

弹跳椭球的动力学建模与周期轨道稳定性分析^{*}

万 宽¹, 张晓明¹, 王永萍¹, 乐 源¹, 李登辉²

(1. 西南交通大学 力学与航空航天学院, 成都 610031;
2. 苏州工学院 数学与统计学院, 江苏 常熟 215500)

摘要: 弹跳球模型早在 20 世纪 40 年代便有学者进行研究,其描述一个质点在重力的作用下,与一个周期振动的板发生碰撞并往复运动的动力学过程.混沌理论与非光滑动力学发展至今,该模型是诸多理论应用的试验田.本文考虑弹跳椭球模型,推导了椭球在完全弹性碰撞条件下的运动方程,得到了系统的守恒量和平凡周期轨道的稳定性条件,并在数值上验证了主要结果.

关 键 词: 弹跳椭球; 碰撞; 周期轨道; 稳定性

中图分类号: O322 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.460166

Dynamical Modeling and Stability Analysis of Periodic Orbits for Bouncing Ellipsoids

Wan Kuan¹, Zhang Xiaoming¹, Wang Yongping¹, Le Yuan¹, Li Denghui²

(1. School of Mechanics and Aerospace Engineering, Southwest Jiaotong University,
Chengdu 610031, P.R. China;
2. School of Mathematics and Statistics, Suzhou University of Technology,
Changshu, Jiangsu 215500, P.R. China)

Abstract: The bouncing ball model has garnered significant attention since the 1940s, with scholars extensively investigating the dynamics of a point mass undergoing collisions with a periodically oscillating surface under gravitational influence. As the chaos theory and nonsmooth dynamics evolved, this model emerged as a quintessential testbed for the application of these theoretical frameworks. Herein, the inquiry was extended to the bouncing ellipsoid model. The equations of motion were meticulously derived for an ellipsoid experiencing perfectly elastic collisions. The analysis yields the conserved quantities of the system and elucidates the stability conditions of its trivial periodic orbits. Furthermore, the numerical simulations corroborate the theoretical findings, thereby substantiating the robustness of the proposed method.

Key words: bouncing ellipsoid; collision; periodic orbit; stability

0 引 言

碰撞广泛存在于科学研究与工程实践中,是混沌和非典型分岔现象的重要来源之一.国内外学者针对工

* 收稿日期: 2025-09-19; 修订日期: 2025-12-01

基金项目: 国家自然科学基金(12202168;12302015;12362002)

作者简介: 万宽(1999—),男,硕士生(E-mail: wankuan2023@163.com);

乐源(1974—),男,教授,博士,博士生导师(通信作者, E-mail: leyuan2003@sina.com).

引用格式: 万宽,张晓明,王永萍,乐源,李登辉.弹跳椭球的动力学建模与周期轨道稳定性分析[J].应用数学和力学,2026,47(8): 1060-1067.

程实践中的碰撞问题,进行了广泛深入的研究.史美娇等^[1]研究了具有双侧弹性约束的单自由度悬臂梁系统的非光滑动力学,验证了该系统双擦边周期运动的存在性,推导了双擦边周期运动附近带参数的高阶分段映射;结合光滑流映射,获得了新的复合范式映射;通过数值仿真对低阶映射和高阶映射反应的擦边分岔进行了比较,验证了高阶范式映射的有效性,并揭示了双边弹性碰撞悬臂梁的擦边动力学.杜伟霞等^[2]研究了对称碰撞系统的间歇混沌控制方法,将 Hopf 分岔控制思想用于该对称碰撞系统,对该类系统的混沌控制提供一个新的控制方法.马成等^[3]研究了一类单自由度碰撞振动系统,该模型包含非线性项以及单侧新型非线性约束;通过 Poincaré 映射方法及胞映射法,分析了该系统各周期运动的迁移规律,吸引子共存现象以及间隙对周期共存区域的影响.文献[4]中简述了一个动力学台球模型,动力学台球模型用于研究混沌运动及其起始.物理学家和数学家通过研究不同形状的动力学台球来了解混沌运动.

