ⓒ 应用数学和力学编委会, ISSN 1000-0887

http://www.applmathmech.cn

弹性和剪切稀化对微通道中颗粒聚集模式的调控机制研究*

杨剑桥,　王企鲲,　赵可馨

(上海理工大学 能源与动力工程学院, 上海 200093)

摘要:　研究了微流控通道中颗粒聚集的力学机制,通过数值模拟分析了 Oldroyd-B 与 Giesekus 两种黏弹性流体中颗粒聚集现象.采用"相对运动模型",并应用对数构象张量法以提升计算稳定性,系统考察了流体弹性及剪切稀化强度对颗粒受力和平衡位置的作用.结果表明,颗粒聚集行为随流变参数变化呈现多模式特征:无剪切稀化时,颗粒向管中心迁移;弱剪切稀化时,出现中心散焦与近壁聚集的双稳态;较强剪切稀化时,颗粒稳定聚集于单一环形位置,且该位置随弹性增强呈先外移后内收的变化规律.力学分析表明,惯性升力主导总升力分布,但受弹性的耦合作用和剪切稀化的影响.该研究揭示了流变参数对颗粒聚集的调控机制,为微流控分选设计提供了理论依据.

关　键　词:　黏弹性流体;　颗粒聚集;　Giesekus 模型;　剪切稀化;　OpenFOAM

中图分类号:　O357　　**文献标志码:**　A　　DOI: 10.21656/1000-0887.460173

The Controlling Mechanism of Elasticity and Shear Thinning for Particle Focusing Patterns in Microchannels

Yang Jianqiao,　Wang Qikun,　Zhao Kexin

(*School of Energy and Power Engineering*, *University of Shanghai for Science and Technology*, *Shanghai* 200093, *P.R. China*)

Abstract: To investigate the mechanical mechanisms of particle focusing in microfluidic channels, numerical simulations were performed to analyze particle behaviors in viscoelastic fluids described by the Oldroyd-B and Giesekus models. The "relative motion model" was employed, and the log-conformation representation method was applied to enhance the computational stability. The effects of the fluid elasticity and the shear-thinning intensity on particle forces and equilibrium positions were systematically examined. The results show that, the particle focusing behavior exhibits multiple patterns depending on rheological parameters: the migration of particles toward the center in the absence of shear-thinning; the bistable state of particle defocusing near the center and focusing close to the wall under weak shear-thinning; the single annular focusing band formed under relatively strong shear-thinning, and its location first moved outward and then inward with the increasing elasticity. The mechanics analysis indicates that, the inertial lift force dominates the total lift distribution but is modulated by elastic coupling and shear-thinning effects. This study reveals the regulation of particle focusing

* **收稿日期:**　2025-09-22; **修订日期:**　2025-12-17

基金项目:　国家自然科学基金(52576166)

作者简介:　杨剑桥(1997—),男,硕士生(E-mail: 1164989788@qq.com);
王企鲲(1978—),男,副教授,博士(通信作者. E-mail: wangqk@usst.edu.cn).

引用格式:　杨剑桥, 王企鲲, 赵可馨. 弹性和剪切稀化对微通道中颗粒聚集模式的调控机制研究[J]. 应用数学和力学, 2026, **47**(10): 1298-1311.

by rheological parameters and provides a theoretical basis for the design of microfluidic sorting devices.

Key words: viscoelastic fluid; particle aggregation; Giesekus model; shear-thinning; OpenFOAM

0 引　　言

微流控技术是一门在微观尺寸下控制、操作和检测复杂流体的科学技术.它可以对化学科学的颗粒、环境科学的液滴和生物医学的细胞等目标物,进行聚集[1]、浓缩[2]和分离[3].具有平行处理带来的高效性、设备轻巧带来的便捷性、减少样品使用和操作的简单自主性[4]等优点.

相较于 Newton 流体,利用黏弹性流体中弹性的作用,可操纵更小尺寸[5-7]和更宽流速范围[8]的颗粒.弹性升力与惯性升力的组合可以在较高流速下增强微通道中的颗粒控制[5-6].同时,实际中的化学样品(如胶体悬浮液和聚合物溶液)[9-10]和生物样品(如血液、唾液和 DNA 溶液)[11]都表现出黏弹性,许多黏弹性流体中还存在不可忽略的剪切稀化流变特性[12].所以,了解黏弹性流体中颗粒的运动学与动力学行为,对于优化微流控设备的性能和实现所需结果至关重要.

Seo 等[13]通过实验观察到流体的惯性可以忽略不计时,在黏度恒定的黏弹性流体圆管通道中,颗粒聚集于管道中心.且随着 Weissenberg (Wi) 数增大,颗粒向中心聚集的速度更快,聚集程度更高.D'Avino 等[14]的微流体实验证明了悬浮在管道中,流动的黏弹性液体中的颗粒迁移存在双稳态情况.颗粒朝着中心线迁移还是向壁面迁移,这取决于液体的流变特性以及颗粒和管道的相对尺寸.

也有很多学者通过数值模拟来解决相关问题,例如 Huang 等[15]采用二维广义 Galerkin 有限元法对颗粒的运动进行了直接模拟.颗粒在压力驱动流动中的迁移行为受惯性、弹性以及剪切稀化的影响.惯性总是倾向于使颗粒远离壁面和通道的中心线,而弹性使它们向中心线迁移.当惯性或弹性足够强时,剪切稀化使颗粒远离中心线,朝向壁面移动.Villone 等[16-17]以 Giesekus 流体为介质进行二维和三维数值模拟,在无惯性条件下研究了流体弹性和剪切稀化对颗粒迁移的影响.根据其初始位置,靠近中心的颗粒向中心线迁移,而靠近壁面的则会向最近的壁面迁移,它们之间有一个分界线.随着 Wi 数的增加,分界线向管道中心移动,在高弹性效应下颗粒更倾向于向中心迁移.而当流体的剪切稀化特性增强时,分界线往相反方向移动,意味着颗粒更倾向于向壁面迁移.

研究中仅采用实验方法只能观测不同工况下的聚集现象,无法对颗粒所受升力进行直接测量,也不能对这一物理现象的成因作出力学解释.而使用数值方法又不可避免地会遇到"高 Weissenberg 数问题"(high Weissenberg number problem,HWNP),常规的计算方法往往会因为数值不稳定而发散,这就造成了研究结论往往是在较低的 Wi 数下得出的[18-19].Peng 等[20]采用对数构象张量法(log-conformation reformulation,LCR)[21]对黏弹性流动的绕流旋涡脱落进行了数值研究,一定程度上解决了高 Wi 数导致数值不稳定问题.所以本文基于"相对运动模型"[22-23]理论,运用 OpenFOAM 搭建三维微通道流体非定常流动模型,采用 LCR 方法,较为系统地探究黏弹性流体中弹性和剪切稀化强度对于颗粒受力特性的影响.以期加深黏弹性流体中颗粒聚集与分选的理论认识,并为不同领域的非 Newton 流体系统微通道颗粒控制的研究提供参考.

1　计算模型与计算方法

1.1　控制方程

本文进行三维不可压缩流动的数值模拟,控制方程包括连续性方程和动量方程:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial(\rho\boldsymbol{u})}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}\boldsymbol{u})=-\nabla p+\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}, \tag{2}$$

式中,$\boldsymbol{u}$ 为速度矢量,p 为压力,t 为时间,$\boldsymbol{\tau}$ 为总应力张量,ρ 为水的密度,取 1 000 kg/m^3.

当管道内为黏弹性流体时,$\boldsymbol{\tau}$ 分为 $\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{s}}$ 黏性和 $\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{p}}$ 弹性应力张量,即

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{s}}+\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{p}}, \tag{3}$$

$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{s}}$ 由 Newton 内摩擦定律得出 $\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{s}}=\eta_{\mathrm{s}}(\nabla\boldsymbol{u}+(\nabla\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}})$,$\eta_{\mathrm{s}}$ 为聚合物溶液中溶剂贡献的黏度,$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{p}}$ 则通过附加弹性

应力本构方程进行计算[9].

