakes in unsaturated soils with P-wave incidence under thermal effects[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2025, **47**(3): 569-579. (in Chinese))
- [10] Zienkiewicz O C, Chan A H C, Pastor M, et al. *Computational Geomechanics: With Special Reference to Earthquake Engineering*[M]. Chichester: John Wiley & Sons, 1999: 76-78.
- [11] Shan Z, Ling D, Ding H. Exact solutions for the one-dimensional transient response of unsaturated single-layer porous media[J]. *Computers and Geotechnics*, 2013, **48**: 127-133.
- [12] Zhao Y, Chen X, Chen Z, et al. Asemianalytical solution for the transient response of one-dimensional unsaturated single-layer porous media with general boundary conditions[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2024, **150**(6): 04024024.
- [13] Zhao Y, Liu D, Ling D, et al. Semi-analytical solution for the wave motion of unsaturated viscoelastic porous media based on fractional Poynting-Thomson model[J]. *Journal of Earthquake Engineering*, 2025, **29**(7): 1377-1391.
- [14] Ai Z Y, Ye Z. Extended precise integration solution to layered transversely isotropic unsaturated poroelastic media under harmonically dynamic loads[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2021, **122**: 21-34.
- [15] Bellman R E. *Introduction to Matrix Analysis*[M]. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1970.
- [16] Lo W C, Sposito G, Majer E. Wave propagation through elastic porous media containing two immiscible fluids[J]. *Water Resources Research*, 2005, **41**(2): 2004WR003162.
- [17] van Genuchten M T. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils[J]. *Soil Science Society of America Journal*, 1980, **44**(5): 892-898.
- [18] Li P, Schanz M. Wave propagation in a 1-D partially saturated poroelastic column[J]. *Geophysical Journal International*, 2011, **184**(3): 1341-1353.
- [19] Shan Z, Ling D, Ding H. Exact solutions for one-dimensional transient response of fluid-saturated porous media[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2011, **35**(4): 461-479.
- [20] Lu N, Likos W J. *Unsaturated Soil Mechanics*[M]. Hoboken, New Jersey: John Wiley and Sons, 2004.