ⓒ 应用数学和力学编委会, ISSN 1000-0887

http://www.applmathmech.cn

非 Fourier 效应对垂直槽道中磁流体热对流不稳定性的影响*

孙艳军[1]，　贾北楠[1]，　长　龙[1]，　菅永军[2]

（1. 内蒙古财经大学 统计与数学学院，呼和浩特 010070；
2. 东华大学 数学与统计学院，上海 201620）

摘要： 非 Fourier 热传导理论作为传热领域的重要修正理论，通过引入热松弛时间参数，突破了传统 Fourier 定律的抛物型方程限制，揭示了热量传递的波动特性.针对垂直槽道中磁流体热对流系统，重点研究了非 Fourier 效应对热对流不稳定性的影响机制.将各物理量分解为稳态解与小扰动叠加形式，导出扰动方程的广义特征值问题.基于线性稳定性理论，建立了考虑非 Fourier 效应与外加磁场的耦合控制方程组.采用 Chebyshev 配置法求解出时间增长率随波数的变化曲线以及中性稳定曲线，系统分析了不同参数下流动失稳的条件与模态特征.结果表明，Chandrasekhar 数对热对流的不稳定性具有显著的抑制作用.当 Grashof 数较小时，磁场效应对热对流不稳定性的调控作用更明显.Cattaneo 数和 Prandtl 数对热对流不稳定性都具有促进作用.特别地，增大 Cattaneo 数会使中性稳定曲线显示出显著的波动响应.

关　键　词： 非 Fourier 热流模型；　磁流体；　热对流不稳定性；　垂直槽道；　线性稳定性分析

中图分类号： O361.3　　**文献标志码：** A　　DOI：10.21656/1000-0887.460188

Non-Fourier Effects on the Thermal Convection Instability of Magnetohydrodynamic Fluid in a Vertical Channel

Sun Yanjun[1]，　Jia Beinan[1]，　Chang Long[1]，　Jian Yongjun[2]

（1. *School of Statistics and Mathematics*，
Inner Mongolia University of Finance and Economics，*Hohhot* 010070，*P.R. China*；
2. *School of Mathematics and Statistics*，*Donghua University*，
Shanghai 201620，*P.R. China*）

Abstract：The non-Fourier heat conduction theory，as an important modified theory in the field of heat transfer，breaks through the parabolic equation limitation of the traditional Fourier law through introduction of the thermal relaxation time parameter，to reveal the wave characteristics of heat transfer. Aimed at the magnetohydrodynamic thermal convection system in a vertical channel，the non-Fourier effect mechanism on the ther-

* **收稿日期：** 2025-10-16；**修订日期：** 2025-11-17

基金项目： 国家自然科学基金(12262026)；内蒙古自治区高校创新团队计划(NMGIRT2323)；内蒙古自治区自然科学基金(2025MS01028；2024LHMS01010)；内蒙古自治区直属高校基本科研业务费(NCYWT25002)；内蒙古财经大学 2024 年度高质量科研成果培育基金(GZCG24248)

作者简介： 孙艳军(1987—)，男，副教授，博士(E-mail：sunyanjun@ imufe.edu.cn)；
菅永军(1974—)，男，教授，博士，博士生导师(通信作者. E-mail：jianyj@ dhu.edu.cn).

引用格式： 孙艳军，贾北楠，长龙，菅永军. 非 Fourier 效应对垂直槽道中磁流体热对流不稳定性的影响[J]. 应用数学和力学，2026，**47**(10)：1286-1297.

mal convection instability was studied. Each physical quantity was decomposed into the form of a steady-state solution with a small perturbation, and the generalized eigenvalue problem of the perturbation equation was derived. Based on the linear stability theory, a coupled control equation set with the non-Fourier effect and the external magnetic field was established. The Chebyshev collocation method was used to solve the variation curves of the time growth rate with the wave numbers and the neutral stability curves, and the conditions and modal characteristics of flow instability under different parameters were systematically analyzed. The results show that, the Chandrasekhar number has a significant inhibitory effect on the instability of thermal convection. For a smaller Grashof number, the magnetic field effect on the thermal convection instability is more obvious. Both the Cattaneo number and the Prandtl number have a promoting effect on the thermal convection instability. Particularly, increasing the Cattaneo number will cause the neutral stability curve to give a significant wave response.

Key words: non-Fourier heat flux model; magnetohydrodynamic fluid; thermal convection instability; vertical channel; linear stability analysis

0 引　　言

Fourier 热传导定律作为连续介质力学中的基础性理论,深刻揭示了物质内部热量传递的物理机制.该定律定量刻画了热通量与温度梯度之间的关联: 在稳态传热过程中,单位面积的热流量正比于该位置处的温度变化率.因其在绝大多数常规热传导问题中展现出理论与实验的高度吻合性[1],该定律被公认为描述导热行为的经典模型.当结合能量守恒方程时,Fourier 定律将导出温度场的抛物型控制方程.这一数学形式隐含着一个重要物理推论: 介质内任意位置的初始热扰动会瞬间传递至全域所有质点,即热传播速率具有无穷大特性.此种无限快响应机制表明,温度梯度与热流矢量的时间延迟效应可被忽略.然而从微观物理本质看,Fourier 理论存在固有局限,因为热传导实质是载能粒子的迁移过程,其邻近粒子间的能量交换需消耗有限时间,即热松弛时间.因此严格而言,温度波在介质中的传播速度应为有限值.

近年来,大量的实验研究表明,传统的 Fourier 热传导定律在某些特殊情况下存在显著的局限性[2],这些特殊情况包括超低温环境[3]、极短时间尺度[4]和高热流密度情况[5]等.这些非常规热传导现象已成为学界持续聚焦的研究热点,直接推动了非 Fourier 导热模型的创新与发展.1867 年,Maxwell[6]在气体动力学研究中指出了 Fourier 热传导定律的瞬时局限性,并且首次建立了含有限弛豫时间的修正方程.20 世纪,相关研究取得了突破性进展: Tisza[3]在超低温实验中观测到液氦 Ⅱ 内热波以有限速率传播的现象.几年后,Peshkov[7]通过定量测量热波速证实了热量传播的有限速度特性,这一发现对 Fourier 瞬时传热假设提出了极大的挑战.1958 年 Cattaneo[8]与 Vernotte[9]引入温度梯度与热流间的相位滞后机制,将控制方程从抛物型修正为双曲型,奠定了经典非 Fourier 热传导理论框架.该理论将极端条件下偏离 Fourier 模型的热传导行为统称为非 Fourier 效应.2009 年,Christov[10]进一步采用上对流导数优化了这一理论模型,并发展出 Cattaneo-Christov 理论体系.

在过去的几十年里,许多学者从理论上研究了非 Fourier 效应在不同条件下的固体材料中的热传导[11-14].非 Fourier 热流效应驱动下的流体动力学研究近年来取得了显著进展.基于非 Fourier 传热定律,Straughan 等[15]揭示了双向加热条件下临界 Rayleigh 数的对流触发机制.Puri 等[16]通过求解 Stokes 两类问题,发现有限热松弛时间对温度和速度场的非一致性调控效应.在有限热对流领域,Stranges 等[17]构建了热通量-温度梯度瞬态响应模型,从理论上阐释了热松弛时间对热驱流动的影响机制.双扩散系统中,Hughes 等[18]证实了修正的 Fick 定律会诱发新型振荡模态,并且可以改变初始对流的波长.Eltayeb[19]创新性地引入了三类热通量时间导数,系统研究了水平层流在非 Fourier 效应下的线性和弱非线性稳定性.在工程应用方面,Khan 与 Alzahrani[20]使用 Cattaneo-Christov 热通量模型分析了非 Newton 纳米流体的双扩散行为,量化了拉伸表面流动中无量纲参数对传热传质的影响规律.最近,Niknami 等[21]和 Sun 等[22-23]在非 Fourier 效应条件下利用 Prandtl 数、Grashof 数和 Cattaneo 数揭示了垂直板间自然对流失稳的扰动演化机制.