Oldroyd-B 和 Giesekus 流体本构方程为

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{p}}}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{p}}\cdot\nabla\boldsymbol{u}+(\nabla\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{p}}+\frac{1}{\lambda}\{2\eta_{\mathrm{p}}[\nabla\boldsymbol{u}+(\nabla\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}]-\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{p}}\}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{p}}}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{p}}\cdot\nabla\boldsymbol{u}+(\nabla\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{p}}+\frac{1}{\lambda}\{2\eta_{\mathrm{p}}[\nabla\boldsymbol{u}+(\nabla\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}]-\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{p}}\}-\frac{\alpha}{\eta_{\mathrm{p}}}(\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{p}}\cdot\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{p}}), \tag{5}$$

其中,λ 为松弛时间,η_{p} 为聚合物溶液中溶液贡献的黏度,α 为非线性衰减系数,称为迁移因子($0<\alpha<1$).对比可见,Giesekus 模型在 Oldroyd-B 模型基础上增加了以弹性应力构造出的非线性衰减项 $(\alpha/\eta_{\mathrm{p}})(\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{p}}\cdot\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{p}})$,这一项描述了聚合物链的各向异性运动和剪切稀化等非线性效应[24].当 $\alpha=0$ 时,Giesekus 模型退化为 Oldroyd-B 模型.

构象张量 $\boldsymbol{C}$ 和弹性应力张量 $\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{p}}$ 的关系由下式给出[25]:

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{p}}=\frac{\eta_{\mathrm{p}}}{\lambda}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{I}), \tag{6}$$

式中,$\boldsymbol{I}$ 为单位张量.结合式(4)可得到 Oldroyd-B 流体构象张量方程如下:

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{C}}{\mathrm{D}t}=\boldsymbol{C}\cdot\nabla\boldsymbol{u}+(\nabla\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{C}+\frac{1}{\lambda}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}), \tag{7}$$

式中,$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$.定义 $\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}=\dfrac{\partial}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)$,$L=\nabla\boldsymbol{u}$,结合式(7)可以得到

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{C}}{\mathrm{D}t}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}+\frac{1}{\lambda}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}). \tag{8}$$

同理,可以得到 Giesekus 流体构象张量方程:

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{C}}{\mathrm{D}t}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}-\frac{1}{\lambda}[(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{I})+\alpha(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{I})^{2}]. \tag{9}$$

另外,在高 Wi 数的数值模拟计算中,会产生较大弹性变形梯度导致计算发散.Fattal 和 Kupferman[26] 提出了 LCR 方法,可以提升高 Wi 数下的数值稳定性.因此,本文在构象张量方程的基础上使用 LCR 方法.

以 Oldroyd-B 流体的构象张量方程为例,定义 $\boldsymbol{\Theta}=\lg\boldsymbol{C}=\boldsymbol{R}\cdot\lg\boldsymbol{\Lambda}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$,正交矩阵 $\boldsymbol{R}$ 由其特征向量组成,对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 表示的对角元素是由 $\boldsymbol{C}$ 分解得到各自的特征值.结合式(8)得出

$$\tilde{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{\Lambda}+\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\Lambda}}{\mathrm{D}t}+\boldsymbol{\Lambda}\tilde{\boldsymbol{S}}^{\mathrm{T}}=\tilde{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{\Lambda}\tilde{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}+\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{I}-\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\Lambda}, \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\Theta}}{\mathrm{D}t}=\boldsymbol{R}\left(\tilde{\boldsymbol{S}}\lg\boldsymbol{\Lambda}+\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\Lambda}}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}+\lg\boldsymbol{\Lambda}\cdot\tilde{\boldsymbol{S}}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}, \tag{11}$$

式中,$\tilde{\boldsymbol{S}}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\dfrac{\mathrm{D}\boldsymbol{R}}{\mathrm{D}t}$,$\tilde{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\boldsymbol{R}$.结合式(10)和(11),可以得出对数构象张量方程:

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\Theta}}{\mathrm{D}t}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Theta}-\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{S}+2\boldsymbol{B}+\frac{1}{\lambda}(\mathrm{e}^{-\boldsymbol{\Theta}}-\boldsymbol{I}), \tag{12}$$

式中,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$($\tilde{B}_{ii}=\tilde{L}_{ii}$,$\tilde{B}_{ij}=0$),$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$.

为了提高收敛性[27],本文在对流项采用高分辨率 CUBISTA(convergent and universally bounded interpolation scheme for treatment of advection)格式,瞬态项采用二阶向后差分格式,扩散项采用中心差分格式进行离散.

1.2 计算模型

本文研究对象为微型长圆管道中运动的刚性球形颗粒,管道长度为 L,直径为 D,颗粒直径为 d,如图 1 所示.

本文采用 OpenFOAM 和 RheoTool 开源软件包[28],数值求解黏弹性流体流动.采用“相对运动模型”[22-23]来简化计算,其基于相对运动的思想,颗粒在通道内运动时,其周围流场是非定常的,以颗粒中心为原点建立

坐标系,并与颗粒一同以恒定的平移速度 U_p 沿 x 方向移动.此时,以该坐标系为参照,可以将颗粒视为静止,而通道的壁面以大小相同的速度 U_p 沿反方向运动,颗粒的平移速度就转化为壁面的反方向移动速度,而颗粒仅保留旋转而无平移运动.如此,整个流场便退化为准定常流动,采用固定的网格系统即可进行计算."相对运动模型"能够获取颗粒在某一指定位置稳定运动时所受的径向升力,通过将颗粒置于横截面若干位置(即参考坐标系中不同的 y 轴位置),即可得到其所受升力的空间分布,这有利于分析颗粒聚集现象背后的力学成因.

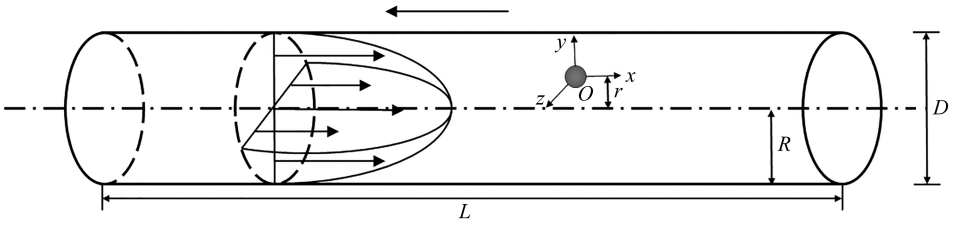


图 1　计算模型示意图

Fig. 1　Schematic diagram of the computational model

在边界条件的设置上:入口边界施加均匀流速,在出口边界施加零梯度边界条件,壁面施加无滑移边界条件,颗粒表面设置旋转边界.当颗粒稳定运动时,仅存在以球心为中心的旋转,而管道的壁面则以大小相同的速度沿着反方向运动.因此,确定颗粒稳定时的平移速度及旋转速度在相对运动模型中极为重要.判定颗粒稳定运动的标准在于颗粒沿流动方向(x 方向)的合力以及自身绕旋转轴的转矩是否为零量阶,计算方法如下:

x 方向的合力

$$F_D = \boldsymbol{e}_x \oiint_{\Sigma} [\boldsymbol{\tau}] \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S; \tag{13}$$

颗粒转矩

$$M = \boldsymbol{r} \oiint_{\Sigma} [\boldsymbol{\tau}] \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S, \tag{14}$$

式中,$\boldsymbol{e}_x$ 表示 x 方向上的单位向量,$\boldsymbol{r}$ 为由颗粒中心指向颗粒表面的矢径,Σ 表示颗粒表面,$\boldsymbol{\tau}$ 为应力张量,$\boldsymbol{n}$ 为颗粒的单位外法线向量.

管道内的颗粒在径向受到的升力计算方式如下:

$$F_L = \boldsymbol{e}_y \oiint_{\Sigma} [\boldsymbol{\tau}] \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S, \tag{15}$$

式中,$\boldsymbol{e}_y$ 表示 y 方向上的单位向量.当颗粒所处溶液为黏弹性流体时,升力分为惯性升力 F_{Li} 和弹性升力 F_{Le}:

$$F_{Li} = \boldsymbol{e}_y \oiint_{\Sigma} [\boldsymbol{\tau}^s] \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \oiint_{\Sigma} [\tau^s_{yx} n_x + (-p + \tau^s_{yy}) n_y + \tau^s_{yz} n_z] \mathrm{d}S, \tag{16}$$

$$F_{Le} = \boldsymbol{e}_y \oiint_{\Sigma} [\boldsymbol{\tau}^p] \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \oiint_{\Sigma} [\tau^p_{yx} n_x + \tau^p_{yy} n_y + \tau^p_{yz} n_z] \mathrm{d}S. \tag{17}$$

为方便下文讨论和分析,定义以下无量纲参数:

Reynolds 数 Re

$$Re = \frac{\rho V D}{\eta_0}, \tag{18}$$

其中,ρ 为流体密度,V 为管内流体平均流速,D 为管道直径,η_0 为流体零剪切黏度.本文所研究工况中,Re 数均为 5.

