ⓒ 应用数学和力学编委会, ISSN 1000-0887

http://www.applmathmech.cn

具有不确定参数的时滞惯性忆阻神经网络的同步控制及应用研究*

李　爽, 王　震

(山东科技大学 数学与系统科学学院, 山东 青岛 266071)

摘要: 本文研究一类具有不确定参数与混合时滞的惯性忆阻神经网络的精度预分配有限时间同步问题.通过设计事件触发控制器及事件触发条件,利用降阶法,将惯性系统转换为一阶系统,确定了转化后一阶系统的误差系统绝对值的一个上界,并借助反证法与积分法推导出了惯性系统实现精度预分配有限时间指数同步的判据,进一步利用积分不等式证明了系统不存在 Zeno 行为,最终通过数值算例与图像加密、解密应用验证了结果的有效性.

关　键　词: 混合时滞; 不确定参数; 惯性忆阻神经网络; 有限时间指数同步; 事件触发控制器

中图分类号: O231　　**文献标志码:** A　　DOI: 10.21656/1000-0887.460207

Synchronization of Delayed Inertial Memristive Neural Networks With Uncertain Parameters

Li Shuang,　Wang Zhen

(*College of Mathematical and Systems Science*, *Shandong University of Science and Technology*, *Qingdao*, *Shandong* 266071, *P.R. China*)

Abstract: The issue of preassigned finite-time synchronization with accuracy for inertial memristive neural networks under uncertain parameters and mixed delays, was investigated. By the design of an event-triggered controller and the event-triggering conditions, the inertial system was transformed into a 1st-order system with the order reduction method. An upper bound for the absolute value of the error system of the transformed 1st-order system was determined. With the contradiction method and the integral method, the criteria for achieving preassigned finite-time exponential synchronization of the inertial system were derived. Furthermore, the Zeno behavior of the system was excluded through integral inequalities. Finally, the effectiveness of the results was verified via numerical examples and an image encryption-decryption application.

Key words: mixed delay; uncertain parameter; inertial memristive neural network; finite-time exponential synchronization; event-triggered controller

0　引　　言

近年来,神经网络已成为众多学科与工程领域的研究热点.神经网络是一种受人脑结构启发的计算模

* **收稿日期:** 2025-11-19; **修订日期:** 2025-12-29

基金项目: 国家自然科学基金(面上项目)(62573274)

作者简介: 李爽(1999—),男,硕士生(E-mail: 956782104@qq.com);
王震(1977—),男,教授,博士生导师(通信作者. E-mail: wangzhen@sdust.edu.cn).

引用格式: 李爽, 王震. 具有不确定参数的时滞惯性忆阻神经网络的同步控制及应用研究[J]. 应用数学和力学, 2026, **47**(10): 1335-1348.

型,具有强大的非线性建模能力、特征学习和高度的并行性,它复杂的混沌特性使其在不同情况下表现出复杂的动力学行为,因此神经网络在诸多前沿领域中有着广泛的应用,例如图像处理[1]、自主导航[2]、联想记忆[3]等领域.

忆阻器,全称为记忆电阻器,它是一种能够记忆过去流经自己的电荷量的电阻元件,其阻值由流经它的历史电流所决定.20 世纪 70 年代初,加州大学伯克利分校的工程师 Chua 在系统推导四个基本电路变量之间的六种可能关系时,发现磁通量与电荷之间的关系尚未被定义.基于这一理论分析,他在其开创性论文中提出了第四种基本二端电路元件,并将其命名为忆阻器[4].利用忆阻器模拟生物突触所建立的人工神经网络称为忆阻神经网络,研究其复杂的动力学行为已成为人工智能领域的热点问题[5-6].

以往对神经网络的研究主要集中在传统的一阶模型上,如细胞神经网络[7-9]、Hopfield[10-11]神经网络和 Cohen-Grossberg 神经网络[12-14]等.Babcock 等[15]将电感器引入神经网络中,构造出惯性神经网络并采用二阶微分方程来描述不同于一阶微分方程的神经网络模型,惯性神经网络具有更复杂的动力学行为,并且可以用于混沌和分岔控制[16].在忆阻神经网络中引入惯性项能够增强系统的瞬态性能与鲁棒性,更好地反映生物神经网络的特性,例如,Li 等[17]研究了比例时滞惯性忆阻神经网络的全局多项式镇定问题.采用非降阶法,通过设计合适的参数可调的 Lyapunov 泛函并结合不等式技巧,得到了全局多项式镇定的代数判据.Rakkiyappan 等[18]利用平均脉冲间隔方法研究了一类具有时滞的惯性忆阻神经网络的脉冲同步问题,通过微分包含理论、平均脉冲空间法,得到了脉冲控制技术下指数同步的充分条件.

在惯性忆阻神经网络中引入事件触发机制,能有效削减网络传输负载,提高资源利用率.这一方法对于研究系统动力学行为、提升系统能效具有重要价值,尤其适用于资源受限的分布式系统、嵌入式平台等实际场景.近年来,该方向研究已取得显著进展.例如,Jiang 等[19]设计了自适应事件触发控制器,实现了惯性时滞忆阻神经网络的准同步和指数同步,在保证控制精度的同时动态减少了触发次数.Yao 等[20]则采用降阶法与事件触发策略相结合的方式,研究了在参数扰动下惯性忆阻神经网络的鲁棒指数同步问题,证明了该方法在模型不确定性下的有效性.这些工作拓展了事件触发控制在二阶忆阻系统中的应用,并为实际工程中的资源优化提供了理论参考.目前基于事件触发机制对于惯性忆阻神经网络系统的研究成果,大部分都是采用 Lyapunov 函数法进行研究,采用其他证明方法的研究成果较少.因此,本文将事件触发机制、反证法、降阶法相结合的全新方法引入到惯性忆阻神经网络系统中,分析目标系统的同步问题,丰富了目前的研究成果.本文的主要创新点如下:

1) 将精度预分配同步定理推广到了模型更复杂的惯性系统,并且引入了事件触发控制器,提高了控制效率.

2) 通过设计事件触发控制器及事件触发条件,结合降阶法、反证法与积分法得到了惯性系统实现精度预分配有限时间指数同步的判据,并将所得结果应用于图像的加密解密.

1 预 备 知 识

考虑如下具有混合时滞与不确定参数的惯性忆阻神经网络:

$$\begin{cases}\ddot{x}_i(t)=-\nu_i\dot{x}_i(t)+\varphi_i(x_i(t-\pi_i(t)))+\displaystyle\sum_{j=1}^{n}[a_{ij}(x_i(t))+\Delta a_{ij}(t)]p_j(x_j(t))+\\ \qquad\displaystyle\sum_{j=1}^{n}[b_{ij}(x_i(t))+\Delta b_{ij}(t)]q_j(x_j(t-\tau_{ij}(t)))+\\ \qquad\displaystyle\sum_{j=1}^{n}[c_{ij}(x_i(t))+\Delta c_{ij}(t)]\int_{t-d_{ij}(t)}^{t}h_j(x_j(s))\mathrm{d}s+\sum_{j=1}^{n}s_{ij}\dot{x}_j(t-\varepsilon_{ij}),\\ x_i(s)=\eta_i(s),\ \dot{x}_i(s)=\eta_i^*(s),\quad s\in[-\sigma,0],\ i\in\{1,2,\cdots,n\},\end{cases}\tag{1}$$

式中 n 表示神经元的数量,$x_i(t)\in\mathbf{R}$ 表示系统的状态变量,$p_j(\cdot),q_j(\cdot),h_j(\cdot)\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$ 表示激活函数,ν_i 表示自反馈常数,且满足 $\nu_i>1$,$\varphi_i(\cdot)\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$ 表示自信号函数,$0\leqslant\pi_i(t)\leqslant\hat{\pi}_i$,$0\leqslant\tau_{ij}(t)\leqslant\hat{\tau}_{ij}$,$0\leqslant d_{ij}(t)\leqslant\hat{d}_{ij},\varepsilon_{ij}>0$ 分别表示泄漏时滞、传输时滞、分布时滞以及中性时滞,其中 $\hat{\pi}_i,\hat{\tau}_{ij},\hat{d}_{ij}>0,s_{ij}\in\mathbf{R}$,

$\hat{\pi}=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\hat{\pi}_i$, $\hat{\tau}=\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\hat{\tau}_{ij}$, $\hat{d}=\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\hat{d}_{ij}$, $\hat{\varepsilon}=\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\varepsilon_{ij}$, $\sigma=\max\{\hat{\pi},\hat{\tau},d,\hat{\varepsilon}\}$, $\Delta a_{ij}(t)$, $\Delta b_{ij}(t)$, $\Delta c_{ij}(t)$ 表示不确定参数,忆阻连接权重

$$a_{ij}(x_i(t))=\begin{cases}\check{a}_{ij}, & |x_i(t)|>\omega_i,\\ \hat{a}_{ij}, & |x_i(t)|\leqslant\omega_i,\end{cases}\quad b_{ij}(x_i(t))=\begin{cases}\check{b}_{ij}, & |x_i(t)|>\omega_i,\\ \hat{b}_{ij}, & |x_i(t)|\leqslant\omega_i,\end{cases}$$

$$c_{ij}(x_i(t))=\begin{cases}\check{c}_{ij}, & |x_i(t)|>\varpi_i,\\ \hat{c}_{ij}, & |x_i(t)|\leqslant\varpi_i,\end{cases}$$

其中 $\omega_i>0$ 为阈值常数, $\check{a}_{ij},\hat{a}_{ij},\check{b}_{ij},\hat{b}_{ij},\check{c}_{ij},\hat{c}_{ij}$ 为已知常数,记 $\bar{a}_{ij}=\max\{|\check{a}_{ij}|,|\hat{a}_{ij}|\}$, $\bar{b}_{ij}=\max\{|\check{b}_{ij}|,|\hat{b}_{ij}|\}$, $\bar{c}_{ij}=\max\{|\check{c}_{ij}|,|\hat{c}_{ij}|\}$.