当导电流体在磁场中运动时,由于电离气体具备导电特性,其流动行为就会受到磁场的显著影响.由于

磁流体动力学中的自然对流现象广泛存在于工业技术与地热能利用、核聚变能量转换中的高温等离子体、液态金属流动以及磁流体动力发电系统等多个关键领域,因而受到学术界的广泛关注[24-25].Narayana 等[26]研究了外加磁场对黏弹性流体层中双扩散对流的热质传输影响.Karcher 等[27]研究了垂直磁场在局部顶部加热的液态金属中对对流换热过程的作用机制.Fedoseyev 等[28]针对强静磁场环境下半导体熔体中的热对流行为开展了数值研究,并对三种不同的数值建模方法进行了系统比较.Umavathi 等[24]研究了在垂直通道内充满具有恒温壁条件的导电黏性流体的混合对流流动,并分析了温度相关黏度和温度相关热导率的综合影响.Li 等[29]利用 Boussinesq 近似研究了在外部磁场作用下旋转导电流体层的稳定性及动态转变.最近,Nayak 等[30]考查了各向异性热扩散率对旋转流体层中磁对流线性不稳定性和弱非线性稳定性的影响.Sangamesh 等[31]探讨了水平层中非 Newton Navier-Stokes-Voigt 流体在均匀垂直磁场和交叉扩散效应影响下的二维双扩散对流不稳定性.

尽管非 Fourier 热传导理论在固体材料科学和微纳尺度传热等领域已取得显著进展,但其在流体系统中的应用研究仍处于相对初级的探索阶段.特别是在垂直槽道中,浮性力效应、外磁场作用与非 Fourier 热传导的耦合作用机制,可能对热对流的演化结构产生重要影响.然而,当前绝大多数关于磁流体热对流稳定性的研究仍沿用经典 Fourier 热传导模型,这种简化处理忽略了热扰动传播的有限速度效应,可能导致对实际物理过程的预测存在系统性偏差.另一方面,与水平槽道中经典的 Rayleigh-Bénard 对流问题相比,垂直槽道中的热对流系统由于具有非零特征速度的基本流场,其动力学行为展现出更为复杂多变的物理现象.基于此,本文旨在系统探讨非 Fourier 热传导效应对垂直槽道中磁流体热对流不稳定性的影响机制.通过将非 Fourier 热传导模型引入到磁流体动力学控制方程中,建立了包含热松弛时间的完整线性扰动方程组,并研究了在不同无量纲参数下的对流失稳现象.

1 数 学 模 型

如图 1 所示,在非 Fourier 效应的影响下,二维 Newton 混合溶液在重力作用下自然地在垂直通道中流动.物理结构由直角坐标系 x^*Oz^* 来描述,原点 O 位于通道中间,并且 z^* 轴垂直向上.假设边界是不可渗透的,且分别位于 $x^*=-h^*/2$ 和 $x^*=h^*/2$ 处.流体层的左右边界分别保持在均匀但不同的温度 T_{L}^* 和 $T_{\mathrm{R}}^*(>T_{\mathrm{L}}^*)$ 下.假设流体层被沿 x^* 正方向强度为 H_0 的均匀外加磁场所贯穿.当流动趋于稳定后,会形成一个无限长的二维垂直薄层.由于存在水平温度梯度以及垂直方向的 Lorentz 力,在混合流体中会发生热量扩散,从而导致热对流现象.重力加速度由 $\boldsymbol{g}=-g\boldsymbol{e}_z$ 给出,其中 g 是其模,而 $\boldsymbol{e}_z$ 是沿 z^* 方向的单位矢量.

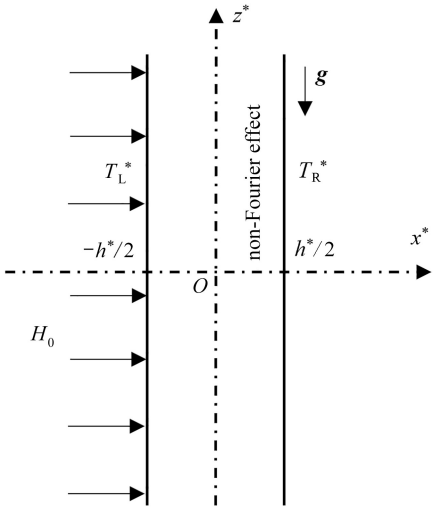


图 1 物理结构示意图

Fig. 1 Schematic of the physical configuration

使用通常的 Boussinesq 近似[32],假设流体的密度 ρ 与温度 T^* 呈线性变化的关系:

$$\rho=\rho_0[1-\alpha_T(T^*-T_0)], \tag{1}$$

其中 ρ_0 是在参考温度 $T_0=(T_R^*+T_L^*)/2$ 下的参考密度,α_T 是温度的体积热膨胀系数,流体的行为可以通过质量守恒、动量守恒、能量守恒方程来描述.在这种情况下,控制方程可以表示为

$$\nabla^*\cdot\boldsymbol{u}^*=0, \tag{2}$$

$$\rho_0(\boldsymbol{u}_{t^*}^*+\boldsymbol{u}^*\cdot\nabla^*\boldsymbol{u}^*)=-\nabla^*p^*-\rho g\boldsymbol{e}_z+\mu\nabla^{*2}\boldsymbol{u}^*+\boldsymbol{J}^*\times\boldsymbol{B}^*, \tag{3}$$

$$\rho_0 c_p(T_{t^*}^*+\boldsymbol{u}^*\cdot\nabla^*T^*)=-\nabla^*\cdot\boldsymbol{q}^*. \tag{4}$$

在磁场作用下的本构方程为

$$\boldsymbol{J}^*=\sigma(\boldsymbol{u}^*\times\boldsymbol{B}^*), \tag{5}$$

$$\boldsymbol{B}^*=\mu_m\boldsymbol{H}^*, \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{u}^*=(u^*,w^*)$ 表示速度,t^* 表示时间,p^* 表示压力,μ 是流体的动力学黏度,c_p 是常压下的比热容,T^* 是温度,$\boldsymbol{q}^*$ 是热流量向量,$\boldsymbol{J}^*$ 是电流密度,$\boldsymbol{B}^*$ 是磁感应强度向量,σ 是电导率,μ_m 是磁导率.由方程(3)、(5)和(6)可将动量方程改写为

$$\rho_0(\boldsymbol{u}_{t^*}^*+\boldsymbol{u}^*\cdot\nabla^*\boldsymbol{u}^*)=-\nabla^*p^*-(\rho g+\sigma\mu_m^2H_0^2\boldsymbol{u}^*)\boldsymbol{e}_z+\mu\nabla^{*2}\boldsymbol{u}^*. \tag{7}$$

壁面处的边界条件为:

当 $x^*=-h/2$ 时,

$$\boldsymbol{u}^*=\boldsymbol{0},\ T^*=T_L; \tag{8}$$

当 $x^*=h/2$ 时,

$$\boldsymbol{u}^*=\boldsymbol{0},\ T^*=T_R. \tag{9}$$

对于非 Fourier 效应影响下的流动问题,热流量的控制方程为[6]

$$\tau_q\frac{\delta\boldsymbol{q}^*}{\delta t^*}+\boldsymbol{q}^*=-k\nabla^*T^*, \tag{10}$$

其中 $\delta/\delta t^*$ 表示 Oldroyds 上对流导数, k 表示介质的热导率,τ_q 表示介质的热松弛时间,描述了温度场扰动后热通量恢复到新稳态所需的时间.当热松弛时间 $\tau_q=0$ 时,方程(10)就化简为经典的 Fourier 定律.在这里,我们采用 Christov[10] 提出的框架不变的热流发展模型:

$$\frac{\delta\boldsymbol{q}^*}{\delta t^*}=\frac{\partial\boldsymbol{q}^*}{\partial t^*}+\boldsymbol{u}^*\cdot\nabla^*\boldsymbol{q}^*-\boldsymbol{q}^*\cdot\nabla^*\boldsymbol{u}^*+\boldsymbol{q}^*\nabla^*\cdot\boldsymbol{u}^*. \tag{11}$$

为了简化问题,将热流向量改写为标量变量的形式,则可设 $F^*=\nabla^*\cdot\boldsymbol{q}^*$.将方程(11)代入方程(10)中,并对其两端进行散度运算,利用等式 $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\nabla\boldsymbol{b})=\nabla\boldsymbol{a}:\nabla\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\nabla(\nabla\boldsymbol{b})$ 我们可以得到关于 F^* 的本构方程为

$$\tau\left(\frac{\partial F^*}{\partial t^*}+\boldsymbol{u}^*\cdot\nabla^*F^*\right)=-F^*-k\nabla^{*2}T^*. \tag{12}$$

这样,方程(4)可以重新改写为

$$\rho_0 c_p(T_{t^*}^*+\boldsymbol{u}^*\cdot\nabla^*T^*)=-F^*. \tag{13}$$

引入如下的无量纲尺度:

$$\begin{cases} x=\dfrac{x^*}{h},\ z=\dfrac{z^*}{h},\ \boldsymbol{u}=\dfrac{\boldsymbol{u}^*}{\rho_0 g\alpha_T(T_R-T_L)h^2/\mu}, \\ p=\dfrac{p^*+\rho_0 g}{\rho_0 g\alpha_T(T_R-T_L)h},\ t=\dfrac{t^*}{\rho_0 h^2/\mu}, \\ \theta=\dfrac{T^*-T_0}{T_R-T_L},\ \boldsymbol{q}=\dfrac{\boldsymbol{q}^*}{k(T_R-T_L)/h},\ F=\dfrac{F^*}{k(T_R-T_L)/h^2}. \end{cases} \tag{14}$$

相关方程无量纲化后可得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{u}_t+Gr\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}=-\nabla p+\nabla^2\boldsymbol{u}+(\theta-Q\boldsymbol{u})\boldsymbol{e}_z, \tag{16}$$

$$\theta_t+Gr\boldsymbol{u}\cdot\nabla\theta=-\frac{1}{Pr}F, \tag{17}$$

$$CPrF_t + CPrGr\boldsymbol{u}\cdot\nabla F + F = -\nabla^2\theta. \tag{18}$$

相应地,边界条件为 $x = \pm 1/2$ 时,

$$\boldsymbol{u} = 0,\ \theta = \pm\frac{1}{2}. \tag{19}$$

在上述方程中,定义了以下无量纲参数:

$$Gr = \frac{g\alpha_T(T_R - T_L)h^3}{\nu^2},\ Pr = \frac{\nu}{\kappa},\ C = \frac{\tau_q\kappa}{h^2},\ Q = \frac{\sigma\mu_m^2 H_0^2 h^2}{\mu}, \tag{20}$$

其中 $\kappa = k/(\rho_0 c_p)$ 是热扩散系数, $\nu = \mu/\rho_0$ 是运动学黏度, Gr 是 Grashof 数, Pr 是 Prandtl 数, C 是 Cattaneo 数.Grashof 数是用于衡量自然对流过程中浮升力与黏性力的相对大小的无量纲数,常见于由温度差或密度差引起的流体运动中.Prandtl 数是用于描述流体中动量扩散能力与热扩散能力相对大小的无量纲参数.传热中的非 Fourier 效应由 Cattaneo 数 C 来表示,该数定义为热松弛时间与热扩散时间之比,当 $C = 0$ 时,表示热传导过程遵循 Fourier 定律.Q 是 Chandrasekhar 参数,描述磁场力与流体动力之间相对强度的无量纲参数,在磁流体力学中可以衡量磁场对导电流体运动的抑制能力.

2 基 本 解

假设在基本状态下运动是充分发展的、单向的、稳定的层流,并且与垂直坐标无关.在这种情况下,基本解可以表示为

$$u = \bar{u}(x) = 0,\ w = \bar{w}(x),\ p = \bar{p}(x),\ \theta = \theta(x),\ F = \bar{F}(x), \tag{21}$$

这里的上标横线表示基态状态.将方程(21)代入方程(15)—(18)中,对得到的常微分方程进行积分后,并结合边界条件(19)可以得出基本解为

$$\bar{u} = 0,\ \bar{w} = -\frac{\sinh\sqrt{Q}x}{2Q\sinh(\sqrt{Q}/2)} + \frac{1}{Q}x,\ \bar{\theta} = x,\ \bar{F} = 0. \tag{22}$$

3 线性稳定性分析

现在将小振幅扰动叠加到基本态上,然后研究系统的稳定性.利用无限小扰动叠加在完全发展的基本流基础上,可以将问题的解写成如下形式:

$$u = \bar{u} + u',\ w = \bar{w} + w',\ p = \bar{p} + p',\ \theta = \bar{\theta} + \theta',\ F = \bar{F} + F', \tag{23}$$

在这里上角标“′”表示这些量是微小扰动量.将方程(23)代入方程(15)—(18)中,将二阶以上小量忽略,只考虑一阶扰动的情况下可得到扰动方程组为

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \tag{24}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + Gr\bar{w}\frac{\partial u'}{\partial z} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}\right), \tag{25}$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + Gr\left(\frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}x}u' + \bar{w}\frac{\partial w'}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}\right) + \theta' - Qw', \tag{26}$$

$$Pr\frac{\partial\theta'}{\partial t} + PrGr\left(\frac{\mathrm{d}\bar{\theta}}{\mathrm{d}x}u' + \bar{w}\frac{\partial\theta'}{\partial z}\right) = -F', \tag{27}$$

$$CPr\frac{\partial F'}{\partial t} + CPrGr\bar{w}\frac{\partial F'}{\partial z} + F' = -\frac{\partial^2\theta'}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\theta'}{\partial z^2}. \tag{28}$$

对应的扰动边界条件为

$$u'\left(\pm\frac{1}{2}\right) = 0,\ w'\left(\pm\frac{1}{2}\right) = 0,\ \theta'\left(\pm\frac{1}{2}\right) = 0. \tag{29}$$

对于二维问题,引入流函数 $\psi(x,z)$, 使得满足连续性方程(24),则可设

$$u' = \frac{\partial \psi}{\partial z},\ w' = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{30}$$