弹跳球作为经典碰撞力学模型,早在 1949 年就由 Fermi^[5]提出,并用来解释宇宙射线粒子如何获得高能量.该系统虽建模简单,却表现出复杂的动力学行为;混沌理论与非光滑动力学发展至今,国外众多学者对其进行了深入研究.Wood 和 Byrne^[6]分析了弹跳球简单随机的重复撞击过程,在撞击时,对积分方程迭代求解,得到了撞击后球速度的概率密度函数,并使用该函数来预测撞击的冲量大小和撞击时间间隔.Holmes^[7]导出了二维映射,它近似地描述了一个小球在巨大的正弦振动板上垂直弹跳的运动.在完全弹性碰撞的情况下,该方程可简化为“标准映射”,这一映射已被物理学家广泛用于研究势阱中受约束的粒子运动.结果表明,对于足够大的激励速度和接近于 1 的恢复系数,系统除了表现出预期的谐波和次谐波运动外,还表现出大量的不规则非周期解.

国内也有许多学者对弹跳球模型进行了研究.谢建华^[8]通过坐标变换使得弹跳球的 Poincaré 映射在新的坐标系中具有某种对称性,利用此对称性简化了存在紧致双曲不变集的条件,描述了由此对称性在符号空间移位映射中引起的若干性质,并对“弹跳球”映射存在双曲马蹄参数值的下限进行了更精确的计算.Zhang 等^[9]讨论了一个平面的弹跳凸体与固定壁碰撞,在限制参数条件下该模型等效于一个圆柱内的台球问题,得到的数值结果表明该模型具有复杂的动力学行为.

启发于文献[9]的研究,本文将文献[9]中的二维凸体拓展到三维情况:考虑一个均质旋转椭球与地面之间碰撞的动力学.首先理论推导了椭球最低点在不同姿态下的精确表达式,得到了椭球碰撞的解析条件;其次利用基本假设,得到了广义速度在碰撞前后的变化关系;最后在系统的平凡周期轨道附近推导了 Poincaré 映射,得到了其稳定性条件,并数值验证了结果.本文方法与结果对于深入理解刚体碰撞动力学具有一定工程与理论意义.

1 建模说明

弹跳椭球模型如图 1 所示.引入三个坐标系,即惯性参考系(静止): $o-xyz$,平动系: $O-\hat{x}\hat{y}\hat{z}$,转动系: $O-XYZ$.假设椭球和 $O-XYZ$ 坐标系固结, O 为其质心.采用 Euler 角 ϕ (进动角)、 θ (章动角)、 ψ (自旋角)^[10]描述椭球的姿态.椭球面方程在转动系 $O-XYZ$ 中的表达式为 $X^2/a^2 + Y^2/a^2 + Z^2/c^2 = 1$, 其中 $a > 0, c > 0$. 椭球质量为 m , 对质心的三个主转动惯量分别为 J_1, J_2, J_3 , 且 $J_1 = J_2$.

假设椭球与水平面 $z = 0$ 发生碰撞.为了得到椭球与地面发生碰撞时的解析条件,下面计算椭球在不同姿态角下的最低点坐标.设椭球在 (ϕ, θ, ψ) 姿态角下,其最低点在平动系 $O-\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ 下的坐标为 $G(\phi, \theta, \psi) = (G_1(\phi, \theta, \psi), G_2(\phi, \theta, \psi), G_3(\phi, \theta, \psi))^T$. 假设质心在惯性参考系 $o-xyz$ 中坐标为 $(x, y, z)^T$, 则碰撞条件为

$$z + G_3(\phi, \theta, \psi) = 0. \quad (1)$$

平动系 $O-\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ 下的向量 $N_0 = (0, 0, 1)^T$ 在转动系 $O-XYZ$ 下的表达式为

$$N_3 = A_{30} \cdot (0, 0, 1)^T = (\sin \theta \sin \psi, \cos \psi \sin \theta, \cos \theta)^T, \quad (2)$$

其中

$$A_{30} = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \\ -\cos \theta \cos \psi \sin \phi - \cos \phi \sin \psi & \cos \theta \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\cos \phi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3)$$

为 Euler 旋转矩阵.

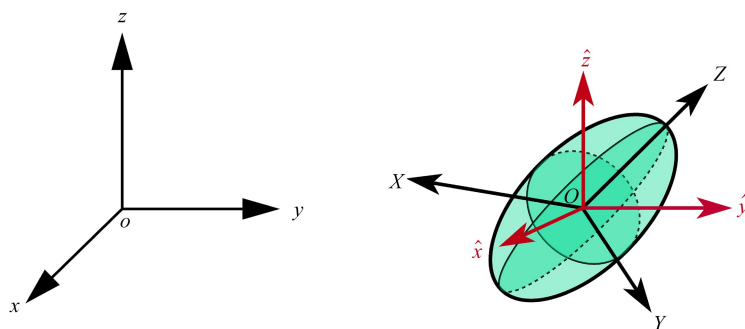


图1 椭球体三维建模示意图

Fig. 1 The 3D ellipsoid modeling schematic

设最低点在 $O-XYZ$ 中坐标为 $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)^T$. 由几何关系, 碰撞点处椭球面的法向量在转动系 $O-XYZ$ 中表达式为 $(2\Gamma_1/a^2, 2\Gamma_2/a^2, 2\Gamma_3/c^2)^T$ 且其方向与 N_3 平行反向, 联立如下方程:

