

表面裂纹与任意杂质相互作用的半解析研究： 裂纹角度、杂质材质与位置效应的系统分析^{*}

杨博政^{1,2}, 宋恒旭^{1,3}, 李 璞⁴, 金晓清²

- (1. 中国科学院 力学研究所 超常环境非线性力学全国重点实验室, 北京 100190;
2. 重庆大学 航空航天学院, 重庆 400030;
3. 中国科学院大学 工程科学学院, 北京 100049;
4. 四川大学 空天科学与工程学院 空间先进机构与智能飞行器教育部重点实验室,
机器人卫星四川省国防科技重点实验室, 成都 610065)

(本刊青年编委宋恒旭来稿)

摘要: 本文围绕半平面中表面裂纹与任意形状杂质的相互作用行为, 基于数值等效夹杂法与分布位错技术构建了统一的半解析求解框架, 并通过一系列算例系统评估了裂纹角度、杂质材质以及杂质位置对应力强度因子与局部应力场的影响规律。算例结果表明: 裂纹角度的变化会显著改变裂尖附近的应力分布特征, 倾斜裂纹产生更强的模式耦合; 杂质材质对相互作用效应高度敏感, 硬质杂质使 I 型应力强度因子减小、II 型应力强度因子增大, 而软质杂质则表现出相反趋势; 随着杂质逐渐远离自由边界, 其对裂尖的扰动作用明显减弱。所有算例的半解析计算结果均与有限元解保持良好一致, 应力强度因子误差小于 4.5%, 验证了所建半解析框架的可靠性。上述算例研究揭示了多因素耦合作用下裂纹-杂质相互作用的主要规律, 可为复杂材料与结构中损伤演化机理的分析提供有价值的参考。

关键词: 表面裂纹; 杂质; 半解析方法; 应力强度因子

中图分类号: O34 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.460204

A Semi-Analytical Study of the Interaction Between Surface Cracks and Arbitrary Inhomogeneities: Systematic Analysis of Crack Angles, Material Contrasts, and Positional Effects

Yang Bozheng^{1,2}, Song Hengxu^{1,3}, Li Pu⁴, Jin Xiaoqing²

- (1. *State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Science, Beijing 100190, P.R. China;*
2. *College of Aerospace Engineering, Chongqing University, Chongqing 400030, P.R. China;*
3. *School of Engineering Science, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, P.R. China;*

^{*} 收稿日期: 2025-11-17; 修订日期: 2025-12-08

基金项目: 中国科学院战略先导 B 类项目 (XDB0620101); 国家自然科学基金 (52205192; 52575201; 12502114)

作者简介: 杨博政 (2002—), 男, 博士生 (E-mail: ybz468947778@163.com);

宋恒旭 (1988—), 男, 研究员, 博士 (通信作者, E-mail: songhengxu@imech.ac.cn)。

引用格式: 杨博政, 宋恒旭, 李璞, 金晓清. 表面裂纹与任意杂质相互作用的半解析研究: 裂纹角度、杂质材质与位置效应的系统分析[J]. 应用数学和力学, 2026, 47(8): 978-989.

4. *Key Laboratory of Advanced Spatial Mechanism and Intelligent Spacecraft (Ministry of Education),
Robotic Satellite Key Laboratory of Sichuan Province, School of Aeronautics and Astronautics,
Sichuan University, Chengdu 610065, P.R. China)*

(Contributed by Song Hengxu, Member of the Youth Editorial Board of AMM)

Abstract: A unified semi-analytical framework combining the numerical equivalent inclusion method (NEIM) and the distributed dislocation technique (DDT) was employed to investigate the interaction between surface cracks and arbitrarily shaped inhomogeneities in a half-plane. Several representative examples were simulated to systematically examine the effects of crack angles, inhomogeneity stiffnesses, and the inhomogeneity distances from the free surface on the stress intensity factors and local stress fields. The results show that, the crack angle leads to notable changes in the crack-tip field and induces pronounced mode coupling. Stiff inhomogeneities decrease Mode I stress intensity factor but increase Mode II, whereas soft inhomogeneities exhibit the opposite trend. As the inhomogeneity moves farther from the free surface, its perturbation to the crack-tip field becomes significantly weaker. The semi-analytical results agree well with the finite element solutions, with discrepancies below 4.5%, demonstrating the accuracy and efficiency of the present framework. The numerical examples provide clear insight into the dominant mechanisms governing crack-inhomogeneity interaction under multiple influencing parameters.

Key words: surface crack; inhomogeneity; semi-analytical method; stress intensity factor

0 引 言

表面裂纹是工程结构最常见且危害性最强的损伤形式之一,广泛存在于涂层、薄膜及表面强化材料中。在载荷作用下,表面裂纹极易萌生并沿界面或自由表面扩展,最终导致结构失效。另一方面,实际材料的微观组织往往并非理想均匀体,其内部或表面附近普遍存在孔洞、夹杂、第二相颗粒等杂质^[1]。这些杂质会显著改变局部应力场分布,对裂纹尖端的应力强度因子产生影响。深入理解表面裂纹与杂质的相互作用机理,对于揭示材料的微观断裂行为和指导耐损伤微结构设计具有重要理论意义和工程应用价值。

在早期的相关研究中,Tamate^[2]基于 Muskhelishvili 提出的复变函数理论方法^[3],对含圆形夹杂的材料中直裂纹附近的应力分布进行了分析。随后,Gdoutos^[4]进一步探讨了裂纹与圆形夹杂之间的耦合效应,并结合最小应变能密度准则推导出了应变能密度因子及其对应的临界断裂应力。除了复变函数法外,等效夹杂法(equivalent inclusion method, EIM)^[5]在求解规则几何形状夹杂问题时也展现出较好的适用性和精度^[6-9]。利用该方法,Li 和 Chen^[10]研究了 I 型裂纹与圆形及层状夹杂的相互作用规律,并获得了裂纹尖端的应力强度因子(SIFs)。在此基础上,Yang 等^[11]对 II 型裂纹与不同规则形状夹杂(如矩形、三角形等)的相互作用进行了进一步分析,揭示了夹杂形状对 SIFs 变化规律的影响。然而对于解析方法而言,当杂质形状复杂或者裂纹为任意长度和角度时,处理起来就十分困难。

除了上述的解析方法外,Lal 等^[12]利用扩展有限元方法(XFEM)研究了不同材质的圆形夹杂对表面裂纹产生的影响。Li 等^[13]通过将有限元(FEM)与实验进行对比,研究了圆形杂质与表面裂纹的相互作用,并预测裂纹接近和穿透杂质的速度。Lipetzky 和 Schmauder^[14]通过平面应变有限元方法研究了夹杂尺寸和形状对表面裂纹应力强度因子产生的影响。此外,Nguyen 等^[15]基于三维微结构的真实几何,提出了一种能够同时刻画界面损伤与裂纹扩展相互作用的相场法(phase-field method)。该方法通过相场变量平滑地描述裂纹的演化过程,有效模拟裂纹与夹杂、界面等异质结构之间的复杂相互作用。在此基础上^[15],Kumar 和 Sain^[16]构建了一种热-黏弹耦合的纤维增强聚合物复合材料断裂统一相场模型,结合实验讨论了裂纹与界面损伤的相互作用;Bian 等^[17]进一步引入方向能量分解与修正韧性法,构建了适用于混合模式界面-体裂纹扩展的自适应相场-内聚力模型,使裂纹在逼近硬质或软质夹杂时自动偏折,从而定量再现裂纹-夹杂相互作用导致的增韧或脆化效应。尽管有限元和相场方法可以处理具有复杂几何形状的夹杂问题,但面对多个夹杂相互作用问题时,精细化的单元离散会导致计算规模急剧上升,因此建立一种解析方法或半解析方法仍具有重要的意义。