将方程(30)代入方程(24)—(28)中,可得到以下微分方程:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial z} + Gr\bar{w}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3}\right), \tag{31}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} - Gr\left(\frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial \psi}{\partial z} - \bar{w}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}\right) = \frac{\partial p'}{\partial z} + \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial z^2}\right) - \theta' - Q\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{32}$$

$$Pr\frac{\partial \theta'}{\partial t} + PrGr\left(\frac{\mathrm{d}\bar{\theta}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial \psi}{\partial z} + \bar{w}\frac{\partial \theta'}{\partial z}\right) = -F', \tag{33}$$

$$CPr\frac{\partial F'}{\partial t} + CPrGr\bar{w}\frac{\partial F'}{\partial z} = -F' - \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \theta'}{\partial z^2}. \tag{34}$$

假设各扰动变量可以表示为

$$\begin{cases} \psi = \Psi(x)\mathrm{e}^{\omega t + \mathrm{i}az},\ p'(x,z,t) = \Pi(x)\mathrm{e}^{\omega t + \mathrm{i}az}, \\ \theta'(x,z,t) = \Theta(x)\mathrm{e}^{\omega t + \mathrm{i}az},\ F'(x,z,t) = \Gamma(x)\mathrm{e}^{\omega t + \mathrm{i}az}, \end{cases} \tag{35}$$

其中 a 为 z 方向的实波数.通常情况下,ω 是一个复数,即 $\omega = \omega_\mathrm{r} + \mathrm{i}\omega_\mathrm{i}$.当 $\omega_\mathrm{r} < 0$ 时,系统总是稳定的; 当 $\omega_\mathrm{r} > 0$ 时,系统将变得不稳定; 当 $\omega_\mathrm{r} = 0$ 时,系统处于中性稳定状态.将方程(35)代入方程(31)—(34)中,并消去 $\Pi(x)$ 和 $\Gamma(x)$,即可转变为常微分特征值问题:

$$\frac{\mathrm{d}^4 \Psi}{\mathrm{d}x^4} = (2a^2 + \omega + \mathrm{i}aGr\bar{w} + Q)\frac{\mathrm{d}^2 \Psi}{\mathrm{d}x^2} - \left(a^4 + a^2\omega + \mathrm{i}a^3 Gr\bar{w} + \mathrm{i}aGr\frac{\mathrm{d}^2\bar{w}}{\mathrm{d}x^2}\right)\Psi + \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}, \tag{36}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 \Theta}{\mathrm{d}x^2} = \mathrm{i}aPrGr\Omega\frac{\mathrm{d}\bar{\theta}}{\mathrm{d}x}\Psi + (\omega Pr\Omega + \mathrm{i}aPrGr\Omega\bar{w} + a^2)\Theta, \tag{37}$$

其中 $\Omega = CPr\omega + \mathrm{i}aCPrGr\bar{w} + 1$.相关的边界条件为 $x = \pm 1/2$ 时,

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0,\ \Theta = 0. \tag{38}$$

4　结果与讨论

接下来将对具有非 Fourier 效应的垂直槽道中磁流体热对流不稳定性进行分析和数值模拟.我们使用 Chebyshev 配置法来求解扰动方程的线性化形式.n 阶 Chebyshev 多项式可以表示为如下形式:

$$\xi_n(x) = \cos(n\cos^{-1}x),\ x_j = \cos\frac{\pi j}{N},\qquad j = 0,1,\cdots,N, \tag{39}$$

其中 x_j 是 Chebyshev 插值点, N 为任意正整数.各个场变量用 Chebyshev 多项式表示为

$$\Psi(x) = \sum_{n=0}^{N}\Psi_n\xi_n(x),\ \Theta(x) = \sum_{n=0}^{N}\Theta_n\xi_n(x). \tag{40}$$

方程(36)—(38)采用 Chebyshev 多项式进行离散化后可得到

$$\sum_{k=0}^{N}E_{jk}\Psi_k = (2a^2 + \omega + \mathrm{i}aGr\bar{w} + Q)\sum_{k=0}^{N}B_{jk}\Psi_k - \left(a^4 + a^2\omega + \mathrm{i}a^3 Gr\bar{w} + \mathrm{i}aGr\frac{\mathrm{d}^2\bar{w}}{\mathrm{d}x^2}\right)\Psi_j + \sum_{k=0}^{N}A_{jk}\Theta_k,\qquad j = 1,2,\cdots,N-1, \tag{41}$$

$$\sum_{k=0}^{N}B_{jk}\Theta_k = \mathrm{i}aPrGr\Omega\frac{\mathrm{d}\bar{\theta}}{\mathrm{d}x}\Psi_j + (\omega Pr\Omega + \mathrm{i}aPrGr\Omega\bar{w} + a^2)\Theta_j,\qquad j = 1,2,\cdots,N-1, \tag{42}$$

$$\Psi_0 = \Psi_N = 0,\ \Theta_0 = \Theta_N = 0,\ \sum_{k=0}^{N}A_{jk}\Psi_k = 0,\qquad j = 0,N, \tag{43}$$

其中

$$A_{jk}=\begin{cases}\dfrac{d_j(-1)^{k+j}}{d_k(x_j-x_k)}, & j\neq k,\\ \dfrac{x_j}{2(1-x_j^{\,2})}, & 1\leqslant j=k\leqslant N-1,\\ \dfrac{2N^2+1}{6}, & j=k=0,\\ -\dfrac{2N^2+1}{6}, & j=k=N,\end{cases}\tag{44}$$

$$B_{jk}=A_{jm}\cdot A_{mk},\ E_{jk}=B_{jm}\cdot B_{mk},\tag{45}$$

$$d_j=\begin{cases}2, & j=0,N,\\ 1, & 1\leqslant j\leqslant N-1.\end{cases}\tag{46}$$

方程式(41)、(42)可以归结为如下形式的广义特征值问题:

$$\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{X}+\omega\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}+\omega^2\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0},\tag{47}$$

其中 ω 和 $\boldsymbol{X}$ 分别为复特征值和特征函数,$\boldsymbol{A}_0$,$\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 是秩为 $2(N+1)$ 的复矩阵.将方程离散之后,使用 MATLAB 中计算广义特征值的函数 polyeig 进行数值计算.为开展具有理论价值的研究,本文选取了较宽范围的 Cattaneo 数、Grashof 数、Chandrasekhar 数和 Prandtl 数,系统分析了磁流体在垂直槽道中的热对流不稳定性.其中,Cattaneo 数 C 用于表征非 Fourier 效应,其取值范围为 $10^{-3}\sim10^{-2}$[21]; Grashof 数 Gr 反映了由温度差驱动的自然对流效应,取值范围为 3 000~16 000[21]; Chandrasekhar 数 Q 描述了磁场对流体运动的控制作用,取值范围为 1~10[31]; Prandtl 数 Pr 则反映了流体的动量与热扩散特性,其取值范围为 1~12[22].