$$\begin{cases} \frac{\Gamma_1^2}{a^2} + \frac{\Gamma_2^2}{a^2} + \frac{\Gamma_3^2}{c^2} = 1, \\ \frac{2\Gamma_1}{a^2 N_{3X}} = \frac{2\Gamma_2}{a^2 N_{3Y}} = \frac{2\Gamma_3}{c^2 N_{3Z}}, \end{cases} \quad (4)$$

解得碰撞点在转动系下的坐标

$$\mathbf{\Gamma} = - \left(\frac{a^2 \sin \theta \sin \psi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}}, \frac{a^2 \sin \theta \cos \psi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}}, \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right)^T, \quad (5)$$

并利用 Euler 旋转矩阵 $\mathbf{A}_{30}$, 可得碰撞点在平动系下的坐标

$$\mathbf{G} = \mathbf{A}_{30}^T \cdot \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \frac{(a^2 - c^2) \sin(2\theta) \sin \phi}{\sqrt{2} \sqrt{a^2 + c^2} + (-a^2 + c^2) \cos(2\theta)} \\ - \frac{(a^2 - c^2) \sin(2\theta) \cos \phi}{\sqrt{2} \sqrt{a^2 + c^2} + (-a^2 + c^2) \cos(2\theta)} \\ - \frac{\sqrt{a^2 + c^2} + (-a^2 + c^2) \cos(2\theta)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

由式(5)和(6)可知: 椭球最低点在平动系和转动系下的 $\hat{z}$ 和 Z 轴分量仅与章动角 θ 相关.

2 碰撞规则推导

椭球的运动分为自由运动和碰撞两个阶段, 假设椭球仅受重力作用. 本文假设椭球与地面均是绝对光滑的, 故碰撞时冲量竖直向上. 质心在惯性系 $o-xyz$ 中的坐标为 $(x, y, z)^T$. 根据质心运动定理, 在自由运动阶段 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 保持为常量. 由于碰撞时冲量竖直向上, 由冲量形式的质心运动定理, 碰撞后 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 仍不变. 故本文假定 $x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0$. 角速度在平动系 $O-\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ 中符号记为 $\boldsymbol{\omega}$, 在转动系 $O-XYZ$ 中记为 $\boldsymbol{\Omega}$. 质心速度的 z 分量记为 v_{oz} . 假设碰撞为完全弹性, 下面应用 Newton 碰撞定律 (碰撞前后碰撞点处的相对法向速度反向) 和碰撞过程动量矩定理 (碰撞前后质点系相对于质心的动量矩变化等于碰撞冲量对质心之矩的矢量和), 推导碰撞前后速度之间的相对关系.

设碰撞发生在 t 时刻. 如下记号表示碰撞前 t^- 和碰撞后 t^+ 的状态量:

$$\begin{cases} \omega(t^-) = \omega_1, \omega(t^+) = \omega_2; \Omega(t^-) = \Omega_1, \Omega(t^+) = \Omega_2; \\ v_{oz}(t^-) = v_{oz1}, v_{oz}(t^+) = v_{oz2}; \\ \dot{\phi}(t^-) = \dot{\phi}_1, \dot{\phi}(t^+) = \dot{\phi}_2; \dot{\theta}(t^-) = \dot{\theta}_1, \dot{\theta}(t^+) = \dot{\theta}_2; \dot{\psi}(t^-) = \dot{\psi}_1, \dot{\psi}(t^+) = \dot{\psi}_2. \end{cases} \quad (7)$$

由冲量定理, 得到

$$\boldsymbol{I} = m\boldsymbol{v}_{oz2} - m\boldsymbol{v}_{oz1}. \quad (8)$$

对质心应用冲量形式的动量矩定理,得到

$$\boldsymbol{A}_{30} \cdot (\boldsymbol{r}_G \times \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{J} \cdot (\boldsymbol{\Omega}_2 - \boldsymbol{\Omega}_1), \quad (9)$$