本研究在分布位错技术(distributed dislocation technique, DDT)与数值等效夹杂法(numerical equivalent inclusion method, NEIM)的基础上构建了表面裂纹-杂质相互作用的半解析求解框架.随后本文重点通过一系列具有代表性的算例,系统考察裂纹角度、杂质材质以及杂质与自由边界的相对位置对应力强度因子和局部应力场的影响规律.通过对比不同算例的响应特征,揭示多因素耦合作用下裂纹-杂质相互作用的主要力学机理,并进一步评估半解析结果与有限元解的一致性.该算例研究不仅展示了本文方法在处理任意形状杂质和不同裂纹参数方面的适用性,也为理解复杂复合材料中的损伤演化提供了系统性的参考.

1 基于 DDT 的表面裂纹模型的建立

DDT^[18-19]将裂纹建模成一组具有未知分布密度的位错,通过求解未知密度的大小从而来求解裂纹问题.对于如图 1 所示的表面裂纹模型,由所有位错在裂纹表面产生的应力矢量可以表示为

$$\begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{22}(\zeta, \xi) \\ \tilde{\sigma}_{12}(\zeta, \xi) \end{bmatrix} = C \int_0^a \begin{bmatrix} \tilde{G}_{122}(\zeta, \xi) & \tilde{G}_{222}(\zeta, \xi) \\ \tilde{G}_{112}(\zeta, \xi) & \tilde{G}_{212}(\zeta, \xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B}_1(\xi) \\ \tilde{B}_2(\xi) \end{bmatrix} d\xi, \quad (1)$$

式中, ζ 和 ξ 分别表示以裂纹中心为坐标原点,沿裂纹面方向为 x 轴建立的局部坐标系下的场点位置和位错所在位置; $\tilde{\sigma}_{ij}$ 表示位错在裂纹表面产生的应力; C 为系数,表示为 $C = 2\mu_1/(\pi(\kappa_1 + 1))$, 其中 μ_1 和 κ_1 分别为基体的剪切模量和 Kolosov 常数; a 表示裂纹长度; $\tilde{B}_k(\xi)$ ($k = 1, 2$) 表示位错的分布密度; $\tilde{G}_{ijk}$ 表示局部坐标系下的位错影响系数,可以表示为

$$\begin{bmatrix} \tilde{G}_{111}(\zeta, \xi) & \tilde{G}_{211}(\zeta, \xi) \\ \tilde{G}_{122}(\zeta, \xi) & \tilde{G}_{222}(\zeta, \xi) \\ \tilde{G}_{112}(\zeta, \xi) & \tilde{G}_{212}(\zeta, \xi) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \sum_{i=1}^2 \begin{bmatrix} G_{111}^{(i)}(m, n, k, l) & G_{211}^{(i)}(m, n, k, l) \\ G_{122}^{(i)}(m, n, k, l) & G_{222}^{(i)}(m, n, k, l) \\ G_{112}^{(i)}(m, n, k, l) & G_{212}^{(i)}(m, n, k, l) \end{bmatrix} \mathbf{B}, \quad (2)$$

其中, (m, n) 和 (k, l) 分别表示全局坐标系下场点位置和位错所在位置,其与从 x 轴正半轴沿逆时针到裂纹面走过的角度 θ 有关 ($-90^\circ < \theta < 90^\circ$); $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别表示为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin(2\theta) \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin(2\theta) \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos(2\theta) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (3)$$

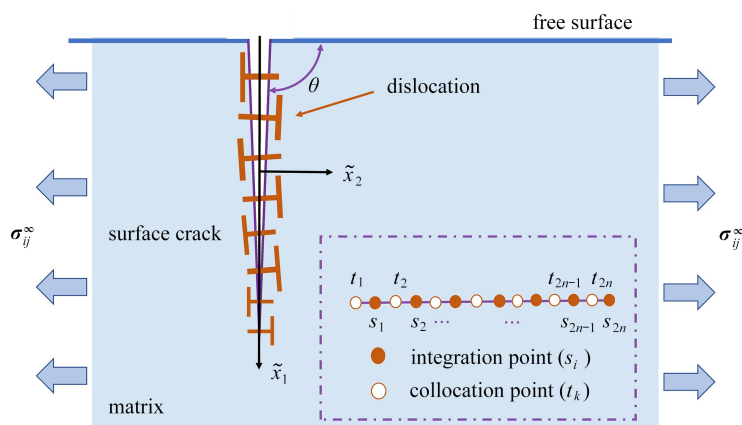


图 1 DDT 求解表面裂纹示意图

Fig. 1 Schematic diagram of solving a surface crack using DDT

此外, $G_{ijk}^{(1)}$ 和 $G_{ijk}^{(2)}$ 表示全局坐标系下位错的半平面影响系数分量^[18,20],可以表示为

$$G_{111}^{(1)}(m, n, k, l) = (n - l) \left(-\frac{1}{r_1^2} - \frac{2x_1^2}{r_1^4} \right), \quad (4a)$$

$$G_{122}^{(1)}(m, n, k, l) = (n - l) \left(-\frac{1}{r_1^2} + \frac{2x_1^2}{r_1^4} \right), \quad (4b)$$

$$G_{112}^{(1)}(m, n, k, l) = -\frac{1}{r_1^2} + \frac{2x_1^3}{r_1^4}, \quad (4c)$$

$$G_{211}^{(1)}(m, n, k, l) = -\frac{1}{r_1^2} + \frac{2x_1^3}{r_1^4}, \quad (4d)$$

$$G_{222}^{(1)}(m, n, k, l) = \frac{3x_1}{r_1^2} - \frac{2x_1^3}{r_1^4}, \quad (4e)$$

$$G_{212}^{(1)}(m, n, k, l) = (n-l) \left(-\frac{1}{r_1^2} + \frac{2x_1^2}{r_1^4} \right), \quad (4f)$$

$$G_{111}^{(2)}(m, n, k, l) = (n-l) \left(\frac{1}{r_2^2} + \frac{2x_2^2}{r_2^4} - \frac{4kx_2}{r_2^4} + \frac{4k^2}{r_2^4} + \frac{16kx_2^3}{r_2^6} - \frac{16k^2x_2^2}{r_2^6} \right), \quad (5a)$$

$$G_{122}^{(2)}(m, n, k, l) = (n-l) \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{2x_2^2}{r_2^4} + \frac{12kx_2}{r_2^4} - \frac{4k^2}{r_2^4} - \frac{16kx_2^3}{r_2^6} + \frac{16k^2x_2^2}{r_2^6} \right), \quad (5b)$$