将系统(1)作为驱动系统,相应的响应系统为

$$\begin{cases}\ddot{y}_i(t)=-\nu_i\dot{y}_i(t)+\varphi_i(y_i(t-\pi_i(t)))+\sum\limits_{j=1}^{n}[a_{ij}(y_i(t))+\Delta a_{ij}(t)]p_j(y_j(t))+\\ \qquad\sum\limits_{j=1}^{n}[b_{ij}(y_i(t))+\Delta b_{ij}(t)]q_j(y_j(t-\tau_{ij}(t)))+\\ \qquad\sum\limits_{j=1}^{n}[c_{ij}(y_i(t))+\Delta c_{ij}(t)]\int_{t-d_{ij}(t)}^{t}h_j(y_j(s))\mathrm{d}s+\sum\limits_{j=1}^{n}s_{ij}\dot{y}_j(t-\varepsilon_{ij})+u_i(t),\\ y_i(s)=\psi_i(s),\ \dot{y}_i(s)=\psi_i^*(s),\quad s\in[-\sigma,0],\ i\in\{1,2,\cdots,n\},\end{cases}\tag{2}$$

其中 $u_i(t)\in\mathbf{R}$ 表示控制器输入.

系统(1)与(2)之间的误差系统可表示为: $m_i(t)=y_i(t)-x_i(t)$, 误差系统的初值可表示为

$$m_i(s)=\phi_i(s),\ \dot{m}_i(s)=\phi_i^*(s),\quad s\in[-\sigma,0],\ i\in\{1,2,\cdots,n\}.$$

假设 1[21]　假设激活函数 $p_j(\cdot)$, $q_j(\cdot)$, $h_j(\cdot)$ 满足: $|p_j(\cdot)|\leqslant\hat{P}_j$, $|p_j(x)-p_j(y)|\leqslant L_{p_j}|x-y|$, $|q_j(\cdot)|\leqslant\hat{Q}_j$, $|q_j(x)-q_j(y)|\leqslant L_{q_j}|x-y|$, $|h_j(\cdot)|\leqslant\hat{H}_j$, $|h_j(x)-h_j(y)|\leqslant L_{h_j}|x-y|$, $\forall j=1,2,\cdots,n$, 其中 $\hat{P}_j,\hat{Q}_j,\hat{H}_j,L_{p_j},L_{q_j},L_{h_j}\in\mathbf{R}_+$ 为常数.

假设 2[21]　假设自信号函数 $\varphi_i(\cdot)$: $|\varphi_j(x)-\varphi_j(y)|\leqslant L_{\varphi_j}|x-y|$, $\forall x,y\in\mathbf{R}$, $\forall j=1,2,\cdots,n$, 其中 $L_{\varphi_j}\in\mathbf{R}_+$ 为常数.

假设 3[22]　假设不确定参数 $\Delta a_{ij}(t)$, $\Delta b_{ij}(t)$, $\Delta c_{ij}(t)$ 满足: $|\Delta a_{ij}(t)|\leqslant a_{ij}^*$, $|\Delta b_{ij}(t)|\leqslant b_{ij}^*$, $|\Delta c_{ij}(t)|\leqslant c_{ij}^*$, $\forall t\geqslant-\sigma$, 其中 $a_{ij}^*,b_{ij}^*,c_{ij}^*\in\mathbf{R}_+$ 为常数.

2　主要结果

本节设计如下事件触发控制器:

$$u_i(t)=-K_i(\dot{m}_i(t_k)+\nu_i m_i(t_k)),\tag{3}$$

其中 $t\in[t_k,t_{k+1})$, t_k 为事件触发时刻, K_i 为控制参数.

定义测量误差为

$$\epsilon_i(t)=\dot{m}_i(t_k)+\nu_i m_i(t_k)-\dot{m}_i(t)-\nu_i m_i(t).\tag{4}$$

事件触发条件设置为

$$|\epsilon_i(t)|\leqslant r|\dot{m}_i(t)+\nu_i m_i(t)|,\quad 0<r<1.\tag{5}$$

为了方便后续的证明对误差系统进行降阶,令

$$G_i(t)=\dot{m}_i(t)+\nu_i m_i(t),$$

$$\Phi_i(t)=\varphi_i(y_i(t-\pi_i(t)))-\varphi_i(x_i(t-\pi_i(t)))+$$

$$\sum_{j=1}^{n}\{[a_{ij}(y_i(t))-a_{ij}(x_i(t))]p_j(y_j(t))+[a_{ij}(x_i(t))+\Delta a_{ij}(t)][p_j(y_j(t))-p_j(x_j(t))]\}+$$

$$\sum_{j=1}^{n}\{[b_{ij}(y_i(t))-b_{ij}(x_i(t))]q_j(y_j(t-\tau_{ij}(t)))+$$

$$[b_{ij}(x_i(t)) + \Delta b_{ij}(t)][q_j(y_j(t-\tau_{ij}(t))) - q_j(x_j(t-\tau_{ij}(t)))]\} +$$
$$\sum_{j=1}^{n}[c_{ij}(y_i(t)) - c_{ij}(x_i(t))]\int_{t-d_{ij}(t)}^{t} h_j(y_j(s))\mathrm{d}s +$$
$$[c_{ij}(x_i(t)) + \Delta c_{ij}(t)]\int_{t-d_{ij}(t)}^{t}[h_j(y_j(s)) - h_j(x_j(s))]\mathrm{d}s,$$

则误差系统可表示为

$$\dot{G}_i(t) = \Phi_i(t) + \sum_{j=1}^{n} s_{ij}\dot{m}_j(t-\varepsilon_{ij}) + u_i(t), \tag{6}$$

初值为 $G_i(t) = \phi_i^*(s) + \nu\phi_i(s)$.

定理 1 若事件触发条件(5)以及假设 1—3 成立,则系统(6)的解满足

$$|G_i(t)| \leqslant \sum_{l=1}^{8} Y_{il}(t) + \frac{\mathscr{U}_i}{K_i}, \qquad i \in \{1,2,\cdots,n\},\ t \geqslant -\sigma, \tag{7}$$

其中

$$\mathscr{U}_i = \sum_{j=1}^{n}|\check{a}_{ij} - \hat{a}_{ij}|\hat{P}_j + \sum_{j=1}^{n}|\check{b}_{ij} - \hat{b}_{ij}|\hat{Q}_j + \sum_{j=1}^{n}|\check{c}_{ij} - \hat{c}_{ij}|\hat{d}\hat{H}_j,$$
$$Y_{i1}(t) = \mathrm{e}^{-K_i t}\Gamma\left(1 + \sum_{j=1}^{n}|s_{ij}|\right),\ Y_{i2}(t) = \sum_{j=1}^{n}|s_{ij}||m_j(t-\varepsilon_{ij})|,$$
$$Y_{i3}(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{K_i(s-t)}K_i r|G_i(s)|\mathrm{d}s,\ Y_{i4}(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{K_i(s-t)}\left|\sum_{j=1}^{n} s_{ij}m_j(s-\varepsilon_{ij})\right|\mathrm{d}s,$$
$$Y_{i5}(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{K_i(s-t)}L_{\varphi_i}|m_i(s-\pi_i(s))|\mathrm{d}s,\ Y_{i6}(t) = \sum_{j=1}^{n}(\bar{a}_{ij} + a_{ij}^*)L_{p_j}\int_0^t \mathrm{e}^{K_i(s-t)}|m_j(s)|\mathrm{d}s,$$
$$Y_{i7}(t) = \sum_{j=1}^{n}(\bar{b}_{ij} + b_{ij}^*)L_{q_j}\int_0^t \mathrm{e}^{K_i(s-t)}|m_j(s-\tau_{ij}(s))|\mathrm{d}s,$$
$$Y_{i8}(t) = \sum_{j=1}^{n}(\bar{c}_{ij} + c_{ij}^*)L_{h_j}\int_0^t \mathrm{e}^{K_i(s-t)}\left(\int_{s-\hat{d}}^{s}|m_j(\xi)|\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s.$$

