ⓒ 应用数学和力学编委会, ISSN 1000-0887

http://www.applmathmech.cn

水下结构声振耦合随机响应分析的新型混合计算方法*

侯思远[1]，　习　强[1]，　陈翰澍[1,2]，
刘帅男[1]，　傅卓佳[1]

(1. 河海大学 力学与工程科学学院, 南京 211100;
2. 大连理工大学 工业装备结构分析优化与 CAE 软件全国重点实验室, 辽宁 大连 116024)

(我刊青年编委傅卓佳来稿)

摘要： 随着深海资源开发与海洋工程的快速发展,水下结构所面临的振动与噪声环境日益复杂.因此,研究其在复杂随机激励下的声振耦合响应变得至关重要.传统确定性分析方法难以准确刻画真实海洋环境中存在的多重不确定性因素,例如随机载荷、材料参数及几何偏差等对声学性能的影响.为此,本文采用一种融合物理信息核函数神经网络(physics-informed kernel function neural networks, PIKFNNs)与直接概率积分法(direct probability integral method,DPIM)的混合数值方法,用于海洋环境下结构随机声振响应的不确定性高效量化分析.具体而言,首先利用有限元法(finite element method,FEM)计算近场声压作为训练数据,以驱动 PIKFNNs 学习声场映射关系;随后,将预测声压级视为由系统随机参数如声速、密度及激励力决定的随机变量,并结合 DPIM 求解其概率密度积分方程(probability density integral equation,PDIE),从而实现了对声压级统计特性的高精度预测.通过数值算例验证了所提方法的有效性,并研究了无界海域与深海环境中随机参数对声学性能的影响.本方法为复杂海洋装备的声学可靠性评估与水下多结构问题的研究提供了新的技术工具.

关　键　词： 不确定性量化；　物理信息核函数神经网络；　直接概率积分法；　声振耦合；　随机响应
中图分类号： O34　　**文献标志码：** A　　DOI: 10.21656/1000-0887.460242

A Novel Hybrid Computational Method for Random Response Analysis of Vibroacoustically Coupled Underwater Structures

Hou Siyuan[1], Xi Qiang[1], Chen Hanshu[1,2],
Liu Shuainan[1], Fu Zhuojia[1]

(1. *College of Mechanics and Engineering Science*, *Hohai University*, *Nanjing* 211100, *P.R. China*;
2. *State Key Laboratory of Structural Analysis*, *Optimization and CAE Software for Industrial Equipment*, *Dalian University of Technology*, *Dalian*, *Liaoning* 116024, *P.R. China*)

(Contributed by Fu Zhuojia, Member of the Youth Editorial Board of AMM)

* **收稿日期：** 2025-12-29; **修订日期：** 2026-01-30
基金项目： 国家自然科学基金(12372196;12302258;12402238);中央高校基本科研业务费(B250201051;B250201235);大连理工大学工业装备结构分析优化与 CAE 软件全国重点实验室开放基金(GZ25119)
作者简介： 侯思远(2001—),男,硕士生(E-mail: 231308010015@hhu.edu.cn);
傅卓佳(1985—),男,教授,博士生导师(通信作者. E-mail: paul212063@hhu.edu.cn).
引用格式： 侯思远, 习强, 陈翰澍, 刘帅男, 傅卓佳. 水下结构声振耦合随机响应分析的新型混合计算方法[J]. 应用数学和力学, 2026, **47**(10): 1243-1253.

Abstract: With the rapid development of deep-sea resource exploitation and marine engineering, underwater structures face increasingly complex vibrational and acoustic environments. Consequently, investigating the vibroacoustic coupling responses of these structures under complex stochastic excitations becomes critically important. Traditional deterministic analysis methods are inadequate for accurately characterizing the influences of multiple uncertainties inherent in real marine environments, such as random loads, material parameters, and geometric deviations, on acoustic performances. To address this, a hybrid numerical method integrating physics-informed kernel function neural networks (PIKFNNs) with the direct probability integral method was proposed for the efficient uncertainty quantification of structural random vibroacoustic responses in marine environments. Specifically, the near-field sound pressure, initially computed via the finite element method, was used as training data to drive the physics-informed kernel function dependent on system stochastic parameters, such as the sound speed, the density, and the excitation force, to learn the acoustic field mapping. Subsequently, the predicted sound pressure treated as a random variable was then employed to solve the corresponding probability density integral equation, thereby to achieve high-precision prediction of the statistical characteristics of the sound pressure level. The effectiveness of the proposed method was validated through numerical examples. Furthermore, the influence of stochastic parameters on acoustic performance was investigated in scenarios involving unbounded sea areas and deep-sea settings. This method provides a novel technical tool for the acoustic reliability assessment of complex marine equipment and for research concerning underwater multi-structure interaction problems.