$$G_{112}^{(2)}(m, n, k, l) = \frac{x_2}{r_2^2} - \frac{2k}{r_2^2} - \frac{2x_2^3}{r_2^4} + \frac{16kx_2^2}{r_2^4} - \frac{12k^2x_2}{r_2^4} - \frac{16kx_2^4}{r_2^6} + \frac{16k^2x_2^3}{r_2^6}, \quad (5c)$$

$$G_{211}^{(2)}(m, n, k, l) = \frac{x_2}{r_2^2} - \frac{2k}{r_2^2} - \frac{2x_2^3}{r_2^4} - \frac{8kx_2^2}{r_2^4} + \frac{12k^2x_2}{r_2^4} + \frac{16kx_2^4}{r_2^6} - \frac{16k^2x_2^3}{r_2^6}, \quad (5d)$$

$$G_{222}^{(2)}(m, n, k, l) = \frac{3x_2}{r_2^2} - \frac{2k}{r_2^2} + \frac{2x_2^3}{r_2^4} + \frac{16kx_2^2}{r_2^4} - \frac{12k^2x_2}{r_2^4} - \frac{16kx_2^4}{r_2^6} + \frac{16k^2x_2^3}{r_2^6}, \quad (5e)$$

$$G_{212}^{(2)}(m, n, k, l) = (n-l) \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{2x_2^2}{r_2^4} - \frac{4kx_2}{r_2^4} + \frac{4k^2}{r_2^4} + \frac{16kx_2^3}{r_2^6} - \frac{16k^2x_2^2}{r_2^6} \right), \quad (5f)$$

其中, $x_1 = m - k, x_2 = m + k, r_1^2 = x_1^2 + (n-l)^2, r_2^2 = x_2^2 + (n-l)^2$.

从式(4a)~(4f)可以看出,当 $m = k$ 时,方程会表现出奇异性,对问题进行数值解析求解存在困难,因此考虑适用配点法来对问题进行简化求解.首先需要对位错密度函数进行重新考虑,对于表面裂纹而言,其位错密度函数是一端自由,一端奇异,所以可以重新表示为

$$\begin{cases} B(s_i) = w(s_i)\phi(s_i), \\ w(s_i) = \sqrt{\frac{1+s_i}{1-s_i}}, \end{cases} \quad (6)$$

其中, $\phi(s_i)$ 表示新的未知函数; s_i 表示分布在裂纹表面的积分点,可以表示为

$$s_i = \cos\left(\pi \frac{2i-1}{2N+1}\right), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (7)$$

同时在裂纹表面还存在 N 个配点 t_k , 表示为

$$t_k = \cos\left(\pi \frac{2k}{2N+1}\right), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (8)$$

根据式(6)和(8),则表面裂纹表面应力矢量满足的控制方程(1)可以重新表示为

$$\begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{22}(t_k, s_i) \\ \tilde{\sigma}_{12}(t_k, s_i) \end{bmatrix} = \frac{aC}{2} \sum_{i=1}^N W(s_i) \begin{bmatrix} \tilde{G}_{122}(t_k, s_i) & \tilde{G}_{222}(t_k, s_i) \\ \tilde{G}_{112}(t_k, s_i) & \tilde{G}_{212}(t_k, s_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(s_i) \\ \phi_2(s_i) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

其中, $W(s_i)$ 表示权重,表示为 $W(s_i) = 2(1+s_i)/(2N+1)$.

2 基于 NEIM 的杂质模型的建立

对于由材料内部的杂质引起的材料非线性问题,英国学者 Eshelby 提出了 EIM^[5,21],其基本原理是将杂质非线性问题分解成两个问题进行求解,一个是在没有杂质的情况下材料内部的均匀材料解;另一个是等效

夹杂解,将杂质等效成具有本征应变 ε^* 的杂质问题来处理.然而 EIM 在求解任意形状夹杂时存在困难,为此有学者在 EIM 的基础上提出了求解任意形状杂质的 NEIM^[19-20,22-23].如图 2 所示,NEIM 将不规则的杂质离散成若干的矩形夹杂单元,由于矩形单元的尺寸够小,所以可以假设每个矩形夹杂单元的等效本征应变 ε^* 是均匀的,因此最终的结果可以由所有的矩形夹杂单元进行叠加而得到.

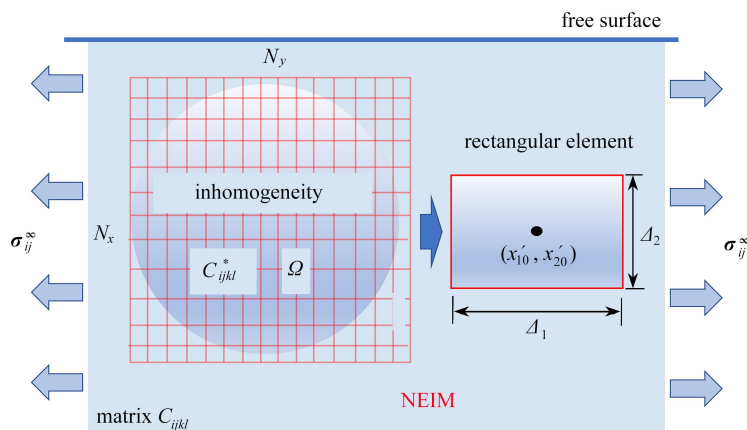


图2 NEIM 求解杂质问题示意图

Fig. 2 Schematic of solving inhomogeneity using NEIM

根据 EIM,在每个矩形夹杂单元内部建立等效应力和应变条件:

$$C_{ijkl}^*(\varepsilon_{kl}^0 + S_{klmn}\varepsilon_{mn}^p + \varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p) = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl}^0 + S_{klmn}\varepsilon_{mn}^p + \varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p - \varepsilon_{kl}^*), \quad E_2 \leq E_1, \quad (10)$$

$$M_{ijkl}^*(\sigma_{kl}^0 + T_{klmn}\varepsilon_{mn}^p + \sigma_{kl}) = M_{ijkl}(\sigma_{kl}^0 + T_{klmn}\varepsilon_{mn}^p + \sigma_{kl}) + \varepsilon_{ij}^*, \quad E_2 > E_1, \quad (11)$$

其中, E_1 和 E_2 分别是基体和杂质的弹性模量; C_{ijkl}^* 和 C_{ijkl} 分别是杂质和基体材料的刚度模量,而 M_{ijkl}^* 和 M_{ijkl} 则分别是杂质和基体材料的柔度模量; ε_{kl}^0 和 σ_{kl}^0 分别是均匀应变解和均匀应力解; ε_{mn}^p 是材料的初始本征应变,如热膨胀和相变; ε_{ij}^* 是等效本征应变;在式中最重要的是 S_{klmn} 和 T_{klmn} , 分别为矩形夹杂的 Eshelby 应变张量和应力张量,以新的记号方式^[24-25]可以表示为

$$S_{ijkl} = \frac{-1}{8\pi(1-\nu_1)} \left\{ s_{ijkl}^{(0)} \left[x'_{10}, x'_{20}; \Delta_1, \Delta_2 \right] + \sum_{z=1}^3 x_2^{z-1} s_{ijkl}^{(z)} \left[x'_{10}, -x'_{20}; \Delta_1, \Delta_2 \right] \right\}, \quad (12)$$

$$T_{ijkl} = \frac{-\mu_1}{4\pi(1-\nu_1)} \left\{ t_{ijkl}^{(0)} \left[x'_{10}, x'_{20}; \Delta_1, \Delta_2 \right] + \sum_{z=1}^3 x_2^{z-1} t_{ijkl}^{(z)} \left[x'_{10}, -x'_{20}; \Delta_1, \Delta_2 \right] \right\}, \quad (13)$$

其中, $s_{ijkl}^{(0)}$ 和 $t_{ijkl}^{(0)}$ 是矩形夹杂的全平面应变和应力分量, $s_{ijkl}^{(z)}$ 和 $t_{ijkl}^{(z)}$ 则是与半平面有关的应变和应力分量.上述分量是可以在先前工作^[26-27]中得到解析解.如图 2 所示, (x'_{10}, x'_{20}) 是矩形夹杂单元的中心坐标; Δ_1 和 Δ_2 则分别是矩形杂质的边长.