证明 首先,令 $g_i(t) = G_i(t) - \sum_{j=1}^{n} s_{ij}m_j(t-\varepsilon_{ij})$,并对 $|g_i(t)|$ 沿着系统(6)求右上 Dini 导数可得

$$\mathrm{D}^+|g_i(t)| = \mathrm{sgn}\left(G_i(t) - \sum_{j=1}^{n} s_{ij}m_j(t-\varepsilon_{ij})\right)(\Phi_i(t) + u_i(t)), \tag{8}$$
$$\mathrm{D}^+(\mathrm{e}^{K_i t}|g_i(t)|) = K_i\mathrm{e}^{K_i t}|g_i(t)| + \mathrm{e}^{K_i t}\mathrm{sgn}(g_i(t))(\Phi_i(t) + u_i(t)). \tag{9}$$

由假设 1—3 以及时滞的有界性可得

$$\mathrm{D}^+(\mathrm{e}^{K_i t}|g_i(t)|) \leqslant \mathrm{e}^{K_i t}\Big\{K_i|g_i(t)| + \mathrm{sgn}(g_i(t))u_i(t) + L_{\varphi_i}|m_i(t-\pi_i(t))| +$$
$$\sum_{j=1}^{n}[|a_{ij}(y_i(t)) - a_{ij}(x_i(t))|\hat{P}_j + (\bar{a}_{ij} + a_{ij}^*)L_{p_j}|m_j(t)|] +$$
$$\sum_{j=1}^{n}[|b_{ij}(y_i(t)) - b_{ij}(x_i(t))|\hat{Q}_j + (\bar{b}_{ij} + b_{ij}^*)L_{q_j}|m_j(t-\tau_{ij}(t))|] +$$
$$\sum_{j=1}^{n}\left[|c_{ij}(y_i(t)) - c_{ij}(x_i(t))|\hat{d}\hat{H}_j + (\bar{c}_{ij} + c_{ij}^*)L_{h_j}\int_{t-\hat{d}}^{t}|m_j(s)|\mathrm{d}s\right]\Big\}. \tag{10}$$

由绝对值不等式以及事件触发条件(5)可得

$$K_i|g_i(t)| + \mathrm{sgn}(g_i(t))u_i(t) = \mathrm{sgn}(g_i(t))(K_i g_i(t) + u_i(t)) \leqslant$$
$$K_i\left|G_i(t) - G_i(t_k) - \sum_{j=1}^{n} s_{ij}m_j(t-\varepsilon_{ij})\right| \leqslant$$
$$K_i r|G_i(t)| + K_i\left|\sum_{j=1}^{n} s_{ij}m_j(t-\varepsilon_{ij})\right|. \tag{11}$$

将式(11)代入式(10)可得

$$D^+(e^{K_i t}|g_i(t)|) \leqslant e^{K_i t}\left\{K_i r|G_i(t)| + K_i\left|\sum_{j=1}^{n} s_{ij}m_j(t-\varepsilon_{ij})\right| + L_{\varphi_i}|m_i(t-\pi_i(t))| + [|\check{a}_{ij}-\hat{a}_{ij}|\hat{P}_j + (\bar{a}_{ij}+a_{ij}^*)L_{p_j}|m_j(t)|] + \sum_{j=1}^{n}[|\check{b}_{ij}-\hat{b}_{ij}|\hat{Q}_j + (\bar{b}_{ij}+b_{ij}^*)L_{q_j}|m_j(t-\tau_{ij}(t))|] + \sum_{j=1}^{n}\left[|\check{c}_{ij}-\hat{c}_{ij}|\hat{d}\hat{H}_j + (\bar{c}_{ij}+c_{ij}^*)L_{h_j}\int_{t-\hat{d}}^{t}|m_j(s)|\,ds\right]\right\}. \tag{12}$$

将式(12)两边从 0 到 t 积分可得

$$e^{K_i t}\left|G_i(t)-\sum_{j=1}^{n}s_{ij}m_j(t-\varepsilon_{ij})\right| - \left|G_i(0)-\sum_{j=1}^{n}s_{ij}m_j(-\varepsilon_{ij})\right| \leqslant \int_0^t e^{K_i s}K_i r|G_i(s)|\,ds + \int_0^t e^{K_i s}K_i\left|\sum_{j=1}^{n}s_{ij}m_j(s-\varepsilon_{ij})\right|ds + \int_0^t e^{K_i s}L_{\varphi_i}|m_i(s-\pi_i(s))|\,ds + \sum_{j=1}^{n}[|\check{a}_{ij}-\hat{a}_{ij}|\hat{P}_j + |\check{b}_{ij}-\hat{b}_{ij}|\hat{Q}_j + |\check{c}_{ij}-\hat{c}_{ij}|\hat{d}\hat{H}_j]\frac{e^{K_i t}-1}{K_i} + \sum_{j=1}^{n}(\bar{a}_{ij}+a_{ij}^*)L_{p_j}\int_0^t e^{K_i s}|m_j(s)|\,ds + \sum_{j=1}^{n}(\bar{b}_{ij}+b_{ij}^*)L_{q_j}\int_0^t e^{K_i s}|m_j(s-\tau_{ij}(s))|\,ds + \sum_{j=1}^{n}(\bar{c}_{ij}+c_{ij}^*)L_{h_j}\int_0^t e^{K_i s}\left(\int_{s-\hat{d}}^{s}|m_j(\xi)|\,d\xi\right)ds, \tag{13}$$

由绝对值不等式可得

$$|G_i(t)| \leqslant \sum_{l=1}^{8}\Upsilon_{il}(t) + \frac{\mathscr{U}_i}{K_i}. \tag{14}$$

证明完毕.

定理 2　在定理 1 的条件下,给定常数 $\alpha,\beta,\lambda(\lambda<\nu)$, $m(m=(1-\beta)\alpha/\sqrt{n})$, 对任意的 $t\geqslant-\sigma$, $i\in\{1,2,\cdots,n\}$, 如果存在 $l_i(l_i>1)$, $K_i(K_i>\lambda)$ 使得

$$A_i<1,\ B_i<1, \tag{15}$$

那么系统(6)的解满足

$$|G_i(t)| \leqslant l_i\Gamma e^{-\lambda t}+m, \tag{16}$$

其中

$$A_i = \frac{1}{l_i} + \frac{\sum_{j=1}^{n}|s_{ij}|}{l_i} + \frac{K_i r l_i + (K_i-\lambda+1)\sum_{j=1}^{n}|s_{ij}|\kappa_j l_j e^{\lambda\hat{\varepsilon}} + L_{\varphi_i}e^{\lambda\hat{\pi}}\kappa_i l_i}{l_i(K_i-\lambda)} + \frac{\sum_{j=1}^{n}(\bar{a}_{ij}+a_{ij}^*)L_{p_j}\kappa_j l_j + e^{\lambda\hat{\tau}}\sum_{j=1}^{n}(\bar{b}_{ij}+b_{ij}^*)L_{q_j}\kappa_j l_j}{l_i(K_i-\lambda)} + \frac{(e^{\lambda\hat{d}}-1)\sum_{j=1}^{n}(\bar{c}_{ij}+c_{ij}^*)L_{h_j}\kappa_j l_j}{l_i\lambda(K_i-\lambda)},$$

$$B_i = \frac{\sum_{j=1}^{n}|s_{ij}|}{\nu_j} + \frac{\sum_{j=1}^{n}|s_{ij}|+\sum_{j=1}^{n}(\bar{a}_{ij}+a_{ij}^*)L_{p_j}}{\nu_j K_i} + \frac{\sum_{j=1}^{n}(\bar{b}_{ij}+b_{ij}^*)L_{q_j}+\hat{d}\sum_{j=1}^{n}(\bar{c}_{ij}+c_{ij}^*)L_{h_j}}{\nu_j K_i} + r + \frac{L_{\varphi_i}}{\nu_i} + \frac{\mathscr{U}_i}{mK_i},$$

$$\kappa_i = \frac{1}{l_i} + \frac{1}{\nu_i-\lambda},\ \nu=\min\nu_i.$$

证明　式(6)可写成

$$\dot{m}_i(t) + \nu_i m_i(t) = G_i(t), \tag{17}$$

对于式(17),等式两边同时乘 $e^{\nu_i t}$, 并从 0 到 t 积分整理可得

$$m_i(t)=e^{-\nu_i t}m_i(0)+\int_0^t e^{-\nu_i(t-s)}G_i(s)\,ds. \tag{18}$$

假设结论不成立,那么存在 $T>0$,$g\in\{1,2,\cdots,n\}$, 使得

$$\begin{cases}|G_i(t)|\leqslant l_i\Gamma e^{-\lambda t}+m, & -\sigma\leqslant t\leqslant T,\\ |G_g(T)|=l_g\Gamma e^{-\lambda T}+m.\end{cases}$$

此时对 $m_i(t)$ 的上界进行估计

$$m_i(t)=e^{-\nu_i t}m_i(0)+\int_0^t e^{-\nu_i(t-s)}G_i(s)\,ds\leqslant \Gamma e^{-\nu_i t}+\int_0^t e^{-\nu_i(t-s)}(l_i\Gamma e^{-\lambda s}+m)\,ds\leqslant$$

$$\Gamma e^{-\lambda t}+l_i\Gamma e^{-\nu_i t}\int_0^t e^{(\nu_i-\lambda)s}ds+me^{-\nu_i t}\int_0^t e^{\nu_i s}ds\leqslant \Gamma\left(1+\frac{l_i}{\nu_i-\lambda}\right)e^{-\lambda t}+\frac{m}{\nu_i}, \tag{19}$$

即 $|m_i(t)|\leqslant \Gamma\kappa_i l_i e^{-\lambda t}+\dfrac{m}{\nu_i}$.