其中 $\boldsymbol{r}_G = (G_1, G_2, G_3)^T$ 为碰撞点在平动系中相对质心的位置矢量, $\boldsymbol{I} = (0, 0, I)^T$ 为平动系中碰撞冲量, $\boldsymbol{J}$ 为转动系中惯性张量的矩阵形式,其矩阵形式为

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

根据 Newton 碰撞定律,碰撞点处法向相对速度反向,即 $[v_G]_z^{\text{after}} = -[v_G]_z^{\text{before}}$, 其中 $[\cdot]_z$ 为向量的 z 轴分量.故有如下方程:

$$\begin{aligned} v_{oz2} + ((\omega_{\hat{z}2}, \omega_{\hat{y}2}, \omega_{\hat{x}2})^T \times (G_1, G_2, G_3)^T) \cdot (0, 0, 1)^T = \\ - (v_{oz1} + ((\omega_{\hat{z}1}, \omega_{\hat{y}1}, \omega_{\hat{x}1})^T \times (G_1, G_2, G_3)^T) \cdot (0, 0, 1)^T). \end{aligned} \quad (11)$$

联立式(8)—(11)可得碰撞前后物理量变化关系:

$$\boldsymbol{I} = - \frac{2J_1(mv_{oz1} + \dot{\theta}mG'_3(\theta))}{J_1 + mG_3'^2(\theta)}, \quad (12)$$

$$v_{oz2} = - \frac{J_1v_{oz1} + 2\dot{\theta}J_1G'_3(\theta) - mv_{oz1}G_3'^2(\theta)}{J_1 + mG_3'^2(\theta)}, \quad (13)$$

$$\dot{\phi}_2 = \dot{\phi}_1, \quad (14)$$

$$\dot{\psi}_2 = \dot{\psi}_1, \quad (15)$$

$$\dot{\theta}_2 = - \frac{-\dot{\theta}_1J_1 + 2mv_{oz1}G'_3(\theta) + \dot{\theta}_1mG_3'^2(\theta)}{J_1 + mG_3'^2(\theta)}. \quad (16)$$

由式(12)—(16)可知:

① 进动角速度 $\dot{\phi}$ 和自旋角速度 $\dot{\psi}$ 在碰撞前后保持不变;

② 在碰撞前后,章动角速度 $\dot{\theta}$ 的变化仅与质心速度 v_{oz} 和章动角 θ 相关,与进动角 ϕ 、进动角速度 $\dot{\phi}$ 、自旋角 ψ 、自旋角速度 $\dot{\psi}$ 无关.

3 小角度近似下的 Poincaré 映射与数值模拟

3.1 椭球运动微分方程与 Poincaré 映射

当 $\theta = 0, \dot{\theta} = 0, z > c$, 由式(12)—(16)知,椭球在与地面发生碰撞后, θ 仍保持为 0, 而质心速度反向,其运动重复.此即系统的平凡周期轨道.本小节讨论这类周期轨道稳定性.

椭球作自由运动的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}J_1(\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}J_3(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})^2 - mgz. \quad (17)$$

椭球作自由运动的能量函数为

$$E = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}J_1(\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}J_3(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})^2 + mgz. \quad (18)$$

椭球 Lagrange 函数不显含循环坐标 ϕ 和 ψ , 对应两个循环积分:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}(J_1\sin^2\theta + J_3\cos^2\theta) + \dot{\psi}J_3\cos\theta = M_3, \quad (19)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \dot{\phi}J_3\cos\theta + \dot{\psi}J_3 = M_Z. \quad (20)$$

由于碰撞时 $\dot{\psi}$ 和 $\dot{\phi}$ 不变, 因此动量矩在 $O\hat{z}$ 和 OZ 轴的投影 M_3 和 M_Z 守恒. 将式(19)和(20)代入能量函数(18)得到系统关于 θ 的等效动能和等效势能, 进而得到等效系统的 Lagrange 函数和能量函数:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \frac{(M_3 - M_z \cos \theta)^2}{J_1 \sin^2 \theta} - mgz, \quad (21)$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{(M_3 - M_z \cos \theta)^2}{J_1 \sin^2 \theta} + mgz. \quad (22)$$

下面考虑平凡周期轨道稳定性.平凡周期轨道的初值满足 $\theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = 0$.将 $\theta(0) = 0$ 代入式(19)和(20)有 $M_3 = M_z$.由于 M_3 和 M_z 全局守恒,故 $M_3 = M_z$ 全局成立.由等效系统 Lagrange 函数得到运动微分方程

$$\ddot{\theta} = -\frac{M_3^2(1 - \cos \theta)^2}{J_1^2 \sin^3 \theta}. \quad (23)$$