Key words: uncertainty quantification; physics-informed kernel function neural network; direct probability integral method; vibro-acoustic coupling; stochastic response

0 引 言

近年来,随着深海资源勘探、海底油气开采及对海洋可再生能源开发等活动的持续推进,海洋经济建设的重心逐渐由近海走向深远海.在此背景下,复杂海洋环境中的各类海洋装备,例如水下生产系统、深海潜器及海上风电基础结构,所面临的运行环境日趋严峻.这些装备在水下复杂随机激励下引起的声振耦合响应问题,已成为直接影响其运行安全及声学隐身性能的关键因素,因而受到学术界与工程界的广泛关注.然而,真实海洋环境中充满多源不确定性激励,同时装备材料属性、连接界面参数等亦存在固有随机性,使得传统确定性分析方法难以准确描述其真实力学行为.此外,在多结构系统中,结构间的声学相互作用进一步加剧了响应分析的复杂性.因此,发展能够兼顾计算效率与精度的声振耦合不确定性量化方法,实现水下声辐射与传播特性的精准预测,对于提升我国海洋装备的声学可靠性具有重要价值.

数值模拟已成为研究此类复杂声振耦合问题的关键工具[1-4].其中,有限元法(FEM)因其在处理复杂结构动力学问题方面的高度适应性,已成为分析结构振动与近场声学问题的常用手段.然而,在模拟无界域声场时,FEM 需引入人工截断边界,易引入非物理反射误差;同时其计算规模随频率升高而急剧增长,严重制约了其在高频声学问题中的应用.为突破上述局限,研究者们常将 FEM 与边界型方法相结合.例如,边界元法(boundary element method, BEM)[5-6]、基本解法(method of fundamental solutions, MFS)[7-8]及奇异边界法(singular boundary method, SBM)[9-11]等方法天然满足无穷远辐射条件,在模拟外域声场方面具有显著优势.这类 FEM-边界型混合方法[12-14]能够充分发挥各自优势,有效提升声振耦合问题的计算效率与精度[15-16].

近年来,以物理信息神经网络(physics-informed neural networks, PINNs)为代表的机器学习方法展现出巨大潜力[17-19].Fu 等[20]提出的物理信息核函数神经网络(PIKFNNs)将满足控制方程的解析核函数作为激活函数,构建了一种浅层网络架构.该方法嵌入了物理先验知识,使其天然满足无穷远辐射条件,从而无需像 FEM 那样进行人工截断.显著降低了对训练数据的依赖和计算成本,在三维声学问题中已表现出良好的性能[21].因此,本文将 FEM 与 PIKFNNs 结合,发展出一种混合数值方法,用以高效求解复杂水下声辐射问题.

在随机结构分析中,Fokker-Planck-Kolmogorov(FPK)方程曾是主要工具[22],但其求解通常需耦合物理

方程,过程复杂.基于概率守恒原理,Li 和 Chen[23]推导出了广义密度演化方程(generalized density evolution equation, GDEE),为获取响应概率密度函数(probability density function, PDF)提供了新途径.然而,GDEE 的数值求解仍具挑战性.为此,Li 和 Chen[24-25]进一步提出概率密度积分方程(PDIE),并发展了直接概率积分法(DPIM).该方法通过概率空间划分与 Dirac 函数光滑化技术,实现了物理方程与概率演化方程的解耦求解,且不受 Courant-Friedrichs-Lewy 条件限制[26-27],适用于包括三维多结构系统在内的复杂随机分析[28].鉴于 PIKFNNs 与 DPIM 的高效性,研究采用一种混合数值方法,用于分析无限域或半无限域(具体海洋环境为无界海洋与深海环境)中的水下结构的随机声振响应.首先,利用 FEM 计算水下有限域内结构的声振耦合问题得到近场声压,以此作为训练数据驱动 PIKFNNs 学习声场映射关系得到无限域或半无限域的声压;随后,将预测的声压级视为随机变量,结合 DPIM 求解 PDIE,实现水下声压级响应的不确定性量化.

1　确定性水声场计算模型

通过将 FEM 与 PIKFNNs 结合,实现海洋环境下声场的高精度模拟与快速预测.