Weissenberg 数 Wi

$$Wi = \lambda \frac{V}{D}, \tag{19}$$

式中,λ 为黏弹性流体的松弛时间.

溶剂黏度比 β

$$\beta = \frac{\eta_{\mathrm{s}}}{\eta_{\mathrm{s}} + \eta_{\mathrm{p}}}, \tag{20}$$

式中，η_{s} 为聚合物溶液中溶剂贡献的黏度，η_{p} 为聚合物溶液中溶质贡献的黏度.

升力系数 $C_{F_{\mathrm{L}}}$

$$C_{F_{\mathrm{L}}} = \frac{F_{\mathrm{L}}}{\rho V^2 d^4 / D^2}, \tag{21}$$

式中，F_{L} 为颗粒所受到的升力，d 为颗粒直径.

无量纲径向位置 r^+

$$r^+ = \frac{r}{R}, \tag{22}$$

式中，r 表示颗粒中心到管道中心的距离，R 为圆形管道的半径.

无量纲颗粒直径 a^+（阻塞比）

$$a^+ = \frac{d}{D}, \tag{23}$$

文中，若无特殊说明所研究工况 a^+ 数均为 0.3.

压力系数 C_p

$$C_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2}\rho V^2}, \tag{24}$$

式中，p_0 为管一侧环境压力.

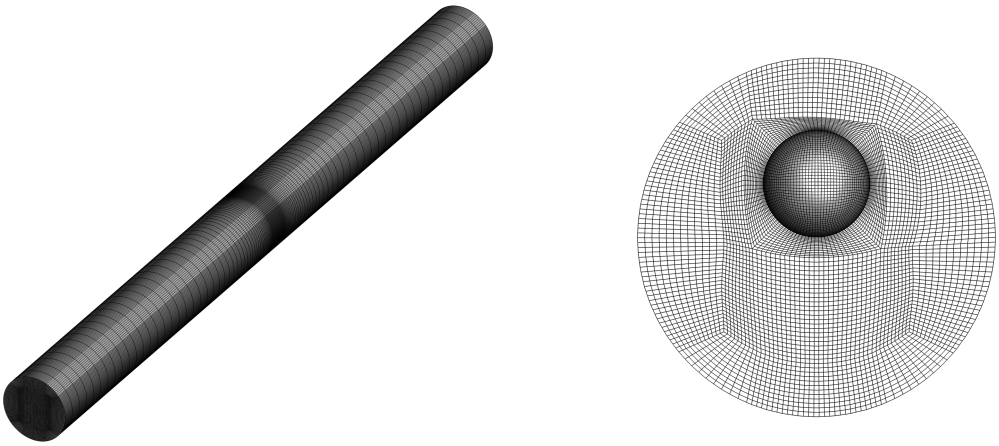
第一法向应力差系数 Ψ_1

$$\Psi_1 = \frac{\tau_{xx} - \tau_{yy}}{\gamma^2}, \tag{25}$$

式中，τ_{xx} 为流场中 x 方向的正应力，τ_{yy} 为流场中 y 方向的正应力，γ 为剪切速率.

1.3 网格无关性分析及计算验证

为保证计算准确性，对网格模型进行无关性验证分析.网格采用结构化网格对计算域进行网格划分，主要对颗粒表面及其周围的流体域进行加密处理，如图 2 所示.



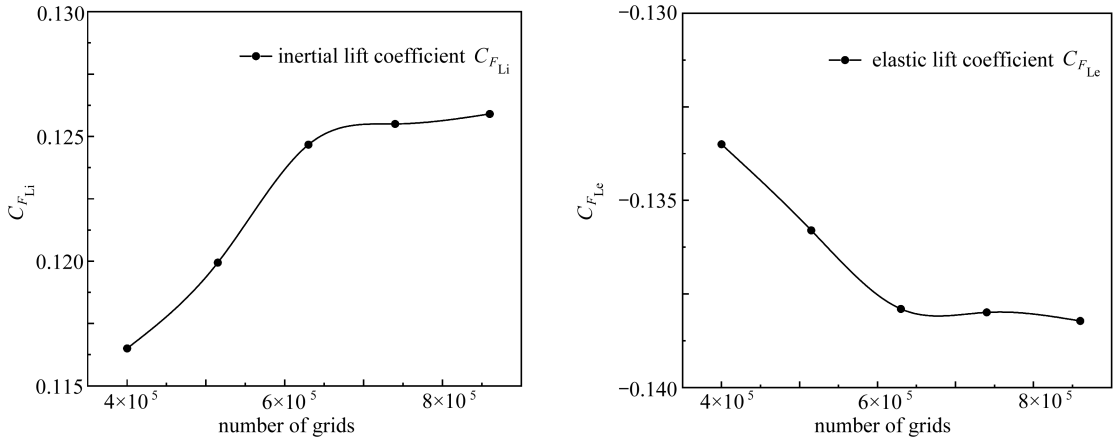
（a）管道周围网格 （b）颗粒周围网格

（a）The pipeline grid （b）The mesh around particles

图 2 数值网格模型图

Fig. 2 The numerical grid model diagram

本次验证准备了 5 套网格, 计算工况为: Giesekus 流体模型, $Re = 5$, $Wi = 3$, $\beta = 0.8$, 颗粒径向位置 $r^+ = 0.1$, 阻塞比 $a^+ = 0.3$, 结果如图 3 所示.从图中可以看到当网格数量达到 70 万左右时,弹性升力和惯性升力都趋于稳定,为了在满足计算精度的基础上尽可能地节约计算时间,最终确定将计算域的网格数量控制在 70 万左右.



(a) 惯性升力系数　　(b) 弹性升力系数

(a) The inertial lift coefficient　　(b) The elastic lift coefficient

图 3　网格无关性验证

Fig. 3　Grid independence verifications

为了确保计算模型和数值方法的正确性,计算了 Giesekus 流体方管中颗粒在 $Re = 30$, $Wi = 0.1$, $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.5$ 的工况下所受升力.与文献[29]进行比较,文献采用了分布式 Lagrange 乘子(DLM)方法,按照相同的无量纲方法得出升力系数进行对比,结果如图 4 所示.

可以看到在大部分的径向位置,两者结果吻合得很好.二者采用的数值计算方法不同,且颗粒越靠近壁面越容易对流场分布和应力分布造成扰动,所以在靠近壁面的位置结果出现了些许差距,但总体来说本文所使用数值计算方法以及相对运动模型在求解黏弹性流体中颗粒的力学特性上是可靠的.

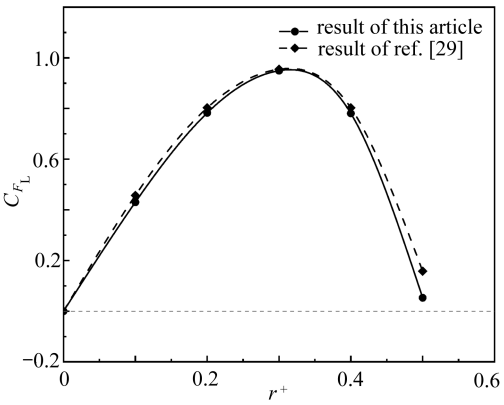


图 4　升力系数对比

Fig. 4　Comparison of lift coefficients

2　颗粒升力分布与讨论计算模型与计算方法

2.1　Wi 数对颗粒聚集的影响

在上文所述的圆管颗粒模型下进行数值模拟计算,固定工况 $Re = 5$, $\beta = 0.8$, 由于对数构象张量法的应用,可以将 Wi 数计算至 3,都有较为稳定可靠的结果.

迁移因子 $\alpha = 0$,流体为不具有剪切稀化作用的 Oldroyd-B 流体,上述参数计算结果如图 5 所示.在 Wi 数较低时 ($Wi = 0.1$),升力分布特征与 Newton 流体相近,将这种类型的曲线称为类 Newton 曲线.其特征为类二次型曲线,存在两个升力零点: 一个位于管道中心 ($r^+ = 0$);一个位于管道半径中部 ($r^+ = 0.45$)附近.在 $r^+ = 0 \sim 0.45$ 的两个升力零点之间,升力系数为正,颗粒所受升力方向指向壁面,而 $r^+ = 0.45 \sim 0.6$ 部分升力系数为负,颗粒所受升力方向指向管道中心.这种升力分布就使得颗粒在稳定状态之后,管道半径中部的升力零点呈环形聚集分布,如图 6(a)所示.