表 1 当 $Gr=10\,000$, $Pr=1$, $C=0.001$, $Q=5$ 时,不同的 a 下的 ω_{r}

Table 1 The values of ω_{r} for different a values, $Gr=10\,000$, $Pr=1$, $C=0.001$, $Q=5$

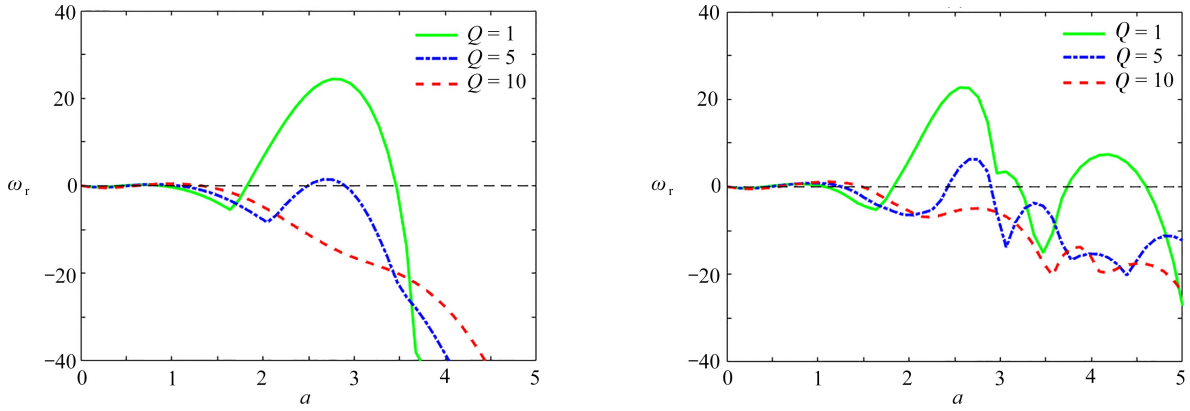
	$\omega_{\mathrm{r}}(Gr=10\,000,a=1)$	$\omega_{\mathrm{r}}(Gr=10\,000,a=2)$	$\omega_{\mathrm{r}}(Gr=10\,000,a=3)$
$N=20$	−22.918 371 34	−6.826 026 61	−0.191 428 25
$N=25$	−22.918 384 45	−6.825 883 89	−0.190 815 42
$N=30$	−22.918 384 16	−6.825 883 31	−0.190 812 63
$N=35$	−22.918 384 51	−6.825 883 05	−0.190 812 20
$N=40$	−22.918 382 58	−6.825 882 71	−0.190 811 00

表 1 通过改变 Chebyshev 多项式的阶数对数值计算的收敛性进行了分析.从表中可以看出,在对不同场变量(20~40)进行近似时,ω_{r} 的值呈现出一种稳定的特性,其大小并不依赖于 Chebyshev 多项式的阶数 N.计算结果的精度也相当可观,能够达到小数点后 5 位的有效数字,这充分证明了该方法在提供高精度近似方面的优势.因此,本文后续的结果都是基于 $N=30$ 计算得到的,这样可以保证在足够精度的同时,也兼顾计算的可行性与效率.

对于非 Fourier 热流模型下的磁流体,图 2 给出了当 $Pr=12$,$Gr=10\,000$ 时,不同的 Chandrasekhar 数 Q 下,时间增长率随着波数的变化图.当时间增长率 $\omega_{\mathrm{r}}>0$ 时,就会发生不稳定现象.从图中可以看出,当波数较小时,Chandrasekhar 数 Q 对系统的不稳定性几乎没有影响.随着波数的增大,磁场效应对系统不稳定性的影响逐渐增大,并且随着 Q 的增大,时间增长率的最大值在逐渐减小,整个系统逐渐向稳定的趋势发展.当 $Q=10$ 时,时间增长率降至零以下,这时整个流动都是稳定的状态.这些都说明了磁场效应具有抑制热对流不稳定性的作用.这一结论与 Narayana 等[26]给出的结果相一致.从物理的角度看,这是由于磁场通过 Lorentz 力对流体运动施加阻力作用,为克服此类阻力,系统需消耗更多能量,因而对流的发生被抑制,表现出明显的稳定化作用.因此,磁场可作为一种有效的调控手段,用于调节流体中的对流行为.

当 $Pr=12$, Cattaneo 数 C 分别为 0.001 和 0.002 时,在 a-Gr 平面上显示了不同 Chandrasekhar 数 Q 值下的中性稳定性曲线,如图 3 所示.这里舌形区域内为不稳定区域而舌形区域外为稳定区域.从图中可以看出,在其他参数固定的情况下,随着 Chandrasekhar 数 Q 的增大,中性稳定性曲线整体向上移动,从而临界 Gr 值逐渐变大.这意味着不稳定性区域会随着 Chandrasekhar 数 Q 的增大而减小.这一现象具有明确的物理意义,

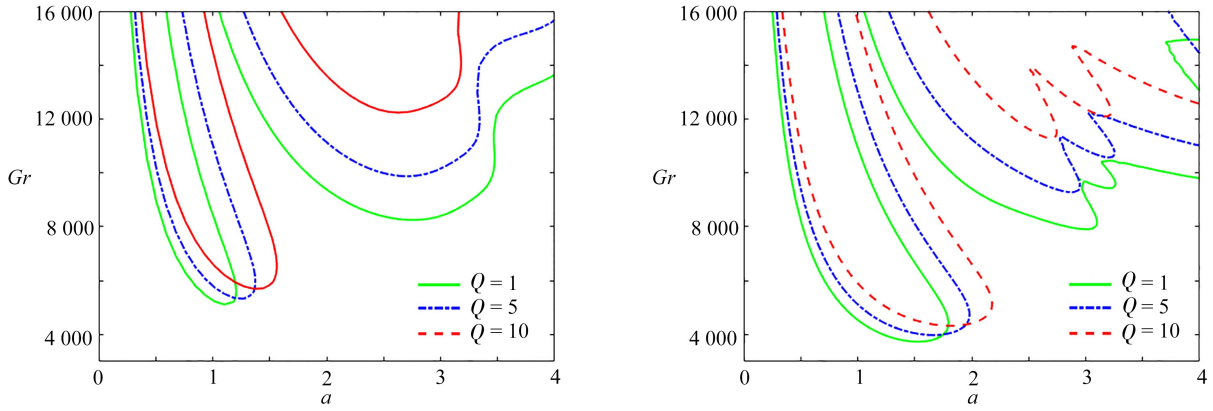
因为表征磁场强度的无量纲参数 Q 值越大,说明外加磁场越强,由此产生的 Lorentz 力对流体运动的抑制作用也越显著.因此,为了克服磁场的稳定化效应并激发流动失稳,系统就需要更强的浮力驱动,也就是需要更大的 Gr 数.这一结果与图 2 的结果相一致.另一方面,中性稳定曲线呈现出两个分支的形态,分别是左边的稳态模式和右边的振荡模式.在稳态模式下,流体的运动主要受浮力和黏性力的平衡所控制,不伴随明显的周期性或波动特性.该模式出现在相对较小的波数和较低的 Gr 数区域,是系统最早失稳的模式之一.振荡模式则伴随着明显周期性或波动行为,该模式在较大的波数和较高的 Gr 数区域更为显著.