对于 $0\leqslant s\leqslant T$, 有

$$|m_j(s-\varepsilon_{gj})|\leqslant e^{\lambda\hat{\varepsilon}}\kappa_j l_j\Gamma e^{-\lambda s}+m,\ |m_g(s-\pi_g)|\leqslant e^{\lambda\hat{\pi}}\kappa_g l_g\Gamma e^{-\lambda s}+m,$$

$$|m_j(s-\tau_{gj})|\leqslant e^{\lambda\hat{\tau}}\kappa_j l_j\Gamma e^{-\lambda s}+m.$$

此时

$$Y_{g1}(T)=e^{-K_g T}\Gamma\left(1+\sum_{j=1}^n|s_{gj}|\right)\leqslant e^{-\lambda T}\Gamma\left(1+\sum_{j=1}^n|s_{gj}|\right), \tag{20}$$

$$Y_{g2}(T)=\sum_{j=1}^n|s_{gj}||m_j(T-\varepsilon_{gj})|\leqslant\sum_{j=1}^n|s_{gj}|\left(e^{\lambda\hat{\varepsilon}}\kappa_j l_j\chi e^{-\lambda T}+\frac{m}{\nu_j}\right), \tag{21}$$

$$Y_{g3}(T)=\int_0^T e^{K_g(s-T)}K_g r|G_g(s)|\,ds\leqslant\int_0^T e^{K_g(s-T)}K_g r(l_g\Gamma e^{-\lambda s}+m)\,ds=$$

$$K_g r l_g\Gamma\int_0^T e^{K_g(s-T)-\lambda s}ds+K_g rm\int_0^T e^{K_g(s-T)}ds\leqslant\frac{K_g r}{K_g-\lambda}l_g\Gamma e^{-\lambda T}+rm, \tag{22}$$

$$Y_{g4}(T)=\int_0^T e^{K_g(s-T)}\left|\sum_{j=1}^n s_{gj}m_j(s-\varepsilon_{gj})\right|ds\leqslant\sum_{j=1}^n|s_{gj}|\int_0^T e^{K_g(s-T)}\left(e^{\lambda\hat{\varepsilon}}\kappa_j l_j\chi e^{-\lambda s}+\frac{m}{\nu_j}\right)ds\leqslant$$

$$\frac{\sum_{j=1}^n|s_{gj}|\kappa_j l_j e^{\lambda\hat{\varepsilon}}\Gamma}{K_g-\lambda}e^{-\lambda T}+\frac{\sum_{j=1}^n|s_{gj}|}{K_g}\frac{m}{\nu_j}. \tag{23}$$

通过类似的计算过程可得

$$Y_{g5}(T)=L_{\varphi_g}\int_0^T e^{K_g(s-T)}|m_g(s-\pi_g(s))|\,ds\leqslant L_{\varphi_g}\int_0^T e^{K_g(s-T)}\left(e^{\lambda\hat{\pi}}\kappa_g l_g\Gamma e^{-\lambda s}+\frac{m}{\nu_g}\right)ds\leqslant$$

$$\frac{L_{\varphi_g}e^{\lambda\hat{\pi}}}{K_g-\lambda}\kappa_g l_g\Gamma e^{-\lambda T}+\frac{L_{\varphi_g}}{K_g}\frac{m}{\nu_g}, \tag{24}$$

$$Y_{g6}(T)\leqslant\sum_{j=1}^n(\bar{a}_{gj}+a_{gj}^*)L_{p_j}\int_0^T e^{K_g(s-T)}\left(\kappa_j l_j\Gamma e^{-\lambda s}+\frac{m}{\nu_j}\right)ds\leqslant$$

$$\frac{\sum_{j=1}^n(\bar{a}_{gj}+a_{gj}^*)L_{p_j}\kappa_j l_j}{K_g-\lambda}\Gamma e^{-\lambda T}+\frac{\sum_{j=1}^n(\bar{a}_{gj}+a_{gj}^*)L_{p_j}}{K_g}\frac{m}{\nu_j}, \tag{25}$$

$$Y_{g7}(T)\leqslant\sum_{j=1}^n(\bar{b}_{gj}+b_{gj}^*)L_{q_j}\int_0^T e^{K_g(s-T)}\left(e^{\lambda\hat{\tau}}\kappa_j l_j\Gamma e^{-\lambda s}+\frac{m}{\nu_j}\right)ds\leqslant$$

$$\frac{e^{\lambda\hat{\tau}}\sum_{j=1}^n(\bar{b}_{gj}+b_{gj}^*)L_{q_j}\kappa_j l_j}{K_g-\lambda}\Gamma e^{-\lambda T}+\frac{\sum_{j=1}^n(\bar{b}_{gj}+b_{gj}^*)L_{q_j}}{K_g}\frac{m}{\nu_j}, \tag{26}$$

$$Y_{g8}(T) \leqslant \sum_{j=1}^{n}(\bar{c}_{gj}+c_{gj}^{*})L_{h_j}\int_0^T \mathrm{e}^{K_g(s-T)}\left[\int_{s-\hat{d}}^{s}\left(\kappa_j l_j \Gamma \mathrm{e}^{-\lambda\xi}+\frac{m}{\nu_j}\right)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\frac{(\mathrm{e}^{\lambda\hat{d}}-1)\left[\sum_{j=1}^{n}(\bar{c}_{gj}+c_{gj}^{*})L_{h_j}\kappa_j l_j\right]}{\lambda(K_g-\lambda)}\Gamma\mathrm{e}^{-\lambda T}+\frac{\hat{d}\sum_{j=1}^{n}(\bar{c}_{gj}+c_{gj}^{*})L_{h_j}}{K_g}\frac{m}{\nu_j}. \tag{27}$$

由定理 2 可知

$$|G_g(T)| \leqslant \sum_{l=1}^{8}\Gamma_{gl}(T)+\frac{\mathscr{U}_g}{K_g} \leqslant l_g\Gamma\mathrm{e}^{-\lambda T}A_g+mB_g < l_g\Gamma\mathrm{e}^{-\lambda T}+m, \tag{28}$$

这与假设矛盾,因此结论成立,证明完毕.

定理 3　在定理 2 的条件以及控制器(3)下,系统(1)和(2)可以在时间 $\hat{T}$ 内达到精确度为 α 的有限时间指数同步,其中

$$\hat{T}=\frac{\ln(L\hat{\kappa}\nu)+\ln\Gamma-\ln(\alpha\beta/\sqrt{n})}{\lambda},\ L=\max_{1\leqslant i\leqslant n}l_i,\ \hat{\kappa}=\max\kappa_i.$$

证明　由定理 2 可知,对任意的 $t\geqslant-\sigma, i\in\{1,2,\cdots,n\}$, 当 $t>\hat{T}$ 时,可以得到

$$|m_i(t)| \leqslant \kappa_i l_i\Gamma\mathrm{e}^{-\lambda t}+\frac{m}{\nu_i} \leqslant \hat{\kappa}L\Gamma\mathrm{e}^{-\lambda\hat{T}}+\frac{m}{\nu} \leqslant \frac{\alpha\beta}{\nu\sqrt{n}}+\frac{(1-\beta)\alpha}{\nu\sqrt{n}} \leqslant \frac{\alpha}{\nu\sqrt{n}}.$$

即 $|m_i(t)|\leqslant\alpha, t>\hat{T}$.因此系统(1)和(2)可以在时间 $\hat{T}$ 内达到精度预分配的有限时间指数同步,证明完毕.

接下来,将证明在该事件触发控制机制下,内部执行时间存在正下界,以确保 Zeno 现象可以被排除.