在式(10)和(11)中还存在由杂质引起的扰动应力 σ_{ij} 和扰动应变 ε_{ij} .它们与等效后的等效本征应变 ε_{ij}^* 和应力、应变张量有关:

$$\sigma_{ij} = T_{ijkl}\varepsilon_{kl}^*, \quad (14)$$

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\varepsilon_{kl}^*. \quad (15)$$

结合式(10)~(15),式中的未知量只有等效本征应变 ε_{ij}^* .当引入确定的均匀材料解时,可以通过式(10)和(11)来不断对等效本征应变进行迭代,直到达到设定的迭代条件.NEIM 可以对多个杂质进行处理且不受杂质形状复杂性的限制.同时值得注意的是,由于只需要对杂质所在位置进行数值离散,所以避免了计算时间的赘余.

3 表面裂纹-夹杂模型的耦合

受到沿 x 方向轴向载荷 $\sigma_{ij}^\infty = [\sigma_{11}^\infty \ 0 \ 0]^T$ 的基体中存在一段表面裂纹,其长度为 a , 起始位置为 $(x_1, 0)$, 与 x 轴正半轴成 θ 角.在杂质不远处存在多个任意形状的杂质 $\Omega_I (I = 1, 2, \dots, n)$, 它们具有相同的弹性

常数 C_{ijkl}^* .基体的弹性常数可以记为 C_{ijkl} .针对上述问题,假设由杂质产生的扰动应力和应变记为 σ_{ij} 和 ε_{ij} ;由裂纹产生的应力和应变记为 σ_{ij}^C 和 ε_{ij}^C , 则对于裂纹而言

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{22} + (\sigma_{22} + \sigma_{22}^\infty) \cos^2 \theta + (\sigma_{11} + \sigma_{11}^\infty) \sin^2 \theta - (\sigma_{12} + \sigma_{12}^\infty) \sin \theta \cos \theta = 0, \\ \tilde{\sigma}_{12} + (\sigma_{22} + \sigma_{22}^\infty) \sin \theta \cos \theta - (\sigma_{11} + \sigma_{11}^\infty) \sin \theta \cos \theta + (\sigma_{12} + \sigma_{12}^\infty) \cos^2 \theta = 0; \end{cases} \quad (16)$$

对于杂质而言

$$\begin{cases} C_{ijkl}^*(\varepsilon_{kl}^\infty + \varepsilon_{kl}^C + \varepsilon_{kl}) = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl}^\infty + \varepsilon_{kl}^C + \varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^*), \\ M_{ijkl}^*(\sigma_{kl}^\infty + \sigma_{kl}^C + \sigma_{kl}) = M_{ijkl}(\sigma_{kl}^\infty + \sigma_{kl}^C + \sigma_{kl}) + \varepsilon_{ij}^*. \end{cases} \quad (17)$$

从而,得到了求解表面裂纹-杂质相互作用问题的最终方程.式(16)中仅存未知量为 $\tilde{\sigma}_{ij}$, 且可以通过式(1)来进行联立求解.可得到如下矩阵形式的方程:

$$\Xi = \Psi \times X, \quad (18)$$

其中, X 为未知量, Ψ 为系数矩阵.针对上述线性代数方程组,本文引入共轭梯度法(conjugate gradient method, CGM)^[19-20,28]来进行迭代求解.CGM 不仅能显著提高计算效率,还能在保证收敛精度的同时有效降低计算资源消耗.

应力强度因子在刻画裂纹尖端附近应力场的强度断裂起着关键作用.对于表面裂纹,其 I 型和 II 型应力强度因子可以分别表示为

$$\begin{cases} K_I = \sqrt{\pi a} \frac{2\mu_1}{\kappa_1 + 1} \sum_{i=1}^N \phi_2, \\ K_{II} = \sqrt{\pi a} \frac{2\mu_1}{\kappa_1 + 1} \sum_{i=1}^N \phi_1, \end{cases} \quad (19)$$

其无量纲应力强度因子可以表示为: $\beta_{I,II} = K_{I,II} / \sigma_0 \sqrt{\pi a}$.需要注意的是,本模型涉及多次迭代.因此,应力强度因子及最终应力解必须基于满足迭代收敛条件的收敛参数进行计算.

4 算 例

4.1 表面裂纹角度对相互作用产生的影响

裂纹角度与裂纹的起裂和材料强度密切相关,因此本小节考虑不同裂纹角度 θ 对相互作用结果产生的影响,如图 3 所示.基体的弹性模量 $E_1 = E_0$, Poisson 比 $\nu_1 = \nu_0$, 表面裂纹的起始位置为 $(0,0)$, 裂纹长度 $a = r_0$.为了更好地表征应力场的强度,选取目标线长度为 $4r_0$, 目标线中心与 y 轴的距离为 $2r_0$, 与 x 轴的距离为 $1.5r_0$.

表 1 不同裂纹角度 θ 得到的无量纲应力强度因子

Table 1 Dimensionless stress intensity factors under different crack angles θ

	$\theta = -45^\circ$			$\theta = 90^\circ$			$\theta = 45^\circ$		
	this paper	FEM	error/%	this paper	FEM	error/%	this paper	FEM	error/%
β_I	1.250	1.251	0.094	1.988	2.002	0.720	1.250	1.253	0.254
β_{II}	0.646	0.652	0.848	0	0	0	-0.646	-0.647	0.143

裂纹角度 θ 在 $-45^\circ, 90^\circ$ 和 45° 之间变化,本文得到的不同裂纹角度下无量纲应力强度因子与有限元模型对比列于表 1,沿目标线的无量纲应力场分量 σ_{ij} / σ_0 如图 4 所示.从表 1 可以看出,无论在何种情况下,由本文得到的应力强度因子与有限元得到的无量纲应力强度因子误差都小于 1%,这极大地说明了应用 DDT 求解裂纹模型的适用性和准确性,同样说明了本文解的有效性.随着裂纹角度从 -45° 变化到 $90^\circ (-90^\circ)$ 时,裂纹尖端的 I 型应力强度因子变大,而 II 型应力强度因子则变小;从 $90^\circ (-90^\circ)$ 变化到 45° 时,裂纹尖端的 I 型应力强度因子变小,II 型应力强度因子呈现出负值,但其绝对值逐渐增大.由于对称性, 45° 和 -45° 下裂纹应力强度因子的绝对值是相同的.