并非所有零升力点都是颗粒的稳定聚集位置,以 $Wi = 0.1$ 时的曲线为例:位于管道中心 ($r^+ = 0$)的零升力点并非稳定聚集点,管道半径中部 ($r^+ = 0.45$)附近的零升力点为稳定聚集点.这是因为在管道中心,颗粒虽然在径向上受力平衡,但当颗粒因随机扰动偏离零升力点一个微小径向位移时,会受到一个使之背离该零

升力点位置的径向升力作用,从而偏离零点位置,并且该径向升力随着颗粒偏离零升力点的位移的增加而增大,这就导致了该零升力点不是稳定聚集点,它在升力曲线的空间分布上表现为升力曲线在该点为零点且在该点沿径向斜率(一阶导数)为正值;在管道半径中部 ($r^+ = 0.45$ 附近)的零升力点,颗粒所受升力方向始终指向零点位置,且随颗粒偏离零升力点的径向位移的增加而增大.在这种径向升力的作用下,当颗粒因外界微小扰动而偏离零升力点位置时,颗粒始终会被拉回至零升力点位置,因此这种零升力点为稳定聚集点,它在升力曲线的空间分布上表现为升力曲线在该点为零点且在该点沿径向斜率(一阶导数)为负值.

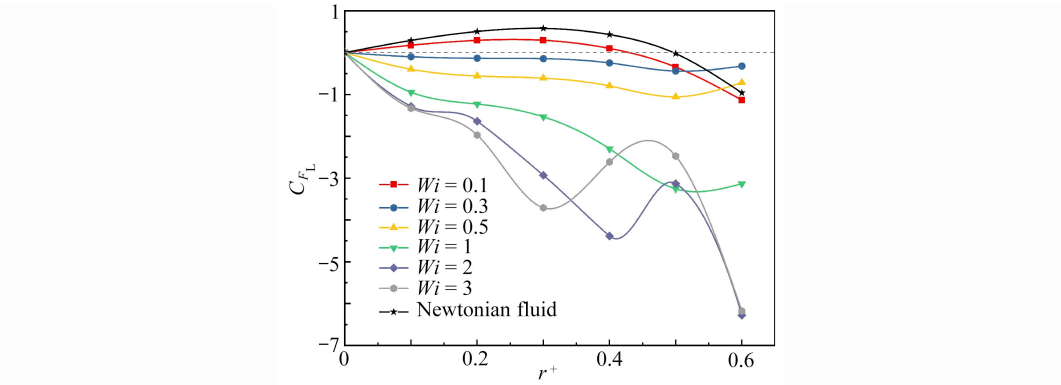


图 5 $\alpha = 0$ 时颗粒总升力分布变化情况

Fig. 5 Variations of the total lift force distribution for $\alpha = 0$

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同.

综上所述,并非所有的零升力点均是稳定聚集点,只有满足下列条件(式(26))的零升力点才是稳定聚集点.这个条件被称为颗粒稳定聚集判据.用数学表达式可表示为

$$\begin{cases} C_{F_L}(r^+) = 0, \\ C'_{F_L}(r^+) < 0, \end{cases} \tag{26}$$

式中,“′”代表沿径向的一阶导数.

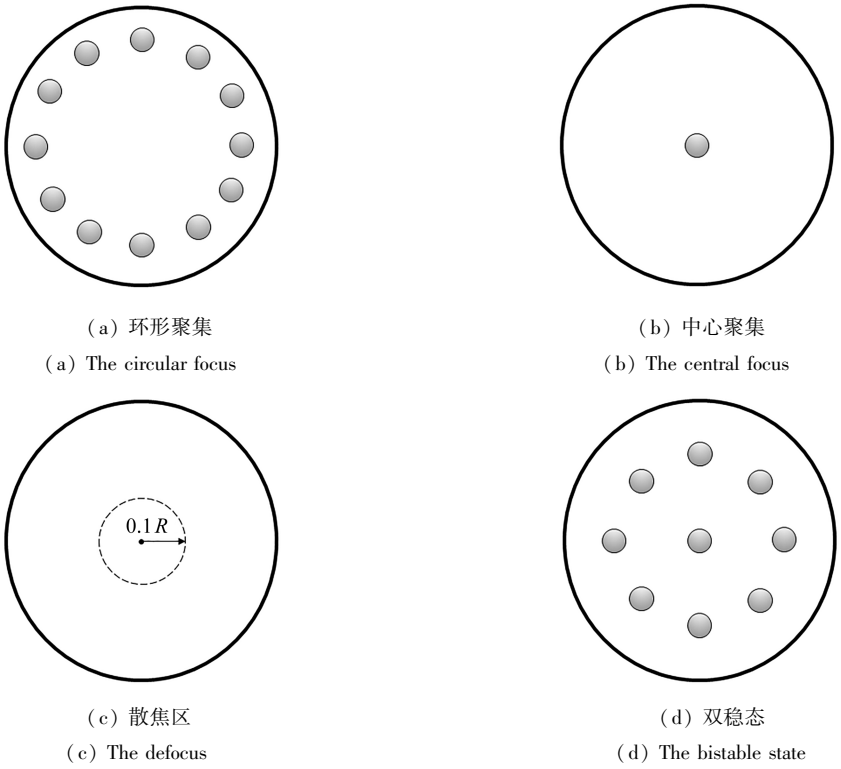
在 Wi 数较高时($Wi = 0.5, 1$),根据颗粒稳定聚集判据,可以发现 $r^+ = 0$ 位置的零升力点变为稳定聚集点,与此同时,管道半径中部的聚集点消失,这意味着,颗粒由环形聚集转变为在管道中心聚集,如图 6(b)所示.整个升力曲线的形态发生变化,不再与 Newton 流体相近,整体升力系数为负,所有径向升力指向管道中心.随着 Wi 数的继续增大($Wi = 2, 3$),颗粒所受升力也不断增大,在管内靠近壁面侧甚至出现了波动趋势.

图 7 为迁移因子 $\alpha = 0.1$ 时的 Giesekus 流体中不同 Wi 数下的总升力系数曲线.此时,流体的剪切稀化程度较低,可以明显看到,对于具有剪切稀化特性的流体,升力系数的大小较 $\alpha = 0$ 的 Oldroyd-B 流体降低了一个量级,颗粒的聚集位置也发生了较大改变.在 $Wi = 0.1$ 时,仍是类 Newton 曲线,颗粒存在两个零升力点,一个位于管道中心位置 ($r^+ = 0$),另一个位于管道半径中部 ($r^+ \approx 0.5$),前者不是稳定聚集点,后者为稳定聚集点.当 $Wi = 0.3, 0.5$ 时,可以看到,原来位于管道半径中部的稳定聚集点朝管道壁面移动;与此同时,曲线形态也发生了变化,由二次型变为 S 形,相较于 $Wi = 0.1$,靠管道中心侧 ($r^+ = 0 \sim 0.3$)升力系数普遍下降,靠管壁侧 ($r^+ = 0.3 \sim 0.6$)升力系数普遍上升.

这里值得一提的是,在 $Wi = 0.5, 1$ 时,在 $r^+ = 0.6$ 时的曲线虽没有与升力为零时的线(即图中的水平虚线)产生交点,但根据升力系数数值和整体的趋势判断,在 $r^+ = 0.6 \sim 0.7$ 之间存在一个交点,所以在曲线末端用虚线延长线画出.当 $r^+ = 0.7$ 时颗粒模型将会与壁面接触,过于靠近壁面会对近壁面网格质量产生较大影响,降低计算结果的求解精度,甚至会造成发散,所以未进行计算.

在 Wi 数较高时($Wi = 1, 3$),管道中心的零升力点的特性开始出现变化:中心位置附近 ($r^+ = 0 \sim 0.1$)的区域中,颗粒所受的升力极小,接近于零,处在这个位置的颗粒不聚集于某个径向位置点,而是较为分散地分布在这个径向范围之内,管道中心有一块稳定聚集区域,出现“散焦”[13,30]现象,如图 6(c)所示.这种散焦现象由实验所发现,本文通过数值模拟,给出了其可能产生的工况条件及力学机理.随着径向位置远离管道中

心(r^+>0.1),颗粒所受到的升力越大,当靠近管壁时 (r^+ = 0.45~0.6),受到的升力逐渐减小,会在更靠近壁面的位置与升力为零的线产生交点,此零升力点满足稳定性判据为稳定聚集点.加上管道中心的稳定聚集区域,这就出现了“双稳态”的现象,如图 6(d)所示.D'Avino 等[14] 和 Del Giudice 等[31] 分别在圆管和方管的实验研究中观察到了类似现象,在具有剪切稀化效应的溶液中,颗粒会集中在中心和靠近壁面的两个位置.Li 等[32] 采用分布式 Lagrange 乘子方法数值模拟的方法,在相同的迁移因子 α = 0.1 下得出结论,颗粒具体在双稳态的哪个位置聚集,与初始的释放位置有关.