定理 4　在定理 2 的条件以及事件触发条件(5)下,系统不存在 Zeno 行为,并且两个连续的事件触发间隔满足 $t-t_k\geqslant\dfrac{r|\dot{m}_i(t)+\nu_i m_i(t)|}{\hat{N}}, t\in[t_k,t_{k+1})$, 其中 $\hat{N}=\max_{1\leqslant i\leqslant n}N_i$,

$$N_i=M\left\{\left|\sum_{j=1}^{n}s_{ij}\right|+L_{\varphi_i}+\sum_{j=1}^{n}[(\bar{a}_{ij}+a_{ij}^{*})L_{p_j}+(\bar{b}_{ij}+b_{ij}^{*})L_{q_j}+(\bar{c}_{ij}+c_{ij}^{*})\hat{d}L_{h_j}]+K_i\right\}+$$

$$\sum_{j=1}^{n}|\check{a}_{ij}-\hat{a}_{ij}|\hat{P}_j+\sum_{j=1}^{n}|\check{b}_{ij}-\hat{b}_{ij}|\hat{Q}_j+\sum_{j=1}^{n}|\check{c}_{ij}-\hat{c}_{ij}|\hat{d}\hat{H}_j.$$

证明　对于 $t\in[t_k,t_{k+1})$, 有

$$|\dot{G}_i(t)| \leqslant \left|\sum_{j=1}^{n}s_{ij}m_j(t-\varepsilon_{ij})\right|+L_{\varphi_i}|m_i(t-\pi_i(t))|+$$

$$\sum_{j=1}^{n}[|\check{a}_{ij}-\hat{a}_{ij}|\hat{P}_j+(\bar{a}_{ij}+a_{ij}^{*})L_{p_j}|m_j(t)|]+$$

$$\sum_{j=1}^{n}[|\check{b}_{ij}-\hat{b}_{ij}|\hat{Q}_j+(\bar{b}_{ij}+b_{ij}^{*})L_{q_j}|m_j(t-\tau_{ij}(t))|]+$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left[|\check{c}_{ij}-\hat{c}_{ij}|\hat{d}\hat{H}_j+(\bar{c}_{ij}+c_{ij}^{*})L_{h_j}\int_{t-\hat{d}}^{t}|m_j(s)|\mathrm{d}s\right]+K_i|m_i(t_k)|. \tag{29}$$

令 $M=\hat{\kappa}L\Gamma\mathrm{e}^{-\lambda\sigma}+m/\nu$, 由定理 2 可知,对任意的 $t\geqslant-\sigma, i\in\{1,2,\cdots,n\}$, 有

$$|m_i(t)| \leqslant \kappa_i l_i\Gamma\mathrm{e}^{-\lambda t}+\frac{m}{\nu_i} \leqslant \hat{\kappa}L\Gamma\mathrm{e}^{-\lambda t}+\frac{m}{\nu} \leqslant \hat{\kappa}L\Gamma\mathrm{e}^{-\lambda\sigma}+\frac{m}{\nu} \leqslant M, \tag{30}$$

$$|\dot{G}_i(t)| \leqslant M\left\{\left|\sum_{j=1}^{n}s_{ij}\right|+L_{\varphi_i}+\sum_{j=1}^{n}[(\bar{a}_{ij}+a_{ij}^{*})L_{p_j}+(\bar{b}_{ij}+b_{ij}^{*})L_{q_j}+(\bar{c}_{ij}+c_{ij}^{*})\hat{d}L_{h_j}]+K_i\right\}+$$

$$\sum_{j=1}^{n}|\check{a}_{ij}-\hat{a}_{ij}|\hat{P}_j+\sum_{j=1}^{n}|\check{b}_{ij}-\hat{b}_{ij}|\hat{Q}_j+\sum_{j=1}^{n}|\check{c}_{ij}-\hat{c}_{ij}|\hat{d}\hat{H}_j \leqslant \hat{N}. \tag{31}$$

由测量误差定义(4)可知

$$|\epsilon_i(t)| = |\dot{m}_i(t_k)+\nu_i m_i(t_k)-\dot{m}_i(t)-\nu_i m_i(t)| = \left|\int_{t_k}^{t}\dot{G}_i(s)\mathrm{d}s\right| \leqslant \int_{t_k}^{t}|\dot{G}_i(s)|\mathrm{d}s \leqslant \hat{N}(t-t_k),$$

由事件触发条件(5)可得 $\hat{N}(t-t_k)\geqslant r|\dot{m}_i(t)+\nu_i m_i(t)|$,即

$$t-t_k\geqslant\frac{r|\dot{m}_i(t)+\nu_i m_i(t)|}{\hat{N}}.$$

证明完毕.

3 数 值 模 拟

本节将通过数值算例来验证上述结果的有效性和可行性.

例 1 考虑惯性系统(1)和(2)各个参数的取值如下:

$\varphi_1(t)=0.2+0.5\cos(t)$, $\varphi_2(t)=0.4+0.1\sin(t)$, $p_i(t)=q_i(t)=h_i(t)=0.01\tanh(t)$,

$\nu_1=\nu_2=2$, $\pi_1(t)=0.1|\sin(t)|$, $\pi_2(t)=0.1|\sin(t)|$, $\omega_1=0.4$, $\omega_2=0.3$,

$\eta_1(t)=0.8$, $\eta_2(t)=-0.5$, $\psi_1(t)=-0.7$, $\psi_2(t)=0.4$,

$$[\check{a}_{ij}]_{2\times2}=\begin{bmatrix}1.8&-1.2\\0.4&-0.6\end{bmatrix},\ [\hat{a}_{ij}]_{2\times2}=\begin{bmatrix}1.7&-1.0\\0.4&-0.5\end{bmatrix},\ [\bar{a}_{ij}]_{2\times2}=\begin{bmatrix}1.8&1.2\\0.4&0.6\end{bmatrix},$$

$$[\check{b}_{ij}]_{2\times2}=\begin{bmatrix}1.2&0.8\\-0.2&-0.3\end{bmatrix},\ [\hat{b}_{ij}]_{2\times2}=\begin{bmatrix}1.25&0.7\\-0.2&-0.1\end{bmatrix},\ [\bar{b}_{ij}]_{2\times2}=\begin{bmatrix}1.25&0.8\\0.2&0.3\end{bmatrix},$$

$$[\check{c}_{ij}]_{2\times2}=\begin{bmatrix}-1.8&0.9\\0.8&-1.5\end{bmatrix},\ [\hat{c}_{ij}]_{2\times2}=\begin{bmatrix}-1.85&1.0\\0.9&-1.3\end{bmatrix},\ [\bar{c}_{ij}]_{2\times2}=\begin{bmatrix}1.85&1.0\\0.9&1.5\end{bmatrix},$$

$$[\varepsilon_{ij}]_{2\times2}=\begin{bmatrix}0.04&0.02\\0.07&0.01\end{bmatrix},\ [\Delta a_{ij}]_{2\times2}=\begin{bmatrix}0.02\cos(t)&-0.03\sin(t)\\0.01\cos(t)+0.02&0.01\sin(t)+0.01\end{bmatrix},$$

$$[\Delta b_{ij}]_{2\times2}=\begin{bmatrix}-0.03\cos(t)&0.03\cos(t)\\0.01\sin(t)+0.02&0.01\cos(t)+0.01\end{bmatrix},$$

$$[\Delta c_{ij}]_{2\times2}=\begin{bmatrix}0.02\sin(t)&-0.01\cos(t)\\0.01\cos(t)+0.02&0.01\cos(t)+0.01\end{bmatrix},$$

$\eta_1^*(t)=0.2$, $\eta_2^*(t)=-0.1$, $\psi_1^*(t)=-0.1$, $\psi_2^*(t)=0.2$, $\Gamma=1.5$,

$\hat{P}_j=\hat{Q}_j=\hat{H}_j=L_{p_j}=L_{q_j}=L_{h_j}=0.01$, $\quad j\in\{1,2\}$,

$L_{\varphi_1}=0.7$, $L_{\varphi_2}=0.5$, $\hat{\pi}=0.1$, $\hat{\tau}=0.2$, $\hat{d}=0.2$, $\hat{\varepsilon}=0.07$, $r=0.1$,

$l_1=l_2=3$, $K_1=K_2=20$, $\alpha=0.001$, $\beta=0.02$, $\lambda=1.5$,

$$[a_{ij}^*]=\begin{bmatrix}0.02&0.03\\0.03&0.02\end{bmatrix},\ [b_{ij}^*]=\begin{bmatrix}0.03&0.03\\0.03&0.02\end{bmatrix},\ [c_{ij}^*]=\begin{bmatrix}0.02&0.01\\0.03&0.02\end{bmatrix},$$

$$[s_{ij}]_{2\times2}=\begin{bmatrix}0.01&-0.01\\-0.01&0.01\end{bmatrix},$$

$$[\tau_{ij}(t)]_{2\times2}=\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{e}^t}{1+10\mathrm{e}^t}&\dfrac{\mathrm{e}^t}{1+10\mathrm{e}^t}\\0.1\cos(t)&0.1\sin(t)+0.1\end{bmatrix},\ [d_{ij}(t)]_{2\times2}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{1+10\mathrm{e}^{-t}}&\dfrac{1}{1+10\mathrm{e}^{-t}}\\\dfrac{\mathrm{e}^t}{1+20\mathrm{e}^t}+0.1&0.2\cos(t)\end{bmatrix}.$$

通过计算可得 $A_1=0.613\,6$, $A_2=0.578\,9$, $B_1=0.807\,9$, $B_2=0.620\,7$, $\hat{T}=8.3$ 满足定理 2 的条件.图 1 与图 2 分别表示没有控制器时驱动系统与响应系统的状态曲线、误差曲线,可以看出 $\hat{T}$ 之后系统没有达到同步;图 3 与图 4 分别表示存在控制器(3)时驱动系统与响应系统的状态曲线、误差曲线,可以看出 $\hat{T}$ 之后系统达到了精度为 0.001 的同步.