从图 4 可以看出,相比起其他角度,当裂纹与目标线的距离最接近时 ($\theta = 90^\circ$), 目标线出现强烈的应力扰动;与 σ_{22} / σ_0 应力峰值出现在 $x/r_0 = 0$ 相比, σ_{11} / σ_0 和 σ_{12} / σ_0 的应力峰值则在 $x/r_0 = 0$ 右侧区域.相比于

$\theta = 90^\circ, \theta = 45^\circ$ 和 $\theta = -45^\circ$ 的应力峰值明显降低.

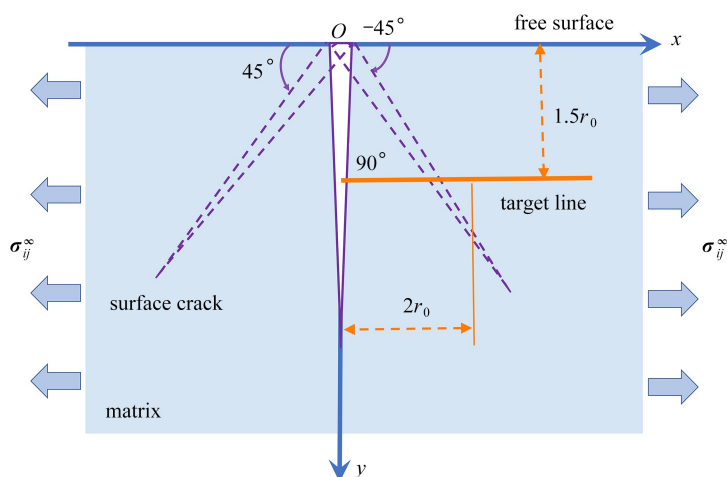


图3 不同角度的表面裂纹示意图

Fig. 3 Schematic of surface cracks with different angles

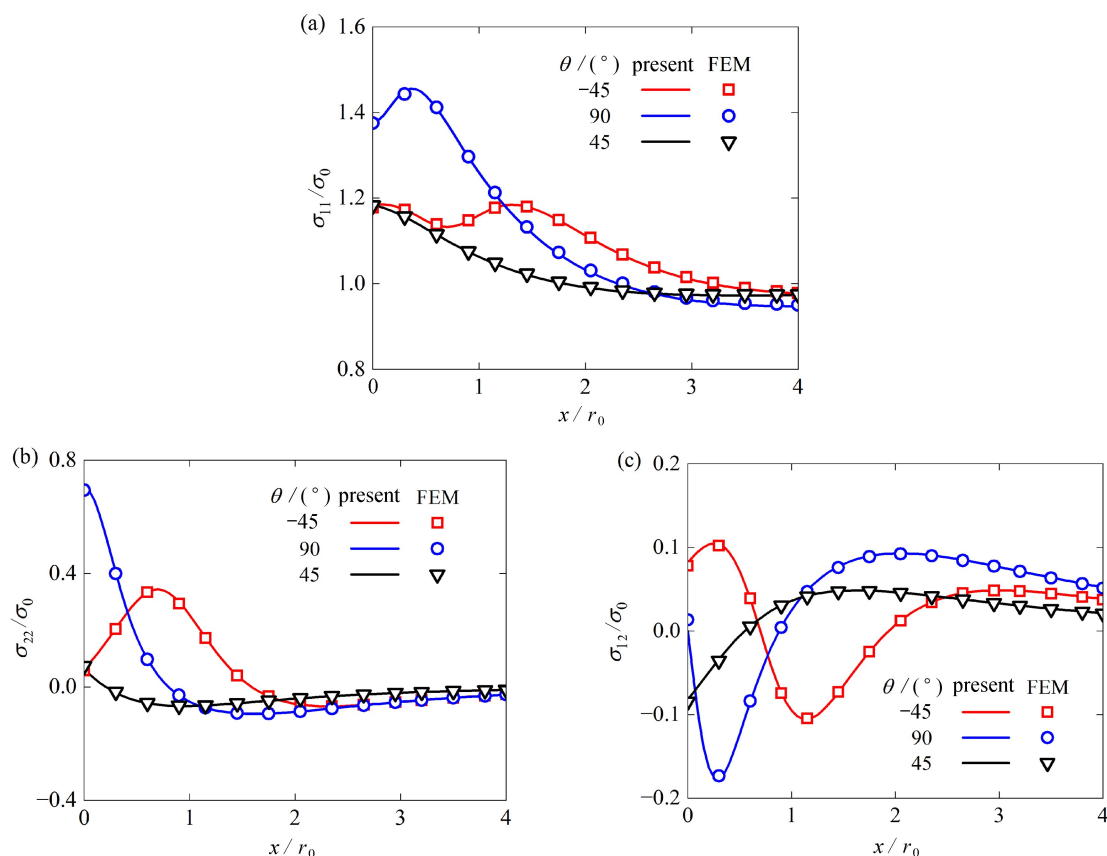


图4 不同裂纹角度下得到的沿目标线的应力场 σ_{ij}/σ_0

Fig. 4 Stress field components σ_{ij}/σ_0 along the target line corresponding to various crack angles

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同.

4.2 杂质材质对相互作用结果的影响

本小节考虑杂质材质对杂质和表面裂纹相互作用结果产生的影响.如图5所示,表面裂纹的起始位置为 $(0,0)$,裂纹角度固定为 $\theta = -45^\circ$; 杂质为矩形杂质,边长 $l = r_0$, 杂质中心与自由表面的距离为 $h = 1.5r_0$, 与 y 轴的距离为 $s = 2r_0$.目标线选取与上一小节一致.

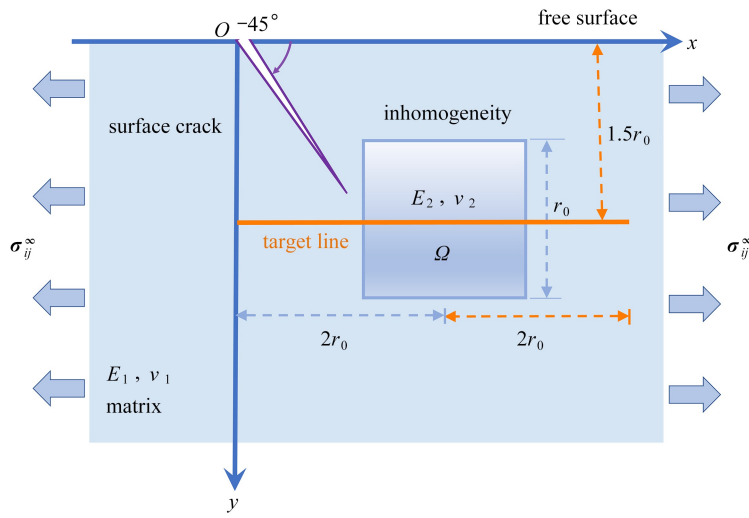


图 5 角度为 -45° 的表面裂纹与矩形杂质相互作用示意图

Fig. 5 Schematic of the interaction between a -45° surface crack and a rectangular inhomogeneity

表 2 不同弹性模量比 E_2/E_1 下得到的无量纲应力强度因子

Table 2 Dimensionless stress intensity factors corresponding to different elastic modulus ratios E_2/E_1

	$E_2/E_1 = 2$			$E_2/E_1 = 1$			$E_2/E_1 = 0.5$		
	this paper	FEM	error/%	this paper	FEM	error/%	this paper	FEM	error/%
β_I	1.061	1.081	1.831	1.250	1.251	0.094	1.464	1.513	3.231
β_{II}	0.658	0.675	2.634	0.646	0.652	0.848	0.591	0.618	4.334

杂质与基体的弹性模量比 E_2/E_1 在 0.5, 1, 2 之间变化. 本小节得到的不同弹性模量比下无量纲应力强度因子与有限元模型对比列于表 2. 从表 2 中可以看出, 无论在何种情况下, 由本文得到的应力强度因子与有限元得到的无量纲应力强度因子误差都小于 4.5%, 验证了本文解的有效性.