(a) 环形聚集　(a) The circular focus

(b) 中心聚集　(b) The central focus

(c) 散焦区　(c) The defocus

(d) 双稳态　(d) The bistable state

图 6　颗粒聚集分布示意图

Fig. 6　Schematic diagram of particle focusing distribution

图 8 和图 9 为迁移因子 α = 0.3 时的 Giesekus 流体中不同 Wi 数下的总升力系数曲线.可以看到在较高的剪切稀化程度下,管道中心散焦区稳定聚集位置消失,颗粒聚集的位置为管道半径中部的稳定聚集点,随着流动的发展,颗粒会在这个位置呈较为集中的环形分布,这个现象与 Newton 流体的 Segre-Silberberg 环[33] 有些相似.升力系数曲线的变化有很强的规律性,总体形态都是类 Newton 曲线.根据稳定聚集点在径向位置随 Wi 数移动的不同变化规律,将上述总升力系数曲线分成两类:第一类是图 8 的 Wi = 0.1~0.5,稳定聚集点的径向位置随 Wi 数增加而增大,本文称为“递增区”,如图 10 所示;第二类是图 9 的 Wi = 0.5~3,稳定聚集点的径向位置随 Wi 数增加而降低,本文称为“递减区”,这两类区域的分界 Wi 数在 0.3~0.5 之间.

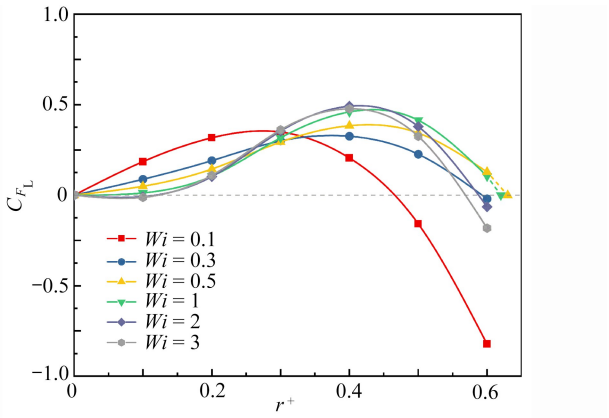


图 7　α = 0.1 时颗粒总升力分布变化情况

Fig. 7　Variations of the total lift force distribution for α = 0.1

在“递增区”,随着 Wi 数的增大,稳定聚集点不断向管道壁面移动,总体升力系数曲线也呈上升趋势.在 r^+ = 0~0.2 的范围内升力系数几乎没有发生变化, r^+ = 0.2~0.6 范围内每个位置升力系数随 Wi 数的增大不断增大.

较高的 Wi 数下的“递减区”曲线,靠近管壁的稳定聚集点向管道中心移动.$r^+ = 0 \sim 0.35$ 的范围内升力系数较为接近,但在 $r^+ = 0.35 \sim 0.6$ 的范围内随着 Wi 数的上升,升力系数出现了有规律的下降,近壁稳定聚集点也随之发生左移.Raffiee 等[29]在剪切稀化特性较强的方形管道中,也得出了类似颗粒聚集点随 Wi 数改变而移动的结论.由曲线与坐标轴交点的改变可以看出,在较高剪切稀化程度的情况下,可以通过改变 Wi 数来改变颗粒的稳定聚集点,对于聚集位置在一定程度上有着可操控性.

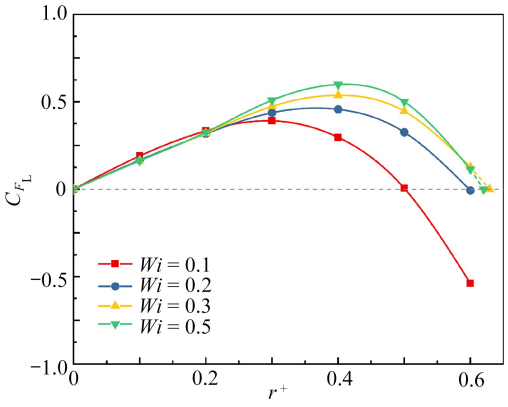


图 8 $\alpha = 0.3$ 时的递增区颗粒总升力分布变化情况

Fig. 8 Variations of the total lift force distribution in the increasing regime for $\alpha = 0.3$

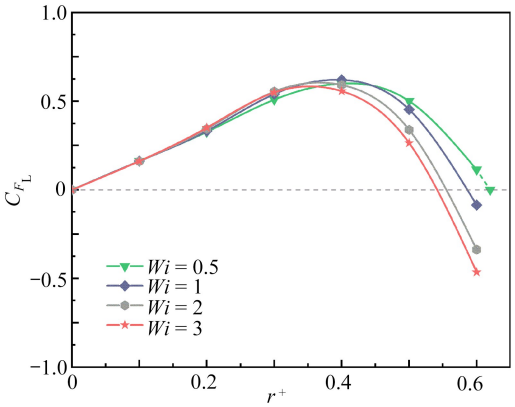


图 9 $\alpha = 0.3$ 时的递减区颗粒总升力分布变化情况

Fig. 9 Variations of the total lift force distribution in the decreasing regime for $\alpha = 0.3$

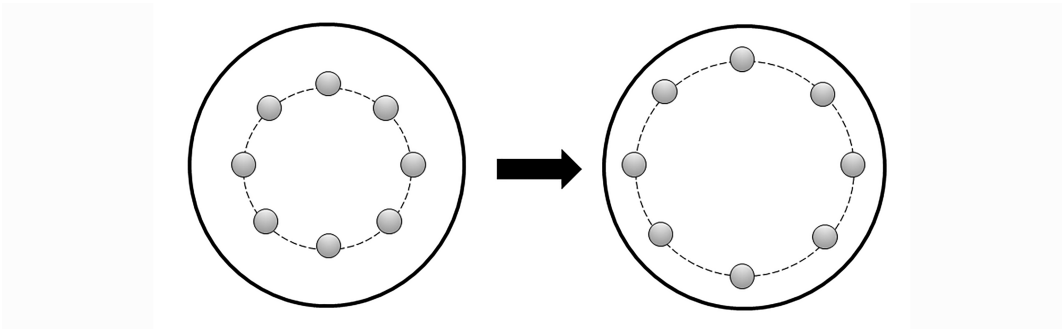


图 10 $\alpha = 0.3$ 时的递增区颗粒聚集情况变化示意图

Fig. 10 Schematic diagram of the changes in particle focusing in the increasing region for $\alpha = 0.3$

2.2 不同迁移因子 α 对颗粒聚集模式的影响及原因分析

经过上述的研究可以发现不同迁移因子 α 对总升力空间分布规律具有明显影响,进而对颗粒聚集模式起着决定性作用.选取 Wi 数为 1,可以较为代表性地反映不同迁移因子下的曲线特性.但是基于热力学考虑,对于研究的黏弹性流体来说,迁移因子必须在 0~0.5 的范围内[34].所以计算迁移因子 $\alpha = 0.01, 0.5$ 的曲线结合已经计算的数据得出图 11.

在 $\alpha = 0$ 时为无剪切稀化的 Oldroyd-B 流体,只有管道中心一个稳定聚集点,在分布特性上为中心稳定聚集.整体升力系数为负,所有径向位置升力指向管道中心.

随着剪切稀化特性的引入 ($\alpha = 0.01$),聚集点没有发生变化,整体升力方向不变,但大小明显减小.随着迁移因子 α 的连续增加,黏弹性流体的本构特性从 Oldroyd-B 流体 ($\alpha = 0$) 变为 Giesekus 流体 ($0 < \alpha < 1.0$),颗粒所受升力特性曲线的变化虽表现出连续性,但在 α 从 0~0.1 之间存在着剧烈变化,且随着 α 的升高这种变化趋势逐渐减小,这也符合了 Giesekus 模型非线性的性质,这种多模态变化可能更贴近实际黏弹性流体的行为.

在迁移因子 α 为 0.1 时,管道中心稳定聚集点变为稳定聚集区域,出现散焦现象,同时在靠近壁面时出现稳定聚集点,在分布特性上出现双稳态现象.此时整体升力系数变为正,意味着颗粒所受升力方向变为指向管壁.