(a) C = 0.01　　(b) C = 0.02

图 2　当 Pr = 12, Gr = 10 000 时,在不同的 Chandrasekhar 数 Q 下,时间增长率随着波数的变化图

Fig. 2　The temporal growth rates with the wave number at different values of Chandrasekhar Q for Pr = 12, Gr = 10 000



(a) C = 0.01　　(b) C = 0.02

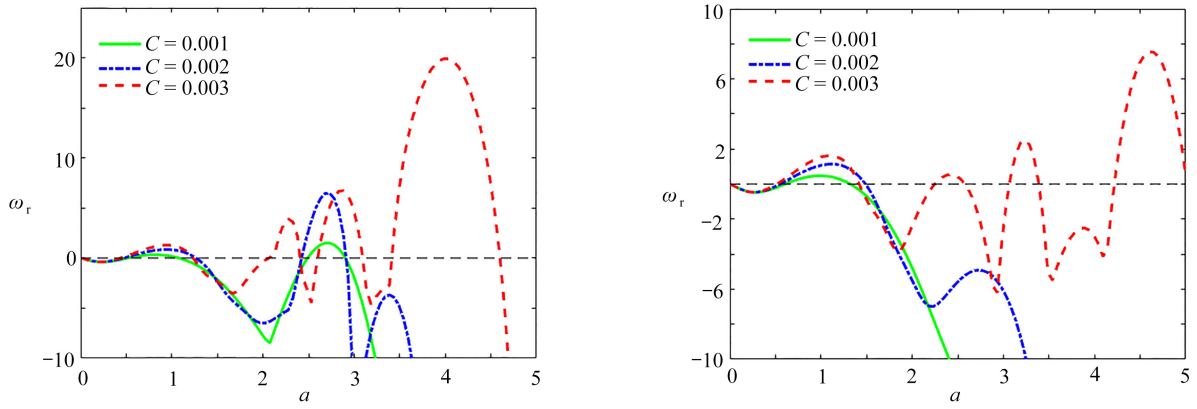
图 3　当 Pr = 12 时,中性稳定曲线 a-Gr 平面上随着不同的 Chandrasekhar 数 Q 值变化的图像

Fig. 3　The neutral stability curves in the a-Gr plane with diverse values of Chandrasekhar Q for Pr = 12

注　为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同.

当 Pr = 12, Gr = 10 000 时,图 4(a)和 4(b)分别给出了不同 Cattaneo 数 C 下,时间增长率随着波数的变化曲线图.从图中可以看出,时间增长率的最大值随着 Cattaneo 数 C 的增大而增大,这意味着非 Fourier 效应可以促进流动的不稳定性.Cattaneo 数是表征热传导过程中非 Fourier 效应强度的无量纲参数,其增大意味着系统中的热传递不再严格遵循经典的 Fourier 定律,而是呈现出具有有限传播速度的行为.这一现象导致局部温度扰动能够以更快的速度影响周围区域,从而在特定波数范围内增强流动的不稳定性.因此,非 Fourier 效应在一定条件下能够促进流动失稳,增强系统对扰动的响应能力,使得不稳定性更容易被激发.另一方面,比较图 4(a)和 4(b)可以发现,随着 Chandrasekhar 数 Q 的增大,不稳定性的发生在相对较大的波数下才会出现.进一步观察发现,随着波数的增加,时间增长率的整体水平呈现下降趋势.然而,只有在 Cattaneo 数较大,即非 Fourier 效应较强的情况下,高波数扰动才可能表现出正的时间增长率,从而引发不稳定性.这说明,虽然高波数扰动在一般情况下不易导致系统失稳,但在非 Fourier 效应显著增强的条件下,它们同样能够成

为不稳定的触发因素.

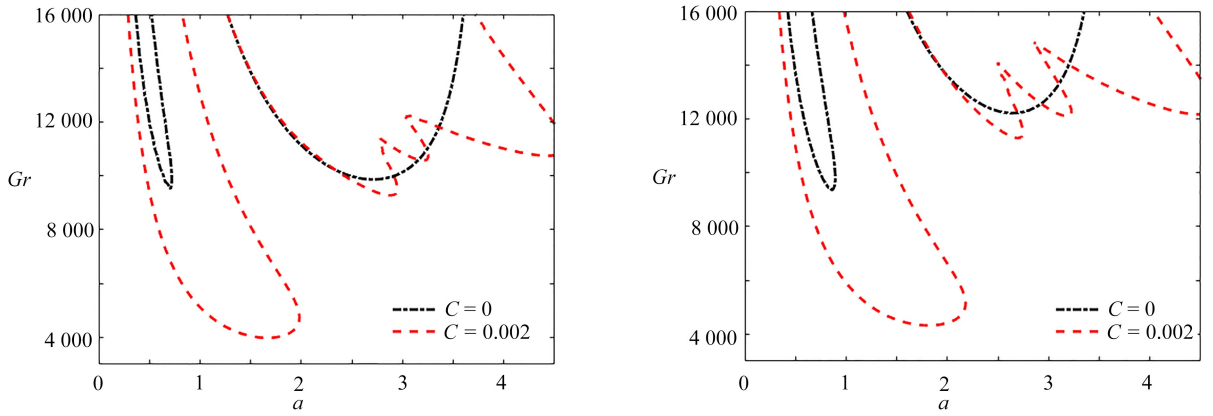


(a) Q = 5 (b) Q = 10

图 4 当 Pr = 12, Gr = 10 000 时,在不同的 C 下,时间增长率随着随波数的变化图

Fig. 4 The temporal growth rates with the wave number at different values of C for Pr = 12, Gr = 10 000

图 5 展示了中性稳定曲线在 a-Gr 平面上随不同 Cattaneo 数 C 取值的变化规律.图中黑色曲线对应 C = 0 的情况,表示此时热传导过程遵循经典的 Fourier 热传导定律.红色曲线则表示 C = 0.002 时的中性稳定曲线,反映了热传导过程中已引入非 Fourier 效应的影响.从图中可以观察到,在 Fourier 热传导的情况下,中性稳定曲线未出现波动特征; 而在非 Fourier 效应影响下,随着波数 a 的增大,中性稳定曲线逐渐呈现出显著的波动性响应特征,表明热传导过程出现热波特性,这是非 Fourier 效应影响下流动问题的典型表现.



(a) Q = 5 (b) Q = 10

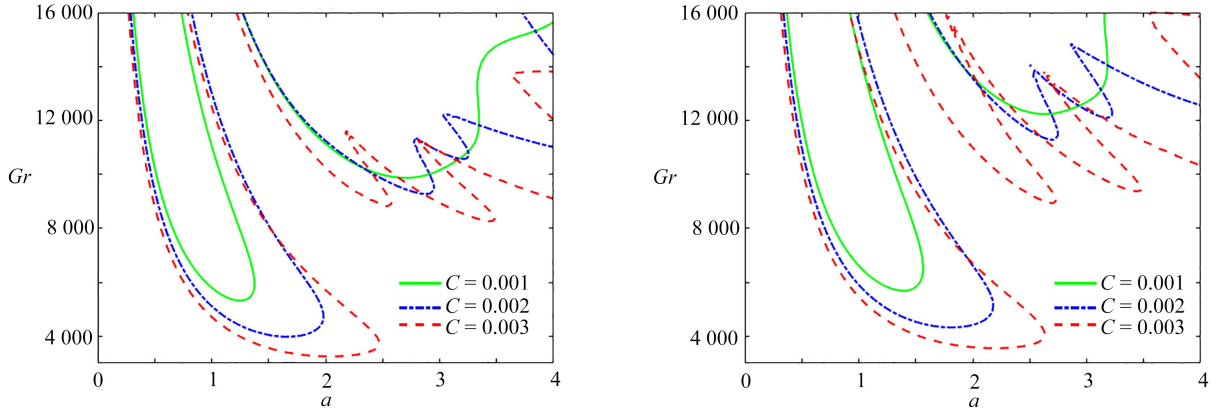
图 5 当 Pr = 12 时,中性稳定曲线在 a-Gr 平面上随着不同的 C 数的变化规律

Fig. 5 The laws of change for neutral stability curves in the a-Gr plane with diverse values of C for Pr = 12

为了更好地描述非 Fourier 效应对系统不稳定性的影响,图 6 给出了中性稳定曲线 a-Gr 平面随着不同的 Cattaneo 数 C 的变化曲线图.从图中可以看出,随着 C 的增大,中性稳定曲线在逐渐下移,说明临界 Gr 值在逐渐减小,这意味着系统在更低的浮力驱动强度下即可发生失稳现象.换句话说,非 Fourier 效应的增强降低了流动失稳的触发门槛,使得系统更容易被扰动所激发,从而促进了流动的不稳定性.这一结果与 Niknami 等[21]的结果相吻合.另一方面,当 Cattaneo 数 C 值较小时,中性稳定曲线几乎不发生波动响应.这意味着系统对扰动的响应主要以较为平稳的方式呈现,热传导过程接近瞬时响应.然而, 随着 Cattaneo 数 C 的逐渐增大, 中性稳定曲线开始展现出越来越显著的波动响应, 曲线的形状变得更加复杂, 并且出现了多个极值点和拐点.这种波动响应的增强意味着非 Fourier 效应通过引入热波动力学机制,改变了扰动演化的动力学过程,使得系统更容易激发复杂的失稳模式,进一步增强了流动的不稳定性.这些都说明了非 Fourier 效应对流动不稳定性具有促进作用.