引入初值条件 $t = 0, \theta = \theta_0, \dot{\theta} = \vartheta_0$, 其中 $|\theta_0| \rightarrow 0, |\vartheta_0| \rightarrow 0$.将方程(23)在 $\theta = 0$ 处 Taylor 展开得

$$\ddot{\theta} = -\frac{M_3^2 \theta}{4J_1^2} - \frac{M_3^2 \theta^3}{12J_1^2} - \frac{17M_3^2 \theta^5}{960J_1^2} + O(\theta^6). \quad (24)$$

利用微分方程解对初值的连续依赖性^[11],将解 $\theta(t)$ 表示为初值 θ_0 和 ϑ_0 的幂级数,得

$$\begin{aligned} \theta = & f_1(t)\theta_0 + f_2(t)\vartheta_0 + f_3(t)\theta_0^2 + f_4(t)\vartheta_0^2 + f_5(t)\theta_0\vartheta_0 + \\ & f_6(t)\theta_0^3 + f_7(t)\vartheta_0^3 + f_8(t)\theta_0^2\vartheta_0 + f_9(t)\theta_0\vartheta_0^2 + \dots \end{aligned} \quad (25)$$

将式(25)代入式(24),通过比较同次幂的系数并结合初值条件 $\theta = \theta_0$ 和 $\dot{\theta} = \vartheta_0$, 可得

$$f_1(0) = 1, f_2(0) - f_9(0) = 0; f_2'(0) = 1, f_1'(0) = 0, f_3'(0) - f_9'(0) = 0. \quad (26)$$

由此得到章动角和章动角速度一阶近似解为

$$\theta(t) = \frac{2J_1 \sin(M_3 t / (2J_1))}{M_3} \vartheta_0 + \cos\left(\frac{M_3 t}{2J_1}\right) \theta_0 + O(\|\vartheta_0, \theta_0\|^2), \quad (27)$$

$$\vartheta(t) = -\frac{M_3 \sin(M_3 t / (2J_1))}{2J_1} \theta_0 + \cos\left(\frac{M_3 t}{2J_1}\right) \vartheta_0 + O(\|\vartheta_0, \theta_0\|^2). \quad (28)$$

在总能量 E 固定的情况下,由初值 θ_0 和 ϑ_0 反解出刚体质心初速度:

$$v_{oz0} = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{M_3^2(1 - \cos \theta_0)^2}{J_1 m \sin^2 \theta_0} - \frac{J_1 \vartheta_0^2}{m} - \frac{2g\sqrt{a^2 + c^2} + (-a^2 + c^2)\cos(2\theta_0)}{\sqrt{2}}}. \quad (29)$$

自由飞行时间 T 在周期轨道附近 Taylor 展开

$$T = \frac{2}{g} \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{J_1 \vartheta_0^2}{m} - 2gc + k_1 \theta_0 + k_2 \vartheta_0 + k_3 \theta_0^2 + k_4 \vartheta_0^2 + k_5 \vartheta_0 \theta_0} + O(\|\vartheta_0, \theta_0\|^3). \quad (30)$$

质心运动学方程为

$$z = -G_3(\theta_0) + v_{oz0}t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (31)$$

将时间级数(30)代入式(27)和(31)得到 T 时刻的章动角和质心高度,将得到的章动角和质心高度代入碰撞条件(1)得到时间级数(30)的系数如下:

$$\begin{aligned} k_1 = k_2 = & 0, \\ k_3 = & \left[-3a^2 mg J_1 + 3c^2 mg J_1 - cM_3^2 - a^2 mg J_1 \cos\left(\frac{2M_3 \sqrt{-2cg + 2E/m}}{gJ_1}\right) + \right. \\ & \left. c^2 mg J_1 \cos\left(\frac{2M_3 \sqrt{-2cg + 2E/m}}{gJ_1}\right) \right] / (4\sqrt{2} mgc J_1 \sqrt{-cg + E/m}), \\ k_4 = & \left\{ (a^2 - c^2) J_1^2 \left[-1 + \cos\left(\frac{2M_3 \sqrt{-2cg + 2E/m}}{gJ_1}\right) \right] \right\} / (cM_3^2 \sqrt{-2cg + 2E/m}), \\ k_5 = & \left[(-a^2 + c^2) J_1 \sin\left(\frac{2M_3 \sqrt{-2cg + 2E/m}}{gJ_1}\right) \right] / (cM_3 \sqrt{-2cg + 2E/m}). \end{aligned}$$