图 1 表示没有控制器时两个神经元的驱动系统与响应系统的状态图.从图 1 可以看出在 15 秒内第一个神经元的驱动系统与响应系统的状态逐渐靠近,趋于同步;第二个神经元驱动系统与响应系统的状态平行延伸,二者无法达到同步状态.从图 2 可以看出第一个神经元的误差逐渐趋于 0,说明驱动系统与响应系统趋于同步;第二个神经元的误差趋于 1,说明驱动系统与响应系统无法达到同步,与图 1 相符.

图 3 表示存在本文所设计的事件触发控制器时,两个神经元的驱动系统与响应系统的状态图.从图 3 可以看出两个神经元都在 5 秒内即可达到同步.图 4 表示存在本文设计的事件触发控制器时两个神经元误差系统的状态曲线,两个神经元的误差系统都在 5 秒内趋于 0,说明两个系统都可以在 5 秒内达到同步.

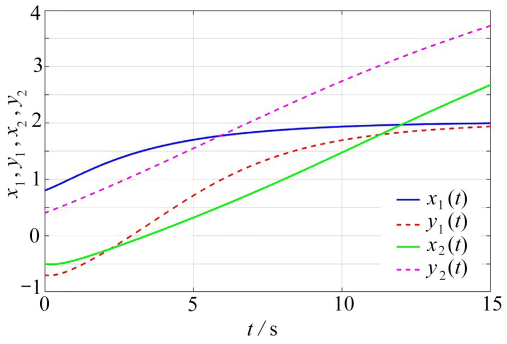


图 1　系统(1)和(2)在没有控制器下的状态曲线

Fig. 1　State curves of systems(1) and (2) without the controller

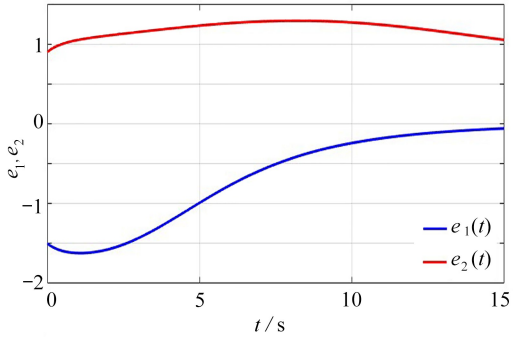


图 2　系统(1)和(2)在没有控制器下的误差曲线

Fig. 2　Error curves of systems(1) and (2) without the controller

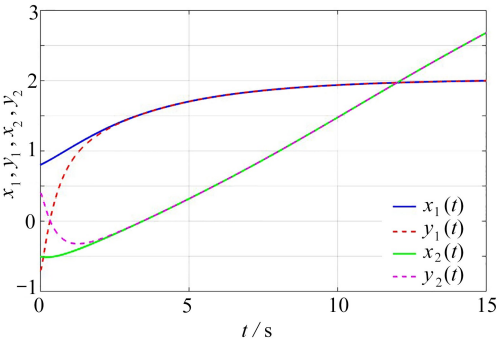


图 3　系统(1)和(2)在有控制器(3)下的状态曲线

Fig. 3　State curves of systems(1) and (2) with the controller(3)

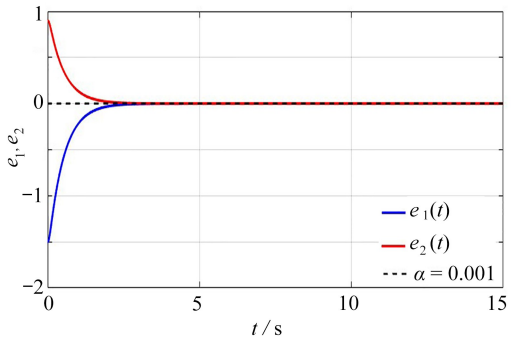


图 4　系统(1)和(2)在有控制器(3)下的误差曲线

Fig. 4　Error curves of systems(1) and (2) with the controller(3)

注　为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同.

例 2　考虑系统(1)和(2),改变忆阻连接矩阵,其余参数保持不变,忆阻连接矩阵改为

$$[\check{a}_{ij}]_{2\times2}=\begin{bmatrix}1.5 & -1.0\\ 0.3 & -0.4\end{bmatrix},\ [\hat{a}_{ij}]_{2\times2}=\begin{bmatrix}1.4 & -0.8\\ 0.3 & -0.3\end{bmatrix},$$

$$[\check{b}_{ij}]_{2\times2}=\begin{bmatrix}1.0 & 0.6\\ -0.1 & -0.2\end{bmatrix},\ [\hat{b}_{ij}]_{2\times2}=\begin{bmatrix}1.05 & 0.5\\ -0.1 & -0.1\end{bmatrix},$$

$$[\check{c}_{ij}]_{2\times2}=\begin{bmatrix}-1.5 & 0.7\\ 0.6 & -1.2\end{bmatrix},\ [\hat{c}_{ij}]_{2\times2}=\begin{bmatrix}-1.55 & 0.8\\ 0.7 & -1.0\end{bmatrix},$$

$$[\bar{a}_{ij}]_{2\times2}=\begin{bmatrix}1.5 & 1.0\\ 0.3 & 0.4\end{bmatrix},\ [\bar{b}_{ij}]_{2\times2}=\begin{bmatrix}1.05 & 0.6\\ 0.1 & 0.2\end{bmatrix},\ [\bar{c}_{ij}]_{2\times2}=\begin{bmatrix}1.55 & 0.8\\ 0.7 & 1.2\end{bmatrix},$$

此时计算可知满足定理 2 的条件,接下来将讨论此时系统在图像加密解密中的应用.

选用彩色图像(“彩色图像”(256×256)和“辣椒图像”(256×256)),然后提取原始图像三个颜色分量的像素矩阵,分别用 $\boldsymbol{R}(p,q)$,$\boldsymbol{G}(p,q)$ 和 $\boldsymbol{B}(p,q)$ 表示,其中 $p\in\{1,2,\cdots,256\}$,$q\in\{1,2,\cdots,256\}$,并且每个像素是 0~255 之间的整数.

采样阶段,从 $\hat{T}$ 之后的混沌序列中截取前 65 536(256×256)个数据点,分别对应三个混沌序列 $x_1(t)$,$x_2(t)$ 和 $x_3(t)=0.5(\dot{x}_1(t)+\dot{x}_2(t))$.将这些一维序列重塑为 256×256 的二维混沌矩阵 $\boldsymbol{X}_1(p,q)$,$\boldsymbol{X}_2(p,q)$ 和 $\boldsymbol{X}_3(p,q)$.

置换阶段通过改变像素位置打破图像的空间相关性.具体过程为:对混沌序列进行排序,获得排序索引序列

$O_i = \text{argsort}(x_i(t))$, $i \in \{1,2,3\}$, 该索引序列定义了置换矩阵 $\boldsymbol{H}$.置换矩阵 $\boldsymbol{H}$ 满足正交性条件 $\boldsymbol{H}^{-1} = \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}$, 且每行每列仅有一个元素为 1,确保了置换操作的可逆性.置换后的矩阵表示为 $\boldsymbol{C}'(p,q)$, $\boldsymbol{C} \in \{\boldsymbol{R},\boldsymbol{G},\boldsymbol{B}\}$.

扩散阶段通过改变图像的像素值,将一个像素信息扩散到多个像素中,从而实现对图像的加密.对每个矩阵应用密钥生成公式 $\boldsymbol{K}_c = \text{mod}(\text{floor}(10^{10} \times |\boldsymbol{X}_c(p,q)|),256)$, $c \in \{1,2,3\}$ 分别对应 $\boldsymbol{R},\boldsymbol{G},\boldsymbol{B}$ 通道.该操作将混沌序列的连续值离散化为 0~255 范围内的密钥序列.将生成的密钥矩阵与置换后的像素矩阵进行异或操作: $\boldsymbol{C}''(p,q) = \boldsymbol{K}_c(p,q) \oplus \boldsymbol{C}'(p,q)$, $\boldsymbol{C} \in \{\boldsymbol{R},\boldsymbol{G},\boldsymbol{B}\}$ 其中⊕表示异或运算.这一操作将每个像素的原始信息扩散到整个图像中,显著改变了图像的统计特性.