当裂纹的角度固定时 ($\theta = -45^\circ$), 随着弹性模量比的减小, I 型应力强度因子 β_I 增大, 而 II 型应力强度因子 β_{II} 则随之减小. 相比于 $E_2/E_1 = 1$, $E_2/E_1 = 2$ 使得 β_I 减小了约 15.1%, 使得 β_{II} 增大了约 1.8%; 而 $E_2/E_1 = 0.5$ 使得 β_I 增大了约 17.2%, 使得 β_{II} 减小了约 8.5%. 这表明不论是何种情况, 都是对 I 型应力强度因子的影响远大于 II 型应力强度因子的影响.

图 6 给出了沿目标线的无量纲应力场 σ_{ij}/σ_0 . 实线代表本文计算结果, 符号表示有限元的结果, 可以看出本文解与有限元解具有较好的吻合度. 随着杂质与基体的弹性模量比 E_2/E_1 降低, σ_{11}/σ_0 也随之降低. 相比于无裂纹时的情况, 裂纹的存在导致 σ_{22}/σ_0 原本在杂质左侧出现的阶跃消失, 而在右侧仍然存在, 说明由于裂纹的存在导致的材料非线性效应远强于此时杂质导致的. 对于 σ_{12}/σ_0 , 无论何种情况, 都呈现出先增后减达到最小值之后继续增加的现象. 并且相对于 σ_{11}/σ_0 和 σ_{22}/σ_0 , σ_{12}/σ_0 要更小. 对于 σ_{11} 和 σ_{12} 没有阶跃, 而 σ_{22} 有阶跃, 是因为矩形杂质在受到沿 x 轴方向的载荷时, 根据连续性控制方程, 界面处沿法向的正应力 σ_{22}/σ_0 需满足应力平衡条件, 而 σ_{12}/σ_0 和 σ_{11}/σ_0 由于位移连续性和单轴载荷方向的特性, 可以保持平滑连续, 不产生明显阶跃.

4.3 杂质位置对相互作用结果的影响

本小节考虑不同杂质离自由表面的位置对相互作用结果产生的影响, 如图 7 所示. 表面裂纹设置与 4.2 小节一致. 杂质选取为圆形杂质, 其半径 $r = r_0$, 杂质中心与自由表面的距离为 h_0 , 杂质不断沿着 y 轴远离自由表面方向移动. 杂质和基体的弹性模量比 $E_2/E_1 = 2$, Poisson 比相同. 为了描述沿 y 轴的应力分布状态, 选取了竖直的目标线, 长度为 $4r_0$, 与 y 轴的距离为 $2r_0$, 即目标线经过杂质中心.

考虑杂质与自由边界的距离 h_0/r_0 分别为 1.0, 1.5 和 2.0, 从而可以得到裂纹右侧的无量纲应力强度因子

β_I 和 β_{II} 如表 3 所示,可以看出,由本文得到的无量纲应力强度因子与有限元得到的无量纲应力强度因子误差都小于 3%,说明了本文解的有效性.

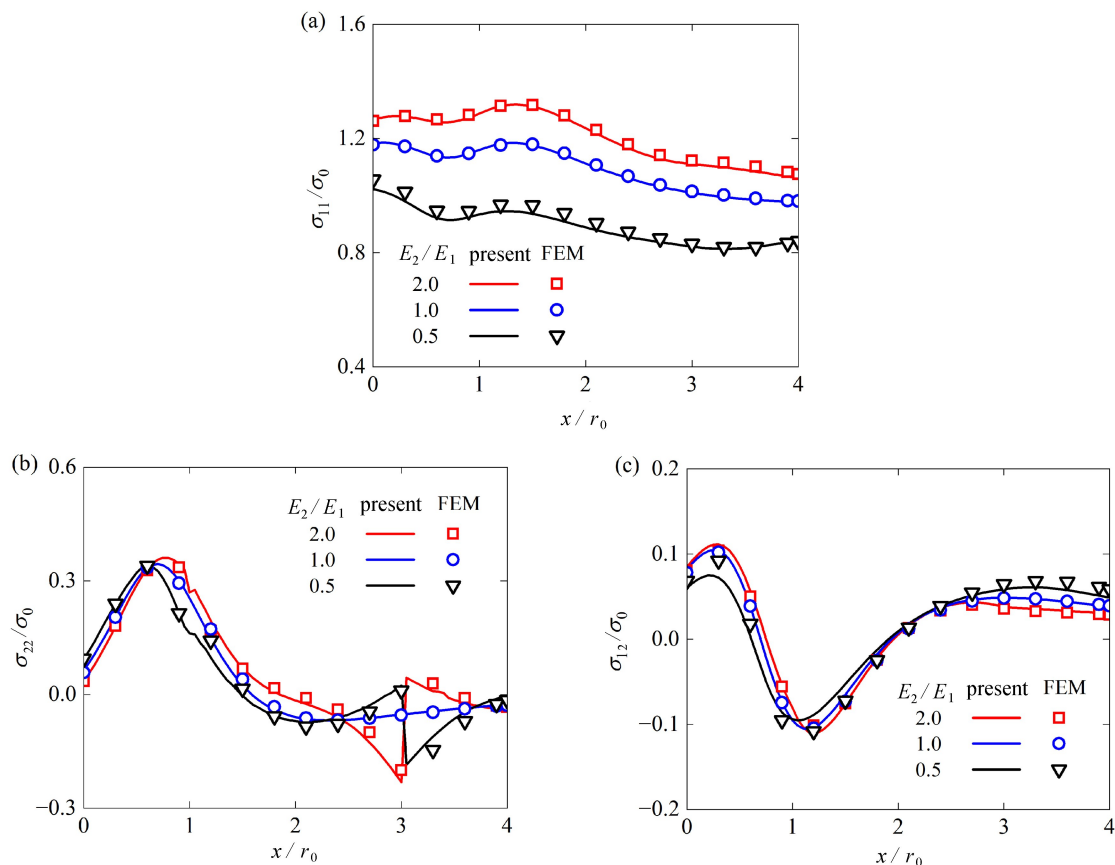


图 6 不同弹性模量比 E_2/E_1 下得到的沿目标线的应力场 σ_{ij}/σ_0

Fig. 6 Stress field components σ_{ij}/σ_0 along the target line corresponding to different elastic modulus ratios E_2/E_1

表 3 不同杂质与自由边界的距离 h_0/r_0 下得到的无量纲应力强度因子

Table 3 Dimensionless stress intensity factors corresponding to different distances

h_0/r_0 from the inhomogeneity to the free surface

	$h_0/r_0 = 1.0$			$h_0/r_0 = 1.5$			$h_0/r_0 = 2.0$		
	this paper	FEM	error/%	this paper	FEM	error/%	this paper	FEM	error/%
β_I	1.123	1.149	2.133	1.067	1.099	2.884	1.107	1.135	2.459
β_{II}	0.694	0.704	1.458	0.626	0.642	2.479	0.598	0.610	1.968

裂纹尖端的 II 型裂纹应力强度因子 β_{II} 随着杂质与自由边界的距离变大而减小,相比于 $h_0/r_0 = 1.0$, $h_0/r_0 = 1.5$ 和 $h_0/r_0 = 2.0$ 分别使得 II 型裂纹应力强度因子减小了约 9.8% 和 13.8%. 而 I 型裂纹应力强度因子 β_I 的值随之先减小后增大,这是由于裂纹尖端距离杂质中心位置的变化而导致的.但是相比于 $h_0/r_0 = 1.0$, $h_0/r_0 = 1.5$ 和 $h_0/r_0 = 2.0$ 使得 I 型裂纹应力强度因子减小了约 5.0% 和 1.4%.