将式(30)和 k_1-k_5 表达式代入式(27),(28)和(31),得到椭球碰撞前时刻的 $v_{oz1}, \theta_1, \vartheta_1$.将得到的 $v_{oz1}, \theta_1, \vartheta_1$ 代入碰撞规则(13)和(16)得到碰撞后的 θ_2 和 ϑ_2 .由此得到小角度近似下的 Poincaré 映射:

$$\begin{pmatrix} \theta_2 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \vartheta_0 \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{cases} A_{11} = \cos\left(\frac{M_3}{gJ_1} \sqrt{\frac{2E - 2mgc}{m}}\right), \\ A_{12} = \frac{2J_1}{M_3} \sin\left(\frac{M_3}{gJ_1} \sqrt{\frac{2E - 2mgc}{m}}\right), \\ A_{21} = \frac{2(-a^2 + c^2)m}{cJ_1} \sqrt{\frac{2E - 2mgc}{m}} \cos\left(\frac{M_3}{gJ_1} \sqrt{\frac{2E - 2mgc}{m}}\right) - \frac{M_3}{2J_1} \sin\left(\frac{M_3}{gJ_1} \sqrt{\frac{2E - 2mgc}{m}}\right), \\ A_{22} = \frac{4(-a^2 + c^2)m}{cM_3} \sqrt{\frac{2E - 2mgc}{m}} \sin\left(\frac{M_3}{gJ_1} \sqrt{\frac{2E - 2mgc}{m}}\right) + \cos\left(\frac{M_3}{gJ_1} \sqrt{\frac{2E - 2mgc}{m}}\right). \end{cases} \quad (32)$$

计算得到映射行列式

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = 1.$$

根据文献[12],上述 Poincaré 映射是保辛(保面积)映射.该映射 Jacobi 矩阵 $\mathbf{A}$ 的迹 $\text{tr}(\mathbf{A})$ 可判断周期轨道的稳定性^[13].若 $|\text{tr}(\mathbf{A})| < 2$,两个特征值都在复平面的单位圆内,周期轨道线性稳定.若 $|\text{tr}(\mathbf{A})| > 2$,则一个特征值在单位圆外,因此周期轨道不稳定.

3.2 数值模拟

本小节结合数值仿真讨论系统能量对平凡周期轨道稳定性的影响.取如下参数: $m = 10, a = b = 5, c = 1, J_1 = 52, J_3 = 100, g = 10$.

情形一 $E = 106$, 取初始条件为

$$\dot{\theta}_0 = 0.01, \theta_0 \in (0.001, 0.01), M_3 = 0.1.$$

Poincaré 映射迹的绝对值 $|\text{tr}(\mathbf{A})|$ 为

$$|A_{11} + A_{22}| = \left| 2\cos\frac{\sqrt{30}}{26\,000} - 1\,920\sqrt{30}\sin\frac{\sqrt{30}}{26\,000} \right| \approx 0.215\,385 < 2,$$

因此,两特征值都在单位圆内,周期轨道稳定.

图 2 为 $E = 106$ 时的轨道图,图 3 为相应的 Poincaré 映射图.可见每次碰撞时章动角均保持在 0 附近,相点环绕原点,表明该周期轨道稳定.