解密时首先使用相同的密钥生成流程产生解密密钥,然后对密文图像执行逆异或操作 $\boldsymbol{C}'(p,q) = \boldsymbol{K}_c(p,q) \oplus \boldsymbol{C}''(p,q)$, 恢复置换后的像素值.最后利用置换索引的逆置换 $O^{-1} = \text{argsort}(O)$ 对像素位置进行还原,重建原始图像.图 5 展示了图像加密解密的效果,图 6 与图 7 分别展示了“彩色图像”与“辣椒图像”的直方图,表 1—4 展示了两个图像的相关系数与信息熵,由图表可知此加密算法效果良好.

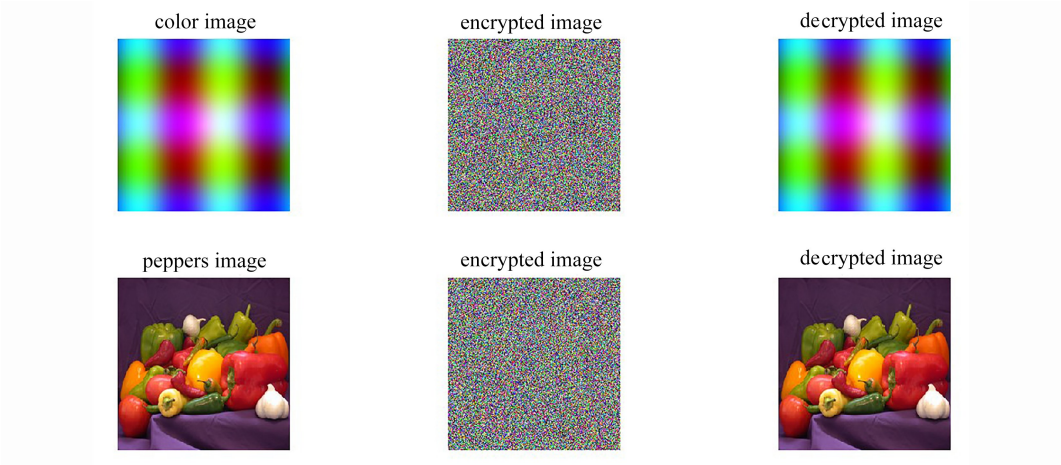


图 5 “彩色图像”与“辣椒图像”的原始图像、加密图像和解密后图像

Fig. 5 Original images, encrypted images, and decrypted images of the “color image” and “peppers image”

表 1 图像在水平方向上的相关系数

Table 1 The correlation coefficients of the images in the horizontal direction

color image	original image	encrypted image
R	0.999 8	−0.000 6
G	1.000 0	−0.001 8
B	0.998 8	−0.000 7
peppers image	original image	encrypted image
R	0.984 7	0.001 5
G	0.977 7	0.001 9
B	0.968 8	−0.004 1

表 2 图像在垂直方向上的相关系数

Table 2 The correlation coefficients of the images in the vertical direction

color image	original image	encrypted image
R	0.999 8	0.006 9
G	0.998 7	0.003 0
B	1.000 0	−0.001 0
peppers image	original image	encrypted image
R	0.986 0	−0.001 5
G	0.979 4	−0.002 1
B	0.976 5	−0.004 5

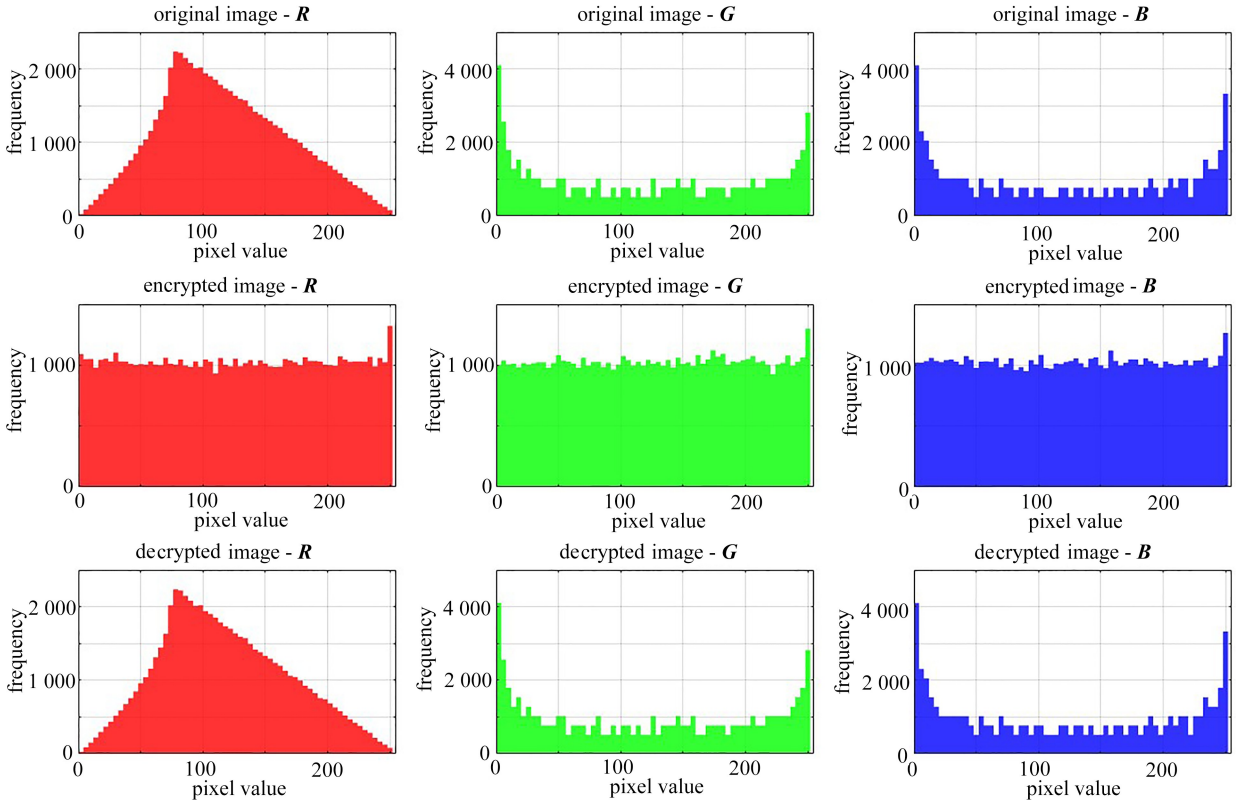


图 6　“彩色图像”的原始图像、加密图像和解密后图像直方图

Fig. 6　Histograms of the original images, encrypted images, and decrypted images for the“color image”

表 3　图像在对角方向上的相关系数

Table 3　The correlation coefficients of the images in the diagonal direction

color image	original image	encrypted image
R	0.999 6	0.002 7
G	0.998 7	0.000 6
B	0.998 8	0.002 2
peppers image	original image	encrypted image
R	0.972 4	0.005 0
G	0.960 2	0.007 8
B	0.950 5	0.001 6

表 4　图像的信息熵

Table 4　Information entropy of images

color image	original image	encrypted image
R	7.670 7	7.997 0
G	7.322 1	7.996 9
B	7.103 8	7.997 0
peppers image	original image	encrypted image
R	7.180 2	7.997 2
G	7.014 6	7.997 0
B	6.800 2	7.997 3

从上述图表可知,加密后图像的相关系数接近 0,说明加密后图像与原图像相关联程度为 0,图像破坏得彻底,信息熵接近 8,说明图像的复杂性很高,从解密图像及其直方图可知解密效果很好.文献[23]利用四元

数神经网络的混沌特性对图像进行了加密解密应用,为了客观评价加密算法的效果,表 5 展示了本文的“彩色图像”与文献[23]中彩色辣椒图像加密与解密前后水平和垂直相关系数的结果对比.表 6 展示了本文算法与文献[23-24]中的图像加密解密结果的信息熵对比.由对比可知,本文的加密算法相关系数更低,信息熵更接近 8,说明算法具有显著优势.