图 8 给出了不同位置 h_0/r_0 的杂质与表面裂纹相互作用下沿目标线的无量纲应力场 σ_{ij}/σ_0 . 实线代表本文计算结果,符号表示有限元结果,可以看出本文解与有限元解具有较好的吻合度. 值得注意的是在本次算例中,有限元网格数量分别是 51 600 ($h_0/r_0 = 1.0$), 52 146 ($h_0/r_0 = 1.5$) 和 54 299 ($h_0/r_0 = 2.0$), 而本程序划分网格数量为 16 384 (128×128), 这大大减少了内存消耗的同时保证了准确性. 在杂质从 $h_0/r_0 = 1.0$ 移动到 $h_0/r_0 = 2.0$ 过程中,可以看到 σ_{11}/σ_0 和 σ_{12}/σ_0 的峰值应力在下降,然而 σ_{22}/σ_0 的应力峰值显著增强. 相较于图 6, 图 8 表现出不同的阶跃形式 (σ_{12} 没有阶跃,而 σ_{11} 和 σ_{22} 都有阶跃), 是因为界面处沿法向的正

应力需满足应力平衡条件,而圆形杂质界面法向分量在 x, y 两个方向都有分量,因此 σ_{11}/σ_0 和 σ_{22}/σ_0 均出现阶跃,而剪应力 σ_{12}/σ_0 与法向平行位移变化相关,在单轴载荷和目标线方向下变化较平滑,因此不出现阶跃。

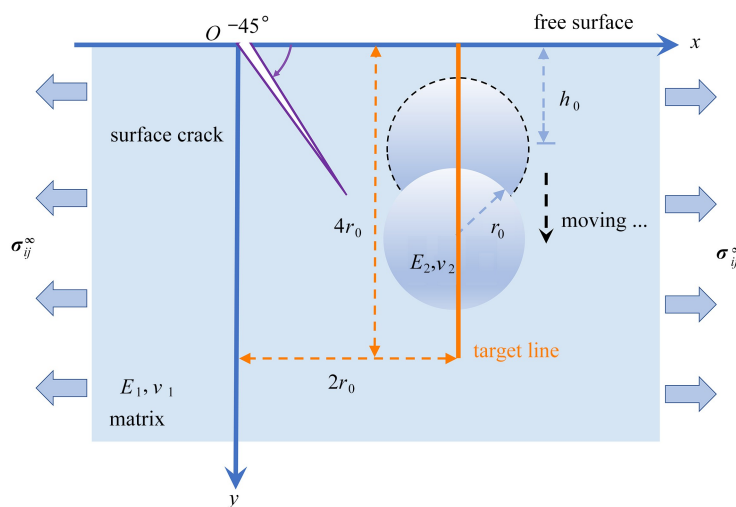


图 7 角度为 -45° 的表面裂纹与不同位置的圆形杂质相互作用示意图

Fig. 7 Schematic of the interaction between a -45° surface crack and circular inhomogeneities in different positions

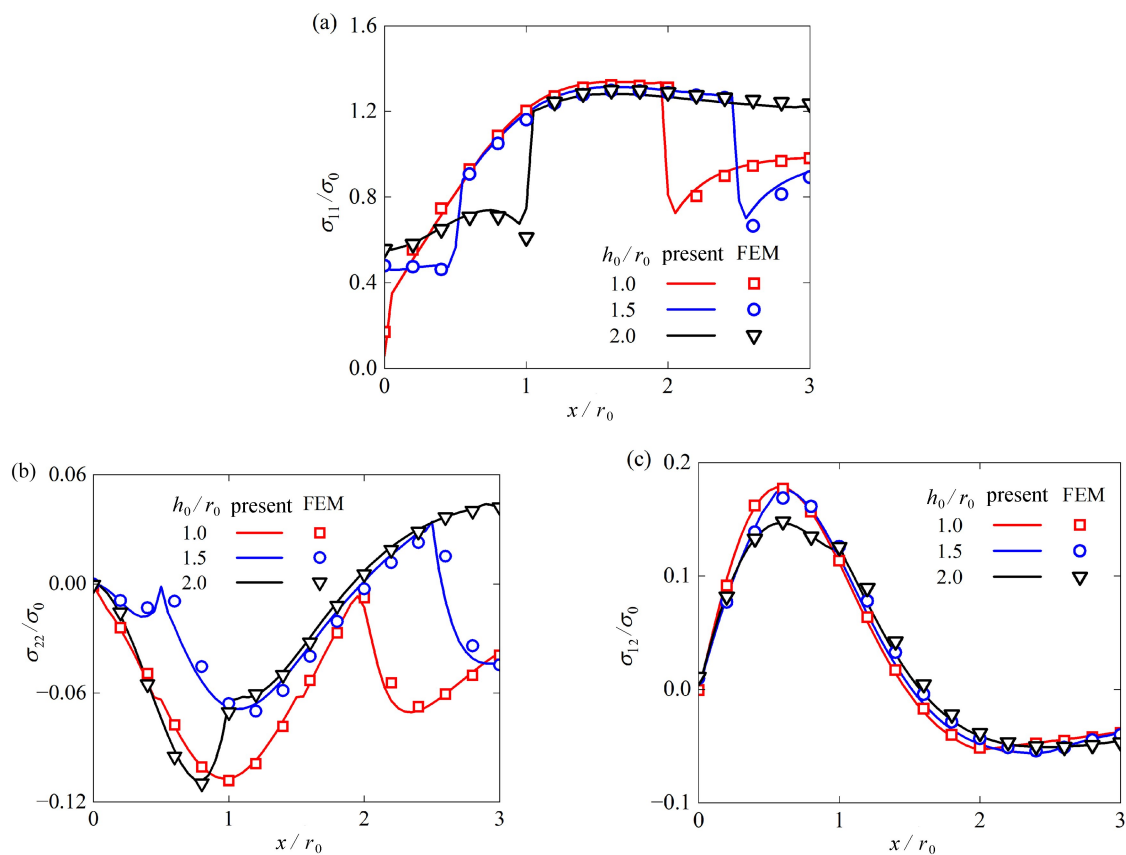


图 8 不同位置 h_0/r_0 的杂质与表面裂纹相互作用下得到的沿目标线的应力场 σ_{ij}/σ_0

Fig. 8 Stress field components σ_{ij}/σ_0 along the target line for the interaction between a surface crack and an inhomogeneity at various position ratios h_0/r_0

5 结 论

1) 本文提出的 NEIM-DDT 耦合半解析方法能够高效、精确地描述半平面中表面裂纹与任意形状杂质的相互作用.与有限元计算结果对比表明,该方法的应力强度因子误差小于 4.5%,验证了其可靠性与适用性.