情形二 $E = 130$, 取初始条件为

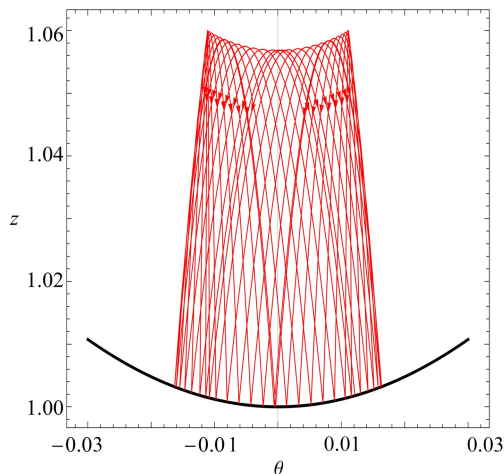
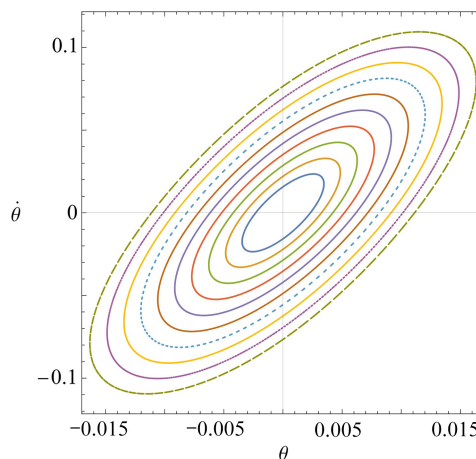
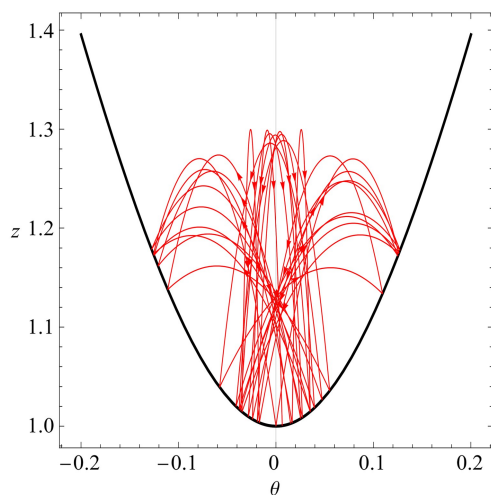
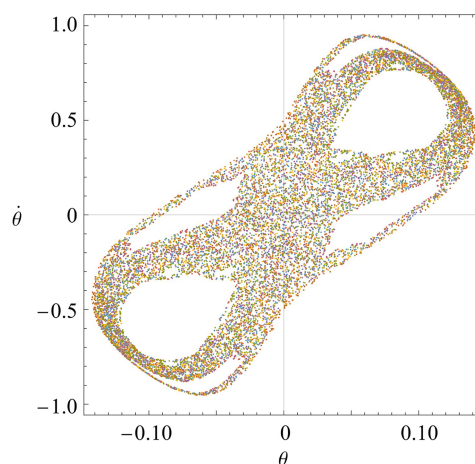
$$\dot{\theta}_0 = 0.01, \theta_0 \in (0.001, 0.01), M_3 = 0.1.$$

Poincaré 映射迹的绝对值 $|\text{tr}(\mathbf{A})|$ 为

$$|A_{11} + A_{22}| = \left| 2\cos\frac{\sqrt{6}}{5\,200} - 9\,600\sqrt{6}\sin\frac{\sqrt{6}}{5\,200} \right| \approx 9.076\,92 > 2,$$

故 Poincaré 映射有一个特征值在单位圆外,因此该周期轨道不稳定.

图 4 为 $E = 130$ 时的轨道图,图 5 为对应的 Poincaré 相图.可见章动角在碰撞时变化极不规则,不再保持在 0 附近,相点迅速远离原点,表明该周期轨道不稳定.

图2 $E = 106$ 时的轨道图Fig. 2 The orbital diagram for $E = 106$ 图3 $E = 106$ 时的 Poincaré 映射相图Fig. 3 The Poincaré map phase diagram for $E = 106$ 图4 $E = 130$ 时的轨道图Fig. 4 The orbital diagram for $E = 130$ 图5 $E = 130$ 时的 Poincaré 映射相图Fig. 5 The Poincaré map phase diagram for $E = 130$

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同。

4 关于 E 对椭圆轨道稳定性影响的推论

令

$$H_1 = \frac{M_3}{gJ_1}, H_2 = \frac{4(-a^2 + c^2)m}{cM_3}, H_3 = \sqrt{\frac{2E}{m} - 2g},$$

利用和差化积,映射 A 的迹可表示为

$$\text{tr}(A) = \sqrt{4 + H_2^2 H_3^2} \sin\left(H_1 H_3 + \arctan\left(\frac{2}{H_1 H_3}\right)\right).$$

假设 M_3 较小(量级 0~1),且 $a > c$ ($H_2 < 0$). H_3 随 E 的增加而增加, $2/|H_2 H_3|$ 随 E 的增加而减少, E 充分大时 $\arctan(2/(H_2 H_3))$ 趋于 0. 若需 $|\text{tr}(A)| > 2$ 则需要满足振幅 $\sqrt{4 + H_2^2 H_3^2} > 2$ (该条件恒成立)且正弦函数取值的绝对值较大,即相位角远离 $k\pi$. 当 H_3 增大到使总相位角 $(H_1 H_3 + \arctan(2/(H_2 H_3)))$ 接近 $\pi/2 + k\pi$ 时, $|\text{tr}(A)| > 2$, 此时周期轨道不稳定. 因此在初始扰动量 θ_0 和 ϑ_0 较小的情况下,轨道的稳定性取决于能量大小,能量较大时周期轨道易失稳.