当迁移因子 α 为 0.3，0.5 时，管道中心的零升力点不再为稳定聚集点，而管道半径中部的零升力点依旧为稳定聚集点.在这两个聚集点之间颗粒所受升力为正，即其方向指向管壁，而管道半径中部的稳定聚集点与管壁之间所受升力方向变为指向管道中心，这样颗粒在分布特性上呈稳定的环形分布.同时随着 α 的升高，稳定聚集点向管道中心移动，这意味着通过改变迁移因子，我们也可以对颗粒聚集位置在一定程度上加以操控.

为探究流体的剪切稀化流变特性与弹性对升力的影响，对颗粒所受升力中的分量惯性升力和弹性升力做出进一步分析.

如图 12，α = 0 的 Oldroyd-B 流体的惯性升力沿径向均为负值，且随离管轴距离的增加会急剧增大.引入剪切稀化（α = 0.01）后，惯性升力的方向虽没有改变，但数量上已经小了一个数量级，并在管壁附近呈现出明显的有界性.在低剪切稀化程度时（α = 0.1），升力方向从指向管道中心变为指向管壁，管道中心向管壁分布趋势为先增大后减小.而剪切稀化程度再增加时（α = 0.3，0.5），惯性升力曲线大小和趋势已没有明显变化.

如图 13，黏弹性流体弹性升力的方向基本都朝向管道中心（呈负数），随着剪切稀化的增强（α 增加），弹性升力的数值会下降，径向波动程度减弱，且这种减弱趋势随着剪切稀化的增强逐渐下降.

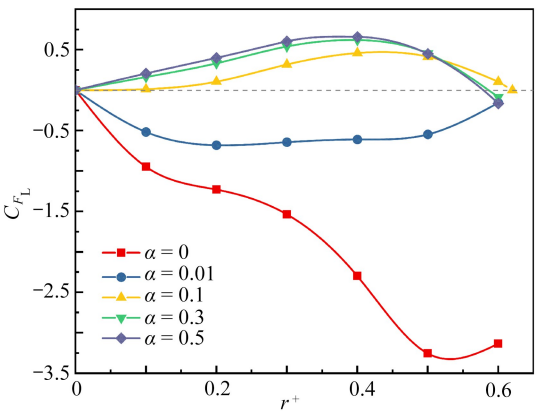


图 11　Wi = 1 时的总升力分布变化情况

Fig. 11　Variations of the total lift force distribution for Wi = 1

结合图 12 和 13 可以看出，惯性升力在数值上比弹性升力大，其空间分布与总升力的空间分布具有相同的趋势，因此可以认为对总升力起主导作用的是惯性升力.所有工况通道内 Re 数不变，惯性的改变主要源于弹性和剪切稀化两个因素.Oldroyd-B 流体惯性升力比弹性升力量级大一倍，弹性对于惯性有着非线性影响，通过改变惯性来实现对颗粒的影响；Giesekus 流体二者同量级，除了相互影响之外，还通过剪切稀化效应的影响，致使惯性力改变.

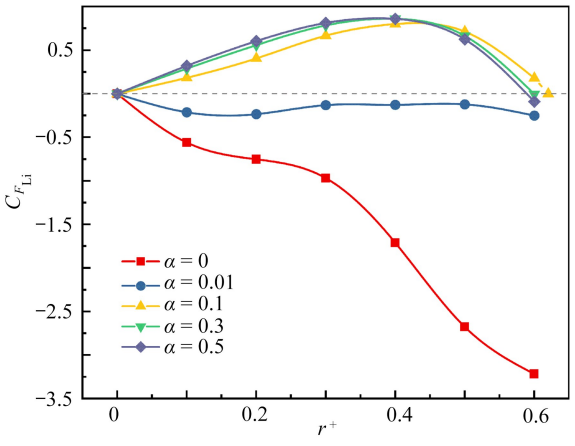


图 12　颗粒惯性升力变化情况

Fig. 12　Variations of the inertial lift force

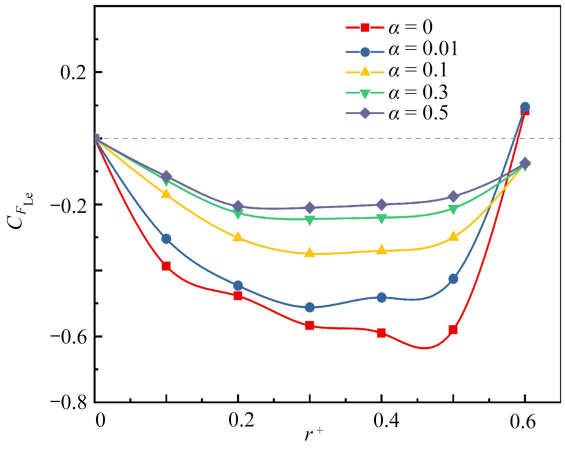


图 13　颗粒弹性升力变化情况

Fig. 13　Variations of the elastic lift force

由以上结论也可以对本文 2.1 小节的一些现象做出一些定性分析.从图 5 以及以往的研究[35]都可以得出，不具有剪切稀化作用的 Oldroyd-B 流体，随着 Wi 数的增加，弹性应力的增强会使颗粒更倾向聚集于管道中心.而 Giesekus 流体与其区别就是是否存在剪切稀化，剪切稀化使得管道内剪切速率较高的位置流体黏度降低，流速上升，此时流场局部 Re 数上升，导致颗粒聚集位置向管道壁面移动，类似这种聚集位置移动现象

在 Newton 流体中增大整体的 Re 数也会发生[36].这就导致在 $\alpha = 0.3$ 剪切稀化效应较强时,因剪切稀化造成改变的惯性应力的影响大于弹性应力的影响,在 Wi 数较低的区间内就出现了“递增区”.随着 Wi 数的继续增大,流场整体的弹性效应增强,则会出现“递减区”,这种现象可以认为是一种弹性应力和剪切变稀相互竞争的结果.

2.3 黏弹性流体流场分析

在具有剪切稀化效应的 Giesekus 流体中,颗粒剪切稀化特性通过影响惯性力,进而影响颗粒分布特性,可以从颗粒所在 yz 平面的压力系数云图 ($r^+ = 0.3$) 中看出.

对比图 14(a)—14(d)可以发现,随着迁移因子 α 的增加,剪切稀化的增强,管内流体的总体压力随之减小.图 14(a)通道截面压力的最大值开始位于颗粒靠近壁面一侧,而颗粒另一侧的压力则较低,这就导致了颗粒所受到的惯性力指向了通道中心.之后截面中的压力分布开始发生变化,在剪切稀化程度较低时(图 14(b)),压力较为均匀地分布在颗粒的周围,颗粒上下方没有明显的压强差.所以可以推断管道中心的颗粒会保持较为稳定的状态,而靠近管壁的颗粒在弹性的共同作用下也会找到一个稳定状态,这是形成双稳态的原因.如图 14(c)、14(d),剪切稀化程度较高时,压力最大区域移动至通道中心侧,并且还在逐渐增大.这意味着惯性力转变为指向管壁,而弹性力指向管道中心,这样颗粒就会在管道内某径向位置呈稳定环状分布.压力的变化对颗粒分布的变化做出了很好的解释.