图 7 给出了当 C = 0.001, Gr = 10 000 时,不同的 Prandtl 数 Pr 下时间增长率随着波数的变化曲线图.从图

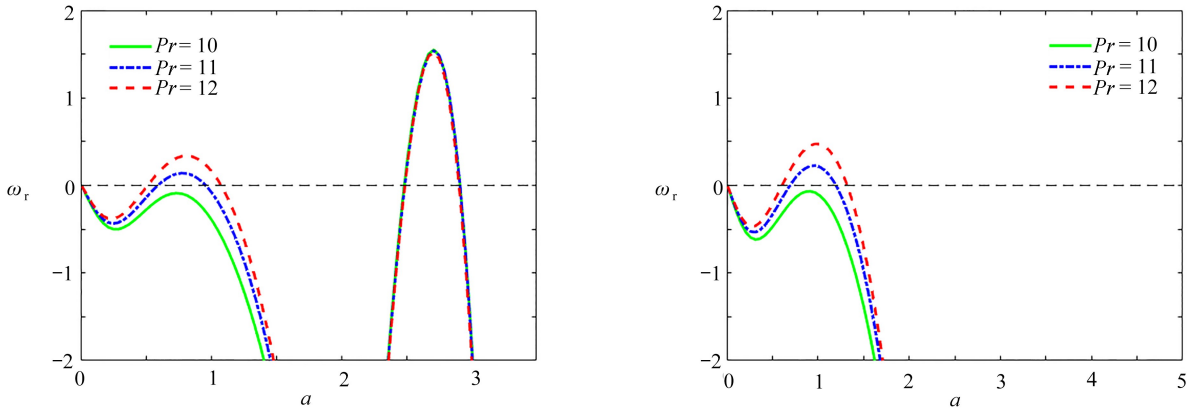
中可以看出,随着波数的增大,流动逐渐由稳定向不稳定的趋势发展.在较小的波数范围内,时间增长率普遍较低,呈现出负值状态,这意味着此时系统对这些长波扰动具有较强的抑制能力,流动处于相对稳定的状态.然而,随着波数的不断增加,时间增长率逐渐升高,并在波数大于 0.5 时转为正值.这表明在高频扰动下,系统容易受到扰动的影响,从而诱发流动失稳现象.进一步观察不同 Prandtl 数 Pr 下的变化情况可以发现,在小波数范围内,随着 Pr 的增大,时间增长率达到正值的区域逐渐扩大,这意味着 Prandtl 数对流动不稳定性具有促进作用.Prandtl 数是描述流体动量扩散能力与热扩散能力相对大小的无量纲参数,当 Pr 增大时,意味着流体的热扩散相对于动量扩散更快,从而增强了系统扰动的敏感性,更容易触发流动失稳.当波数继续增大时,如图 7(a),时间增长率的变化趋势不再随 Pr 的增大而继续扩张.这表明,在高波数扰动下, Pr 对流动稳定性的影响变得有限,系统的稳定性主要由其他物理机制所主导.另一方面,比较图 7(a)和 7(b)可以发现,当 Chandrasekhar 数 Q 增大到 10 的时候,较大波数范围内不存在大于 0 的时间增长率,仅在小波数范围内才可能发生对流不稳定性,流动的不稳定性被显著抑制.



(a) Q = 5　　(b) Q = 10

图 6　当 Pr = 12 时,中性稳定曲线在 a-Gr 平面上随着不同的 C 变化图

Fig. 6　The neutral stability curves in the a-Gr plane with diverse values of C for Pr = 12



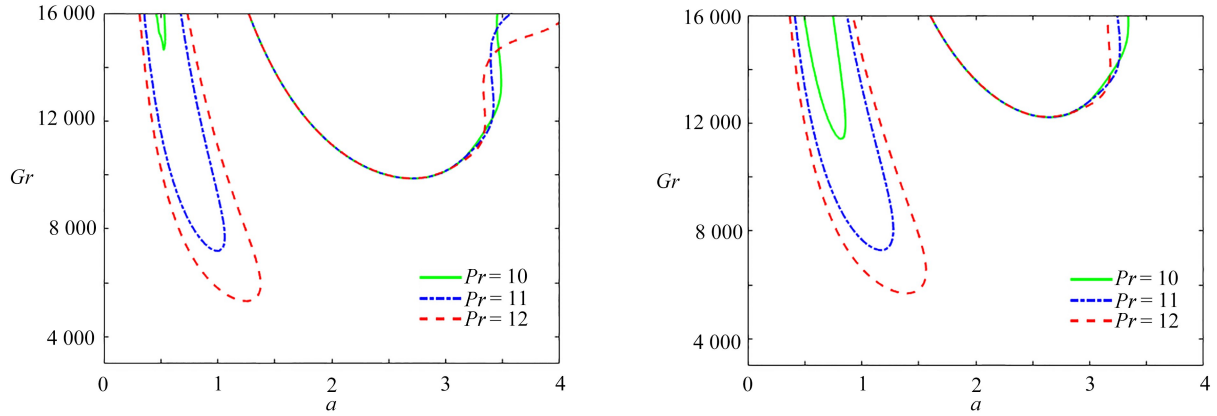
(a) Q = 5　　(b) Q = 10

图 7　当 C = 0.001, Gr = 10 000 时,在不同的 Pr 下,时间增长率随着随波数的变化图

Fig. 7　The temporal growth rates with the wave number at different values of Pr for C = 0.001, Gr = 10 000

图 8 聚焦于从中性稳定曲线的视角,探究了 Prandtl 数 Pr 对系统热对流不稳定性的影响机制.从图中可以看出,在小波数范围内, Pr 的增大会导致中性稳定曲线的临界 Gr 值逐渐减小.表明系统在更低的浮力驱动强度下即可通过长波模式发生不稳定性现象,这体现了 Pr 对不稳定性的促进作用.而在大波数范围内,临界 Gr 值几乎不受 Pr 变化的影响,说明短波扰动的失稳机制主要由非 Fourier 效应、磁场强度和几何边界条件所控制, Pr 的主导作用被弱化.这一发现可为实际工程应用中通过调控 Pr 和波数范围来精准控制流动失稳提供重要理论依据.同时,图 8 与图 7 结果的吻合进一步验证了参数间相互作用的一致性.特别的,结合 7

(b)和 8(b)可以发现,当 $Q = 10$ 且 $Gr < 10\,000$ 时,热对流不稳定性只会发生在小波数范围内,即磁场效应对热对流不稳定性的调控作用更加显著.