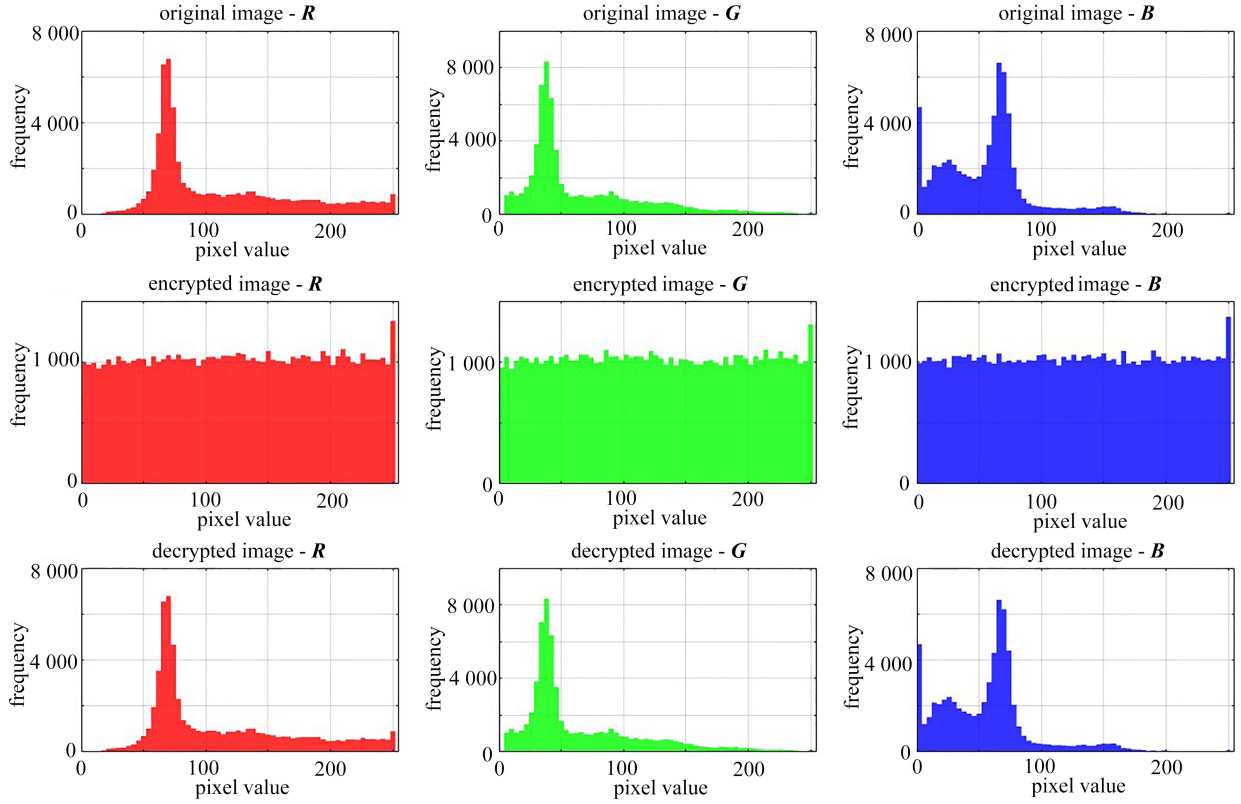


图 7 “辣椒图像”的原始图像、加密图像和解密后图像直方图

Fig. 7 Histograms of the original images, encrypted images, and decrypted images for the“peppers image”

表 5 相关系数对比

Table 5 Comparison of correlation coefficients

	correlation coefficient			
	original image		encrypted image	
	ref. [23]	this paper	ref. [23]	this paper
horizontal	0.983 7	0.999 5	0.033 7	−0.001 0
vertical	0.978 0	0.999 5	0.030 9	0.003 0

表 6 信息熵对比

Table 6 Comparison of information entropy

	information entropy					
	original image			encrypted image		
	ref. [23]	ref. [24]	this paper	ref. [23]	ref. [24]	this paper
R	7.300 9	7.338 8	7.670 7	7.988 4	7.991 2	7.997 0
G	7.523 0	7.496 3	7.322 1	7.990 0	7.990 9	7.996 9
B	7.060 4	7.058 3	7.103 8	7.989 7	7.998 6	7.997 0

4 结　论

本文针对一类具有混合时滞与不确定参数的惯性忆阻神经网络的精度预分配有限时间指数同步问题,通过事件触发机制、反证法、降阶法相结合的方式进行研究,得到了相关的判定准则.此外,严格证明了所设计的事件触发控制器能够使系统避免 Zeno 现象.数值仿真验证了所得结果的有效性与实用性.本文所用的证明方法与传统的 Lyapunov 函数法相比简化了计算过程,不用构造泛函以及进行正定性分析,并且在有限时间同步以及控制性能方面,本文采用的控制方法将精度预分配同步与事件触发机制相结合,在提高资源利用率的同时,可以要求驱动系统与响应系统在预先给定的精确度下达到同步.因此,本文所提出的方法不仅在理论分析层面提供了更为简捷的路径,同时在工程应用领域展现出显著潜力.该方法为实现资源受限环境下神经网络系统的高效、精确协同控制,提供了一种兼具理论严谨性与实践可行性的解决方案,但是当系统面临更加复杂的情形,如随机扰动、多稳定性及更复杂时滞时,本文的控制方法仍需进一步改进.

参考文献(References):

[1] Tan X, Xiang C, Cao J, et al. Synchronization of neural networks via periodic self-triggered impulsive control and its application in image encryption[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, **52**(8): 8246-8257.

[2] Song S S, Liu J, Guo J N, et al. Neural-network-based AUV navigation for fast-changing environments[J]. *IEEE Internet of Things Journal*, 2020, **7**(10): 9773-9783.

[3] Hu B, Guan Z H, Chen G, et al. Multistability of delayed hybrid impulsive neural networks with application to associative memories[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2019, **30**(5): 1537-1551.

[4] Chua L. Memristor-the missing circuit element[J]. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 1971, **18**(5): 507-519.

[5] Chen J L, Sun W G, Zheng S. New predefined-time stability theorem and synchronization of fractional-order memristive delayed BAM neural networks[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2025, **148**: 108850.

[6] Wang H Y, Liu S T, Wu X, et al. Synchronization of fractional delayed memristive neural networks with jump mismatches via event-based hybrid impulsive controller[J]. *Fractal and Fractional*, 2024, **8**(5): 297.

[7] Kacprzak T, Kowalski J. Cellular neural network implementation based on continuously programmable gain CMOS current amplifier[J]. *Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji*, 2000, **46**(3): 321-337.

[8] Arena P, Fortuna L, Porto D. Chaotic behavior in noninteger-order cellular neural networks[J]. *Physical Review E*, 2000, **61**(1): 776-781.

[9] Grassi G, Di Sciascio E. Learning algorithm for pattern classification using cellular neural networks[J]. *Electronics Letters*, 2000, **36**(23): 1941-1943.

[10] Lin J S. Annealed Hopfield neural network with moment and entropy constraints for magnetic resonance image classification [J]. *IEICE Transactions on Information and Systems*, 2000, **E83-D**(1): 100-108.

[11] Guan Z H, Chen G R. On delayed impulsive Hopfield neural networks[J]. *Neural Networks*, 1999, **12**(2): 273-280.

[12] Lu W L, Chen T P. New conditions on global stability of Cohen-Grossberg neural networks[J]. *Neural Computation*, 2003, **15**(5): 1173-1189.

[13] Wang L. Stability of Cohen-Grossberg neural networks with distributed delays[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2005, **160**(1): 93-110.

[14] Xiong W J, Cao J D. Global exponential stability of discrete-time Cohen-Grossberg neural networks[J]. *Neurocomputing*, 2005, **64**: 433-446.

[15] Babcock K L, Westervelt R M. Stability and dynamics of simple electronic neural networks with added inertia [J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1986, **23**(1/2/3): 464-469.

[16] Wheeler D W, Schieve W C. Stability and chaos in an inertial two-neuron system[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1997, **105**(4): 267-284.

[17] Li Q, Zhou L Q. Global polynomial stabilization of proportional delayed inertial memristive neural networks [J]. *Information Sciences*, 2023, **623**: 729-747.

[18] Rakkiyappan R, Gayathri D, Velmurugan G, et al. Exponential synchronization of inertial memristor-based neural networks with time delay using average impulsive interval approach[J]. *Neural Processing Letters*, 2019, **50**(3): 2053-2071.

[19] Jiang P, Chen J J, Chen B S, et al. A novel adaptive event-triggered controller for exponential quasi-synchronization and synchronization problems to coupled inertial memristive neural networks with time delays[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2025, **460**: 116426.

[20] Yao W, Wang C H, Sun Y C, et al. Event-triggered control for robust exponential synchronization of inertial memristive neural networks under parameter disturbance[J]. *Neural Networks*, 2023, **164**: 67-80.

[21] Cong E Y, Wang Y T, Zhang X, et al. A new approach for accuracy-preassigned finite-time exponential synchronization of neutral-type Cohen-Grossberg memristive neural networks involving multiple time-varying leakage delays[J]. *AIMS Mathematics*, 2025, **10**(5): 10917-10942.

[22] 郭昱贤, 周立群. 一类具有不确定参数的比例时滞忆阻神经网络的全局指数同步[J]. 应用数学和力学, 2026, **47**(1): 101-112.(Guo Yuxian, Zhou Liqun. Global exponential synchronization of a class of memristive neural networks with proportional delays and uncertain parameters[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2026, **47**(1): 101-112. (in Chinese))

[23] Li C, Kou K I, Zhang Y, et al. Advancements in exponential synchronization and encryption techniques: quaternion-valued artificial neural networks with two-sided coefficients[J]. *Neural Networks*, 2025, **183**: 106982.

[24] Liu L, Lei M, Bao H. Event-triggered quantized quasisynchronization of uncertain quaternion-valued chaotic neural networks with time-varying delay for image encryption[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2023, **53**(5): 3325-3336.