1.1　有限元声振耦合分析模型

图 1 描绘了无界海洋中结构-声学相互作用系统的示意图.球壳中心区域受到周向分布的水平荷载,底部受到垂直荷载.该结构浸没于海洋表面以下特定深度处.在频域中,可推导出该耦合系统的控制方程.考虑由谐波力激发的结构振动,其形式为 $\boldsymbol{F}(t)=\boldsymbol{f}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$,其中 $\boldsymbol{f}$ 为振幅参数,i 表示虚单位,ω 为角频率.其控制方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{U}}(t)+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{U}}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}(t)=\boldsymbol{F}(t), \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{M}$,$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 分别表示质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵,$\boldsymbol{U}(t)$ 表示节点位移.设 $\boldsymbol{U}(t)=\boldsymbol{u}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$,其中 $\boldsymbol{u}$ 表示结构位移,可推导出振动方程:

$$(\boldsymbol{K}_{\mathrm{v}}+\mathrm{i}\omega\boldsymbol{C}_{\mathrm{v}}-\omega^2\boldsymbol{M}_{\mathrm{v}})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}_{\mathrm{v}}, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{v}}$ 为结构激振力,$\boldsymbol{M}_{\mathrm{v}}$,$\boldsymbol{C}_{\mathrm{v}}$ 和 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{v}}$ 分别为结构的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵.类似地,声传播方程可以写成

$$(\boldsymbol{K}_{\mathrm{j}}+\mathrm{i}\omega\boldsymbol{C}_{\mathrm{j}}-\omega^2\boldsymbol{M}_{\mathrm{j}})\boldsymbol{p}=\boldsymbol{f}_{\mathrm{j}}, \tag{3}$$

式中 $\boldsymbol{p}$ 为水下声压,$\boldsymbol{f}_{\mathrm{j}}$ 为声激励力,$\boldsymbol{M}_{\mathrm{j}}$,$\boldsymbol{C}_{\mathrm{j}}$ 和 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{j}}$ 分别为声传播的质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵.在海洋环境中,弹性结构的振动与水声波的传播,必须满足力和位移连续性的条件.由此,可以推导出以下结构-声耦合分析模型:

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{\mathrm{v}}+\mathrm{i}\omega\boldsymbol{C}_{\mathrm{v}}-\omega^2\boldsymbol{M}_{\mathrm{v}} & \boldsymbol{K}_{\mathrm{k}}\\ -\omega^2\boldsymbol{K}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{K}_{\mathrm{j}}+\mathrm{i}\omega\boldsymbol{C}_{\mathrm{j}}-\omega^2\boldsymbol{M}_{\mathrm{j}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{p}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_{\mathrm{vj}}\\ \boldsymbol{f}_{\mathrm{kj}}\end{bmatrix}, \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{vj}}$ 和 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{kj}}$ 为耦合激励力,$\boldsymbol{K}_{\mathrm{k}}$ 为耦合刚度矩阵.该耦合系统可直接通过 FEM 求解,获得近场声压.

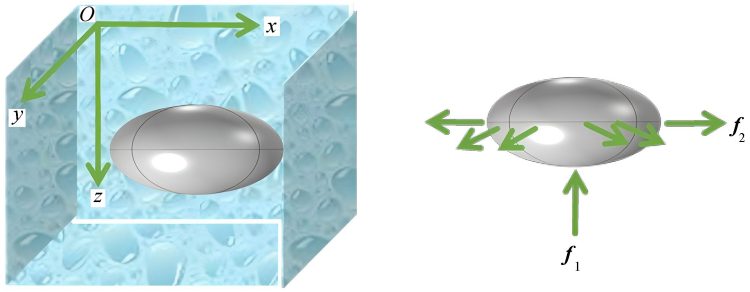


图 1　无界海洋中结构声振耦合系统示意图

Fig. 1　Schematic diagram of a structural acoustic coupling system in an unbounded ocean

注　为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同.

1.2　PIKFNNs 神经网络

基于线性声波理论,海洋环境下时谐线性声学系统的控制方程为 Helmholtz 方程:

$$\nabla^2 p(\boldsymbol{x}) + k^2 p(\boldsymbol{x}) = 0, \tag{5}$$

其中 $p(\boldsymbol{x})$ 为节点 x 处的声压，k 为波数.

在无界海洋中仅需考虑结构振动的影响，式(6)为辐射声波传播的 PIKF，其天然满足无界海洋中无穷远辐射条件：

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr_i}}{r_i}. \tag{6}$$

在深海海洋中考虑结构振动和海面反射的影响，式(7)为辐射声波传播的 PIKF，其天然满足深海海洋中无穷远辐射条件：

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr_i}}{r_i} - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr_j}}{r_j}, \tag{7}$$