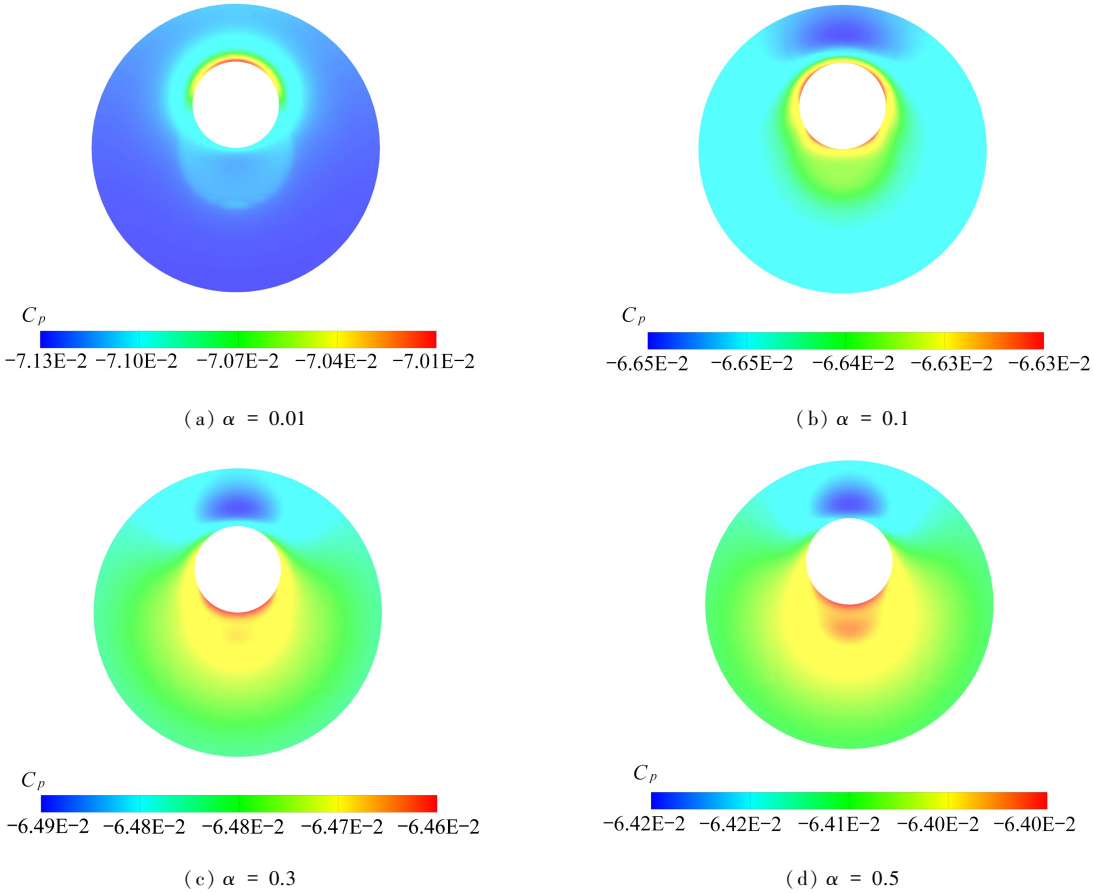


图 14 不同剪切稀化程度下颗粒附近压力系数云图

Fig. 14 Contour plots of the pressure coefficient around the particle for different shear-thinning intensities

黏弹性流体中的第一法向应力差系数反映了流体中弹性的强弱,因此可以从第一法向应力差系数云图中探究颗粒弹性升力分布不同的原因(以颗粒无量纲位置 ($r^+ = 0.3$) 为例),如图 15 所示.

对比图 15(a)—15(d)可以发现,随着迁移因子 α 的增加,流场中剪切稀化增强的同时,第一法向应力差系数不断衰减,流场中的整体弹性降低,这是图 15 中弹性升力随迁移因子 α 的增加而下降的根本原因.

观察每个图中的第一法向应力差系数的分布,基本可以得到弹性的分布变化情况,由于所有工况的 Wi

数相同，所以黏弹性流体中剪切稀化效应对弹性分布有着不可忽视的影响.由于颗粒的扰动，流场中第一法向应力差系数的最大值都出现在颗粒上部靠近壁面侧，颗粒上下出现弹性差，这导致颗粒所受到的弹性升力始终指向管道中心方向.且随着剪切稀化的增强，虽然第一法向应力差系数在总体数值上不断衰减，但是相较于每个工况下的最大弹性来说，弹性分布产生了改变，首先颗粒上部弹性较大的区域越来越大，整体管道内特别是靠近管壁的所有位置弹性也在增强.这种现象也印证了结论，剪切稀化不会改变弹性升力的方向，但会改变其大小，且使其更均匀地分布在管内的各个位置.

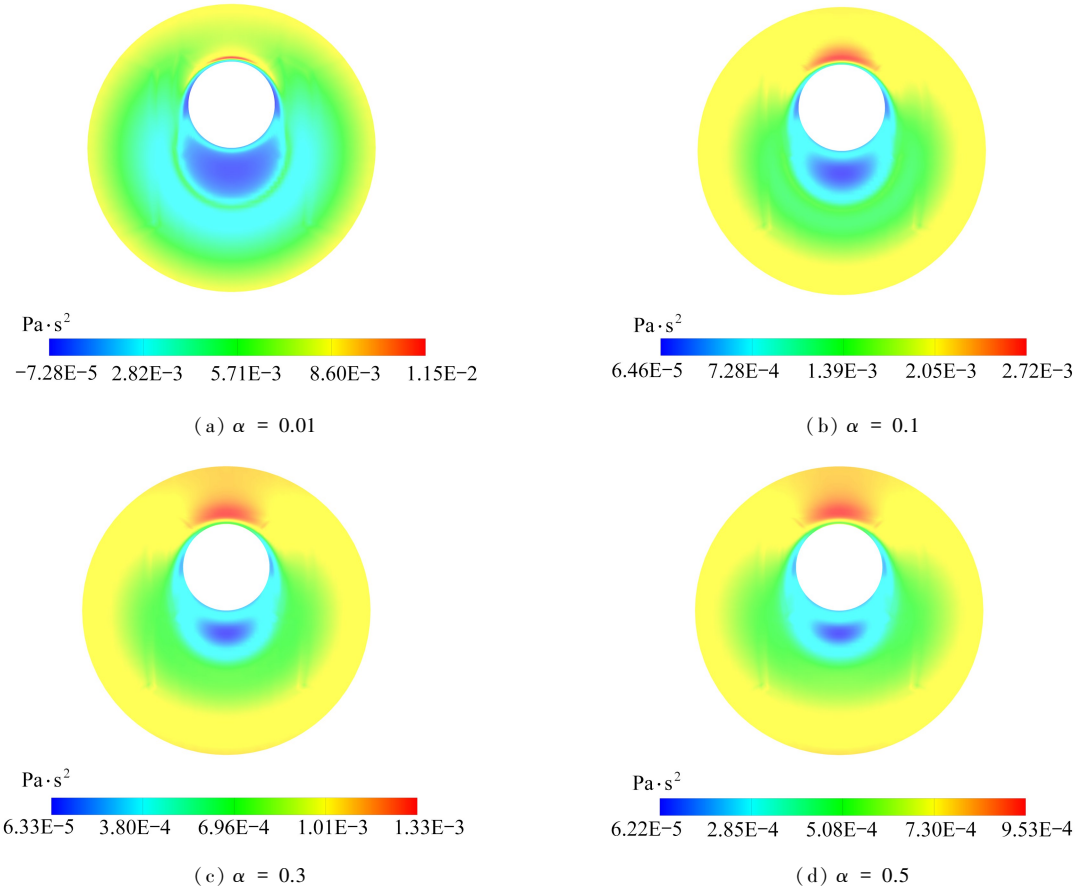


图 15　不同剪切稀化程度下颗粒附近第一法向应力差系数云图

Fig. 15　Contour plots of the 1st normal stress difference coefficient around the particle for different shear-thinning intensities

3　结　　论

本文通过建立“相对运动模型”研究黏弹性流体微通道中的颗粒力学特性，用 LCR 法稳定数值解实现了 *Wi* 数的突破，计算了更全面的参数工况，模拟出了以往实验中观察到的多种复杂聚集现象.利用 OpenFOAM 中的 RheoTool 编写的后处理代码计算黏弹性流体颗粒的表面升力与表面力矩，得出升力系数图像和云图，分析了颗粒聚集现象背后的力学规律，得出了以下结论：

1）聚集模式的多样性.通过零升力点的个数及稳定平衡位置判据，对颗粒的升力系数图像进行分析，在较为全面的 *Wi* 数下对 Oldroyd-B 流体和 Giesekus 流体进行研究.模拟出了从中心单点聚集，到中心散焦与近壁聚集并存的双稳态，再到单一环形聚集的多种模式转变，并给出了产生这些现象的工况条件.

2）颗粒聚集的可操控性.发现迁移因子 α 是控制颗粒聚集模式切换的关键参数.微弱的剪切稀化（α = 0.01）即可引发质变，较低的剪切稀化导致散焦和双稳态现象的出现，而较强的剪切稀化则使系统回归到稳定的环形聚集，可以通过改变剪切稀化实现不同的聚集需求.在剪切稀化较强的流体中，颗粒的稳定聚集位置随 *Wi* 数的变化呈现规律性的先增后减，这表明通过调节流体的弹性或流动条件，可以对颗粒的聚集位置进行精确操控.这些发现都为微流控分选器件的设计提供了重要依据.

3）力学机理.总升力由惯性升力和弹性升力共同构成,其中惯性升力在数值上占主导地位,并决定了总升力的分布趋势.颗粒的最终聚集状态并非由弹性或惯性单独决定,而是由其耦合作用及流体的剪切稀化特性共同主导.

剪切稀化效应一方面直接显著地改变惯性升力(包括大小和方向),另一方面削弱弹性效应,但使其在流场中分布更均匀.