2) 裂纹角度改变会引起应力场分布的不对称性,尤其在倾斜裂纹情况下,剪切应力扰动增强.

3) 杂质材料性质对裂纹尖端应力强度因子影响显著.硬杂质对 I 型应力强度因子具有明显的屏蔽作用,而对 II 型应力强度因子则表现出放大效应;相反,软杂质使 I 型应力强度因子增强、II 型应力强度因子减弱.

4) 杂质位置效应表明,随着杂质逐渐远离自由边界,裂纹尖端的应力强度因子逐步减小,表明自由表面对裂纹-杂质耦合的局部应力分布具有显著影响.当杂质靠近自由边界时,界面约束效应增强,裂尖应力集中加剧.

参考文献(References):

- [1] Guan J, Wang L, Zhang C, et al. Effects of non-metallic inclusions on the crack propagation in bearing steel [J]. *Tribology International*, 2017, **106**: 123-131.
- [2] Tamate O. The effect of a circular inclusion on the stresses around a line crack in a sheet under tension[J]. *International Journal of Fracture Mechanics*, 1968, **4**(3): 257-266.
- [3] Muskhelishvili N I. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*[M]. Groningen: P. Noordhoff, 1963.
- [4] Gdoutos E E. Interaction effects between a crack and a circular inclusion[J]. *Fibre Science and Technology*, 1981, **15**(3): 173-185.
- [5] Eshelby J D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems[J]. *Proceedings of the Royal Society of London Series A: Mathematical and Physical Sciences*, 1957, **241**(1226): 376-396.
- [6] Jin X, Wang Z, Zhou Q, et al. On the solution of an elliptical inhomogeneity in plane elasticity by the equivalent inclusion method[J]. *Journal of Elasticity*, 2014, **114**(1): 9423.
- [7] Li P, Lyu D, Soewardiman H, et al. Analytical and numerical evaluation of the interaction energy between screw dislocation and inhomogeneous inclusion[J]. *Mechanics of Materials*, 2021, **156**: 103788.
- [8] Jin X, Zhang X, Li P, et al. On the displacement of a two-dimensional Eshelby inclusion of elliptic cylindrical shape[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2017, **84**(7): 074501.
- [9] Jin X, Keer L M, Wang Q. A closed-form solution for the Eshelby tensor and the elastic field outside an elliptic cylindrical inclusion[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2011, **78**(3): 031009.
- [10] Li Z, Chen Q. Crack-inclusion interaction for mode I crack analyzed by Eshelby equivalent inclusion method [J]. *International Journal of Fracture*, 2002, **118**(1): 29-40.
- [11] Yang L, Chen Q, Li Z. Crack-inclusion interaction for mode II crack analyzed by Eshelby equivalent inclusion method[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2004, **71**(9/10): 1421-1433.
- [12] Lal A, Vaghela M B, Mishra K. Numerical analysis of an edge crack isotropic plate with void/inclusions under different loading by implementing XFEM [J]. *Journal of Applied Computational Mechanics*, 2019, **7**(3): 1362-1382.
- [13] Li R, Wu S, Ivanova E, et al. Finite element model and experimental analysis of crack-inclusion interaction [J]. *Journal of Applied Polymer Science*, 1993, **50**(7): 1233-1238.
- [14] Lipetzky P, Schmauder S. Crack-particle interaction in two-phase composites, part I: particle shape effects [J]. *International Journal of Fracture*, 1994, **65**(4): 345-358.

- [15] Nguyen T T, Yvonnet J, Zhu Q Z, et al. A phase-field method for computational modeling of interfacial damage interacting with crack propagation in realistic microstructures obtained by microtomography[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2016, **312**: 567-595.
- [16] Kumar A, Sain T. A unified thermo-viscoelastic phase-field fracture model for fiber-reinforced polymer composites[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2026, **206**: 106378.
- [17] Bian P L, Liu Q, Zhang H, et al. Adaptive phase-field cohesive-zone model for simulation of mixed-mode interfacial and bulk fracture in heterogeneous materials with directional energy decomposition[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2025, **443**: 118062.
- [18] Hills D A, Kelly P, Dai D, et al. *Solution of Crack Problems: the Distributed Dislocation Technique*[M]. Springer Science & Business Media, 1996.
- [19] Yang B, Li P, Liu K, et al. Analysis of kinked cracks interacting with multiple inhomogeneities[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2025, **304**: 110703.
- [20] Yang B, Li P, Liu K, et al. Semi-analytical modeling of coating-crack-defect interactions using a combined distributed dislocation technique and numerical equivalent inclusion method[J]. *Tribology International*, 2026, **214**: 111199.
- [21] Eshelby J D. The elastic field outside an ellipsoidal inclusion[J]. *Proceedings of the Royal Society of London Series A: Mathematical and Physical Sciences*, 1959, **252**(1271): 561-569.
- [22] Zhou Q, Jin X, Wang Z, et al. Numerical implementation of the equivalent inclusion method for 2D arbitrarily shaped inhomogeneities[J]. *Journal of Elasticity*, 2015, **118**(1): 39-61.
- [23] Zhou Q, Jin X, Wang Z, et al. Numerical EIM with 3D FFT for the contact with a smooth or rough surface involving complicated and distributed inhomogeneities[J]. *Tribology International*, 2016, **93**: 91-103.
- [24] 金晓清, 牛飞飞, 张睿, 等. 均布激励基本单元解析解的一种记号方法[J]. 上海交通大学学报, 2016, **50**(8): 1221-1227. (Jin Xiaqing, Niu Feifei, Zhang Rui, et al. A notation for elementary solution to uniformly distributed excitation over a rectangular/cuboidal domain[J]. *Journal of Shanghai Jiao Tong University*, 2016, **50**(8): 1221-1227. (in Chinese))
- [25] 谢东东, 金晓清, 蒋志桢, 等. 弹性半平面矩形夹杂基本单元解及其应用[J]. 重庆大学学报, 2022, **45**(12): 26-35. (Xie Dongdong, Jin Xiaqing, Jiang Zhizhen, et al. Elementary solution of the elastic half-plane containing a rectangular inclusion: theory and applications[J]. *Journal of Chongqing University*, 2022, **45**(12): 26-35. (in Chinese))
- [26] Liu K, Li P, Yang B, et al. Cuboidal inclusion problem revisited: unified expressions for the complete elastic fields and numerical implementation based on FFT[J]. *Tribology International*, 2026, **213**: 111099.
- [27] Liu K, Li P, Yang B, et al. A versatile three-dimensional contact analysis for heterogeneous materials[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2025, **318**: 113440.
- [28] Zhou K, Keer L M, Wang Q J. Semi-analytic solution for multiple interacting three-dimensional inhomogeneous inclusions of arbitrary shape in an infinite space[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011, **87**(7): 617-638.