(a) $Q = 5$ (b) $Q = 10$

图 8 当 $C = 0.001$ 时,中性稳定曲线在 a-Gr 平面上随着不同的 Pr 的变化图

Fig. 8 The neutral stability curves in the a-Gr plane with diverse values of Pr for $C = 0.001$

5 结 论

本文研究了非 Fourier 热流模型下垂直槽道中的磁流体热对流不稳定性.将传统 Fourier 热传导模型加入一个包含热松弛时间的瞬态项,得到了非 Fourier 热传导方程.将小振幅扰动叠加在系统的基本状态上,研究了系统的稳定性.采用 Chebyshev 配置法求解了线性化扰动方程的解,并得到一个特征值问题.通过分析特征值问题的解,得到了相关参数与时间增长率的变化曲线以及中性稳定曲线的变化情况.数值计算结果表明:Chandrasekhar 数对系统不稳定性具有抑制作用.当 Grashof 数较小时,磁场效应对热对流不稳定性的调控作用更加明显.在 Fourier 热传导模式下,中性稳定曲线不会发生波动响应;而对于非 Fourier 效应影响下的流动问题,中性稳定曲线会发生明显的波动响应,并且随着 Cattaneo 数的增大中性稳定曲线显示出强烈的波动响应.Cattaneo 数和 Prandtl 数对系统的稳定性具有重要影响,这些参数值的增大会加速不稳定现象的发生.在小波数范围内,Prandtl 数对热对流不稳定性的影响更加显著.另一方面,中性稳定曲线呈现出典型的双模态结构,分别是左边的稳态模式和右边的振荡模式.

参考文献(References):

[1] Zhukovsky K V. Exact solution of Guyer-Krumhansl type heat equation by operational method[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2016, **96**: 132-144.

[2] Chen G. Ballistic-diffusive heat-conduction equations[J]. *Physical Review Letters*, 2001, **86**(11): 2297-2300.

[3] Tisza L. Transport phenomena in helium II[J]. *Nature*, 1938, **141**(3577): 913.

[4] Yilbas B S, Kalyon M. Analytical solution for pulsed laser heating process: convective boundary condition case[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2002, **45**(7): 1571-1582.

[5] Maurer M J, Thompson H A. Non-Fourier effects at high heat flux[J]. *Journal of Heat Transfer*, 1973, **95**(2): 284-286.

[6] Maxwell J C. IV: on the dynamical theory of gases[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1867, **157**: 49-88.

[7] Peshkov V. Second sound in helium II[J]. *Journal of Physics USSR*, 1944, **8**: 381.

[8] Cattaneo C. A form of heat-conduction equations which eliminates the paradox of instantaneous propagation [J]. *Comptes Rendus*, 1958, **247**: 431.

[9] Vernotte P. Les paradoxes de la theorie continue de l'equation de la chaleur[J]. *Comptes Rendus*, 1958, **246**: 3154.

[10] Christov C I. On frame indifferent formulation of the Maxwell-Cattaneo model of finite-speed heat conduction

[J]. *Mechanics Research Communications*, 2009, **36**(4): 481-486.

[11] Kundu B, Lee K S. A non-Fourier analysis for transmitting heat in fins with internal heat generation[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2013, **64**: 1153-1162.

[12] Abouelregal A E, Ahmad H. Thermodynamic modeling of viscoelastic thin rotating microbeam based on non-Fourier heat conduction[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2021, **91**: 973-988.

[13] Dong Y, Cao B Y, Guo Z Y. Temperature in nonequilibrium states and non-Fourier heat conduction[J]. *Physical Review E*, 2013, **87**(3): 032150.

[14] Xu B B, Gao X W, Cui M. High precision simulation and analysis of non-Fourier heat transfer during laser processing[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2021, **178**: 121574.

[15] Straughan B, Franchi F. Bénard convection and the Cattaneo law of heat conduction[J]. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* (*Section A*): *Mathematics*, 1984, **96**(1/2): 175-178.

[16] Puri P, Kythe P K. Nonclassical thermal effects in Stokes' second problem[J]. *Acta Mechanica*, 1995, **112**(1): 1-9.

[17] Stranges D F, Khayat R E, De Bruyn J. Finite thermal convection of non-Fourier fluids[J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 2016, **104**: 437-447.

[18] Hughes D W, Proctor M R E, Eltayeb I A. Maxwell-Cattaneo double-diffusive convection: limiting cases[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2021, **927**: A13.

[19] Eltayeb I A. Convective instabilities of Maxwell-Cattaneo fluids[J]. *Proceedings of the Royal Society A*: *Mathematical*, *Physical and Engineering Sciences*, 2017, **473**(2201): 20160712.

[20] Khan M I, Alzahrani F. Transportation of heat through Cattaneo-Christov heat flux model in non-Newtonian fluid subject to internal resistance of particles[J]. *Applied Mathematics and Mechanics* (*English Edition*), 2020, **41**(8): 1157-1166.

[21] Niknami M, Khayat R E. Thermal convection of a non-Fourier fluid in a vertical slot[J]. *Journal of Heat Transfer*, 2016, **138**(5): 052501.

[22] Sun Y, Jia B, Chang L, et al. Soret-driven convection of Maxwell-Cattaneo fluids in a vertical channel[J]. *European Journal of Mechanics B*, 2024, **107**: 17-28.

[23] Sun Y, Jia B, Jian Y. Convection instability of linear Oldroyd-B fluids in a vertical channel with non-Fourier heat flux model[J]. *Physics of Fluids*, 2024, **36**(6): 064116.

[24] Umavathi J C, Mohiuddin S, Sheremet M A. MHD flow in a vertical channel under the effect of temperature dependent physical parameters[J]. *Chinese Journal of Physics*, 2019, **58**: 324-338.

[25] 陈思思, 李许龙, 张超男, 等. 外磁场下不同液态金属双扩散对流的数值模拟[J]. 应用数学和力学, 2024, **45**(12): 1473-1482. (Chen Sisi, Li Xulong, Zhang Chaonan, et al. Numerical simulations of double-diffusive convection in different liquid metals under magnetic fields[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2024, **45**(12): 1473-1482. (in Chinese))

[26] Narayana M, Gaikwad S N, Sibanda P, et al. Double diffusive magneto-convection in viscoelastic fluids[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2013, **67**: 194-201.

[27] Karcher C, Kolesnikov Y, Andreev O, et al. Natural convection in a liquid metal heated from above and influenced by a magnetic field[J]. *European Journal of Mechanics B*: *Fluids*, 2002, **21**(1): 75-90.

[28] Fedoseyev K I, Kansa E J, Marin C, et al. Magnetic field suppression of semiconductor melt flow in crystal growth: comparison of three methods for numerical modeling[J]. *Japanese CFD Journal*, 2001, **9**: 325-333.

[29] Li L, Fan Y, Han D, et al. Dynamical transition and bifurcation of hydromagnetic convection in a rotating fluid layer[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2022, **112**: 106531.

[30] Nayak K, Rani H P, Rameshwar Y, et al. Weakly nonlinear analysis of rotating magnetoconvection with anisotropic thermal diffusivity effect[J]. *Physics of Fluids*, 2024, **36**(7): 076604.

[31] Sangamesh, Raghunatha K R, Shivakumara I S. Instability of double-diffusive magnetoconvection in a non-Newtonian fluid layer with cross-diffusion effects[J]. *Physics of Fluids*, 2024, **36**(8): 083122.

[32] Rajagopal K R, Ruzicka M, Srinivasa A R. On the oberbeck-Boussinesq approximation[J]. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 1996, **6**(8): 1157-1167.