本文虽得到了以上研究成果,但还存在些许不足,例如如何拓展到多颗粒以及多颗粒间流体扰动的问题,还有本文假设为刚性颗粒,实际的生物颗粒存在柔韧性等.根据最新的关于黏弹性流体的综述[37],黏弹性流体颗粒有序化现象值得参考,通过一些简化和假设后,多颗粒问题变为三颗粒模型,使得通过数值方法去研究多颗粒成为可能.或通过流固耦合的引入,也能使颗粒更贴近生物样本的真实行为.之后的研究将从以上方面入手,以期在现有成果上得到突破.

参考文献(References):

[1] Ateya D A, Erickson J S, Howell P B, et al. The good, the bad, and the tiny: a review of microflow cytometry[J]. *Analytical and Bioanalytical Chemistry*, 2008, **391**(5): 1485-1498.

[2] Nilsson J, Evander M, Hammarström B, et al. Review of cell and particle trapping in microfluidic systems [J]. *Analytica Chimica Acta*, 2009, **649**(2): 141-157.

[3] Pamme N. Continuous flow separations in microfluidic devices[J]. *Lab on a Chip*, 2007, **7**(12): 1644-1659.

[4] Di Carlo D. Inertial microfluidics[J]. *Lab on a Chip*, 2009, **9**(21): 3038-3046.

[5] Jae Y K, Sung W A, Sung S L, et al. Lateral migration and focusing of colloidal particles and DNA molecules under viscoelastic flow[J]. *Lab on a Chip*, 2012, **12**(16): 2807-2814.

[6] De Santo I, D'Avino g, Romeo G, et al. Microfluidic Lagrangian trap for Brownian particles: three-dimensional focusing down to the nanoscale[J]. *Physical Review Applied*, 2014, **2**(6): 064001.

[7] Liu C, Ding B, Xue C, et al. Sheathless focusing and separation of diverse nanoparticles in viscoelastic solutions with minimized shear thinning[J]. *Analytical Chemistry*, 2016, **88**(24): 12547-12553.

[8] Lim E J, Ober T J, Edd J F, et al. Inertio-elastic focusing of bioparticles in microchannels at high throughput [J]. *Nature Communications*, 2014, **5**: 4120.

[9] 蔡伟华. 黏弹性流体动力学[M]. 北京: 科学出版社, 2016: 69. (Cai Weihua. *Viscoelastic Fluid Dynamics*[M]. Beijing: Science Press, 2016: 69. (in Chinese))

[10] 许晓阳, 赵雨婷. 基于 SPH 方法的瞬态非等温黏弹性 Couette 流的数值模拟[J]. 应用数学和力学, 2023, **44**(6): 654-665. (Xu Xiaoyang, Zhao Yuting. Numerical simulation of transient non-isothermal viscoelastic Couette flows based on the SPH method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2023, **44**(6): 654-665. (in Chinese))

[11] 克乌玛 A, 范西尼 C L, 夏玛 G C, 等. 弹性动脉血管中血液流动特性的模拟和分析[J]. 应用数学和力学, 2005, **26**(3): 316-324. (Kumar A, Varshney C L, Sharma G C, et al. Performance modeling and analyis of blood flow in elastic arteries [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2005, **26**(3): 316-324. (in Chinese))

[12] Lu X, Liu C, Hu G, et al. Particle manipulations in non-Newtonian microfluidics:a review[J]. *Journal of Colloid and Interface Science*, 2017, **500**: 182-201.

[13] Seo K W, Kang Y J, Lee S J. Lateral migration and focusing of microspheres in a microchannel flow of viscoelastic fluids[J]. *Physics of Fluids*, 2014, **26**(6): 063301.

[14] D'Avino G, Romeo G, Villone M M, et al. Single line particle focusing induced by viscoelasticity of the suspending liquid: theory, experiments and simulations to design a micropipe flow-focuser[J]. *Lab on a Chip*, 2012, **12**(9): 1638-1645.

[15] Huang P Y, Joseph D D. Effects of shear thinning on migration of neutrally buoyant particles in pressure driven flow of Newtonian and viscoelastic fluids[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2000, **90**(2/3): 159-185.

[16] Villone M M, D'Avino G, Hulsen M A, et al. Numerical simulations of particle migration in a viscoelastic fluid subjected to Poiseuille flow[J]. *Computers &Fluids*, 2011, **42**(1): 82-91.

[17] Villone M M, D'Avino G, Hulsen M A, et al. Simulations of viscoelasticity-induced focusing of particles in pressure-driven micro-slit flow[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2011, **166**(23/24): 1396-1405.

[18] D'Avino G, Hulsen M A, Greco F, et al. Numerical simulations on the dynamics of a spheroid in a viscoelastic liquid in a wide-slit microchannel[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2019, **263**: 33-41.

[19] 张仕环, 庞明军, 郑智颖. 低 Weissenberg 数黏弹性流体中单气泡上浮运动特性研究[J]. 应用数学和力学, 2023, **44**(6): 629-642. (Zhang Shihuan, Pang Mingjun, Zheng Zhiying. Study on hydrodynamics characteristics of a single bubble in viscoelastic fluid at low weissenberg numbers[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2023, **44**(6): 629-642. (in Chinese))

[20] Peng S, Li J Y, Xiong Y L, et al. Numerical simulation of two-dimensional unsteady Giesekus flow over a circular cylinder[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2021, **294**: 104571.

[21] Fattal R, Kupferman R. Time-dependent simulation of viscoelastic flows at high Weissenberg number using the log-conformation representation[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2005, **126**(1): 23-37.

[22] 王企鲲, 王浩. 微通道中弹性颗粒所受惯性升力特性的数值研究[J]. 机械工程学报, 2015, **51**(14): 160-166. (Wang Qikun, Wang Hao. Behavior for inertial lift on elastic particles in micro-channel[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2015, **51**(14): 160-166. (in Chinese))

[23] Di Carlo D, Edd J F, Humphry K J, et al. Particle segregation and dynamics in confined flows[J]. *Physical Review Letters*, 2009, **102**(9): 094503.

[24] Giesekus H. A simple constitutive equation for polymer fluids based on the concept of deformation-dependent tensorial mobility[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 1982, **11**(1/2): 69-109.

[25] Sureshkumar R, Beris A N. Effect of artificial stress diffusivity on the stability of numerical calculations and the flow dynamics of time-dependent viscoelastic flows[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 1995, **60**(1): 53-80.

[26] Fattal R, Kupferman R. Constitutive laws for the matrix-logarithm of the conformation tensor[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2004, **123**(2/3): 281-285.

[27] Alves M A, Oliveira P J, Pinho F T. A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2003, **41**(1): 47-75.

[28] Fppimenta. RheoTool[EB/OL]. (2022-07-02)[2025-09-20]. https://github.com/fppimenta/rheoTool.

[29] Raffiee A H, Ardekani A M, Dabiri S. Numerical investigation of elasto-inertial particle focusing patterns in viscoelastic microfluidic devices[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2019, **272**: 104166.

[30] Seo K W, Byeon H J, Huh H K, et al. Particle migration and single-line particle focusing in microscale pipe flow of viscoelastic fluids[J]. *RSC Advances*, 2014, **4**(7): 3512-3520.

[31] Del Giudice F, D'Avino G, Greco F, et al. Effect of fluid rheology on particle migration in a square-shaped microchannel[J]. *Microfluidics and Nanofluidics*, 2015, **19**(1): 95-104.

[32] Li G, Mckinley G H, Ardekani A M. Dynamics of particle migration in channel flow of viscoelastic fluids[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2015, **785**: 486-505.

[33] Segré G, Silberberg A. Radial particle displacements in poiseuille flow of suspensions[J]. *Nature*, 1961, **189**(4760): 209-210.

[34] Schleiniger G, Weinacht R J. A remark on the Giesekus viscoelastic fluid[J]. *Journal of Rheology*, 1991, **35**(6): 1157-1170.

[35] 赵可馨, 王企鲲, 柯灵杰. 微通道中流体弹性对颗粒聚集的影响[J]. 应用数学和力学, 2025, **46**(10): 1256-1266. (Zhao Kexin, Wang Qikun, Ke Lingjie. The influence effect of fluid elasticity on particle aggregation in microchannels[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2025, **46**(10): 1256-1266. (in Chinese))

[36] Matas J P, Morris J F, Guazzelli É. Inertial migration of rigid spherical particles in Poiseuille flow[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2004, **515**: 171-195.

[37] Del Giudice F, D'Avino G. Viscoelastic ordering in microfluidic devices: current knowledge, open questions and challenges[J]. *Journal of Physics: Materials*, 2025, **8**(1): 011001.