5 结 论

本文讨论了碰撞弹跳椭球的动力学,揭示了能量对轨道稳定性的影响,主要的结论如下:

- 1) 对于两短半轴相等的椭球,在不同姿态角下,最低点坐标在平动系下的 $\hat{z}$ 轴和转动系下的 Z 轴分量仅与章动角 θ 相关。
- 2) 碰撞前后,章动角速度 $\dot{\theta}$ 和质心速度 v_{oz} 的变化仅与质心速度 v_{oz} 以及章动角 θ 相关,与进动角 ϕ 、进动角速度 $\dot{\phi}$ 、自旋角 ψ 、自旋角速度 $\dot{\psi}$ 无关;进动角速度 $\dot{\phi}$ 、自旋角速度 $\dot{\psi}$ 在碰撞前后不发生变化。
- 3) 动量矩在整个运动过程中在 $O\hat{z}$ 和 OZ 轴上的投影均为守恒量。
- 4) 在平凡周期轨道 $\theta = \theta_0$ 和 $\dot{\theta} = \vartheta_0$ 附近,当初始扰动的章动角和章动角速度较小时,轨道的稳定性取决于系统能量 E ; 能量逐渐增大,周期轨道从稳定过渡到不稳定。
- 5) 在周期轨道的稳定性方面,文献[9]得到当能量足够大时周期轨道不稳定的结论,这与本文的三维情况一致。

参考文献(References):

- [1] 史美娇, 徐慧东, 张建文. 双侧弹性约束悬臂梁的非光滑擦边动力学[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(6): 619-630. (Shi Meijiao, Xu Huidong, Zhang Jianwen. Non-smooth grazing dynamics for cantilever beams with bilateral elastic constraints[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(6): 619-630. (in Chinese))
- [2] 杜伟霞, 张思进, 殷珊. 一类对称碰撞系统的间歇混沌控制方法[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(10): 1149-1158. (Du Weixia, Zhang Sijin, Yin Shan. An intermittent chaos control method for a class of symmetric impact systems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(10): 1149-1158. (in Chinese))
- [3] 马成, 朱喜锋, 郑冬, 等. 一类非线性约束下单自由度碰撞系统的动力学特性[J]. 机械强度, 2025, **47**(3): 82-89. (Ma Cheng, Zhu Xifeng, Zheng Dong, et al. Dynamic characteristics of a class of single-degree-of-freedom collision system under nonlinear constraint[J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2025, **47**(3): 82-89. (in Chinese))
- [4] Douglas A S. Nonlinear dynamics: chaotic billiard lasers[J]. *Nature*, 2010, **465**(7299): 696-697.
- [5] Fermi E. On the origin of the cosmic radiation[J]. *Physical Review*, 1949, **75**(8): 1169-1174.
- [6] Wood L A, Byrne K P. Analysis of a random repeated impact process[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1981, **78**(3): 329-345.
- [7] Holmes P J. The dynamics of repeated impacts with a sinusoidally vibrating table[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1982, **84**(2): 173-189.
- [8] 谢建华. 关于 Bouncing Ball 模型中对称性及马蹄的研究[J]. 科学通报, 1998, **43**(19): 2058-2061. (Xie Jianhua. Research on symmetry and horseshoe in the Bouncing Ball model[J]. *Chinese Science Bulletin*, 1998, **43**(19): 2058-2061. (in Chinese))
- [9] Zhang X, Li D, Grebogi C, et al. Dynamics of bouncing convex body[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2024, **183**: 114895.
- [10] 刘延柱. 高等动力学[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2016: 326. (Liu Yanzhu. *Advanced Dynamics*[M]. 2nd ed. Beijing: Higher Education Press, 2016: 326. (in Chinese))
- [11] 张伟年, 杜正东, 徐冰. 常微分方程[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2014: 228. (Zhang Weinian, Du Zhengdong, Xu Bing. *Ordinary Differential Equation*[M]. 2nd ed. Beijing: Higher Education Press, 2014: 228. (in Chinese))
- [12] 朗道 Л Д, 栗弗席兹 Е М. 力学[M]. 5 版, 李俊峰, 译. 北京: 高等教育出版社, 2007: 172. (Landau L D, Lifschitz E M. *Mechanics*[M]. 5th ed, translated by Li Junfeng. Beijing: Higher Education Press, 2007: 172. (in Chinese))
- [13] Nayfeh A H, Balachandran B. *Applied Nonlinear Dynamics*[M]. John Wiley & Sons, Inc, 1995.