其中 $r_i = \sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 + (x_3 - s_3)^2}$，为样本节点 $\boldsymbol{x}(x_1,x_2,x_3)$ 与排列在结构面外的源节点 $\boldsymbol{s}(s_1,s_2,s_3)$ 之间的欧氏距离.另外，$r_j = \sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 + (2h - x_3 - s_3)^2}$，其中 h 表示海洋表面与结构中心之间的垂直距离.为了减轻多层神经网络的计算负担，Fu 等[20]提出了基于 PIKF 的单隐藏层神经网络，将先验物理信息嵌入到神经网络中.如图 2 所示，PIKFNNs 是一种全连接的神经网络，包括一个隐藏层、一个输入层和一个输出层，其隐藏层的神经元数量与配置的源点数目一致.$\boldsymbol{\psi}$ 表示深海环境下水声传播的 PIFK 激活函数，自然满足物理控制方程，$\bar{k}$ 是某些 PIFK 中对应的超参数，$\bar{\boldsymbol{w}}$ 表示可学习的权重矩阵，b 表示边界条件，其中，水声传播的损失函数可定义为

$$\delta_{\mathrm{Loss}} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\left(P_{\mathrm{PIKFNN}}(x_j) - b(x_j)\right)^2. \tag{8}$$

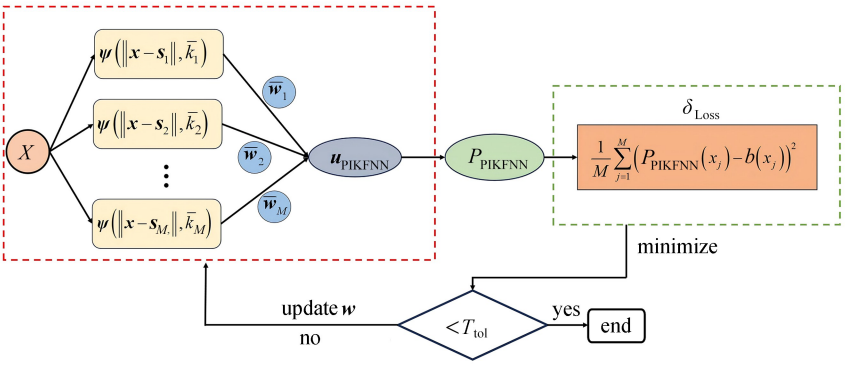


图 2 PIKFNNs 的数值方案

Fig. 2 The numerical scheme of PIKFNNs

本文采用 Levenberg-Marquardt (LM)优化算法作为优化器，用于训练损失函数并迭代更新网络参数.该算法结合了梯度下降法与 Gauss-Newton 法的优点，能在迭代过程中动态调整步长，在收敛速度与稳定性之间取得良好平衡.PIKFNNs 的训练目标是最小化损失函数：

$$\boldsymbol{p} = \arg\min_{\boldsymbol{p}} \delta_{\mathrm{Loss}}. \tag{9}$$

设定容差后，LM 算法的停止准则为：若

$$\max|\boldsymbol{p}^j - \boldsymbol{p}^{j-1}| < T_{\mathrm{tol}} \quad \text{or} \quad |\delta_{\mathrm{Loss}}(\boldsymbol{p}^j) - \delta_{\mathrm{Loss}}(\boldsymbol{p}^{j-1})| < T_{\mathrm{tol}},$$

则停止迭代，上标 j 表示第 j 次迭代.通过上述训练，训练后的 PIKFNNs 可用于新数据来预测水下声压.本文将预测的水下声压确定为随机变量，用于构建随机动力系统.借助 DPIM，可以进一步推导出由随机性引起的水下声压的概率密度演化方程，进一步评估分析水下结构的力学行为.

2 随机计算模型

随机动力系统的概率守恒原理可表述为如下公式：

$$\int_{\Omega X} P_X(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\Omega\Theta 0} P_{\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{\theta},t_0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}, \tag{10}$$

式中 $\boldsymbol{\Theta}$ 为随机输入,包括初始时刻动力系统中考虑的所有随机因素, $\boldsymbol{X}$ 为随机输出, $P_{\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{\theta},t_0)$ 和 $P_X(\boldsymbol{x},t)$ 分别表示 $\boldsymbol{\Theta}$ 和 $\boldsymbol{X}$ 在任意时刻对应的 PDF .输入响应和输出响应之间的物理关系可以用确定性映射来描述:

$$\boldsymbol{\zeta}:\ \boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta},t), \tag{11}$$

式中 $\boldsymbol{g}$ 为系统输入输出的映射函数.由方程(10)、(11)可得 $P_X(\boldsymbol{x},t)$:

$$P_X(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{|\boldsymbol{J}_g(\boldsymbol{\theta})|} P_{\boldsymbol{\Theta}}[\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{x},t)], \tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{J}_g(\boldsymbol{\theta})$ 表示 Jacobi 矩阵.然而,在大多数随机动力系统中映射 $\boldsymbol{g}$ 通常是隐式的,对应的 $\boldsymbol{g}^{-1}$ 和 $\boldsymbol{J}_g(\boldsymbol{\theta})$ 很难直接计算.借助 Dirac 函数,式(11)可转化为系统的 PDIE:

$$P_X(\boldsymbol{x},t) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} P_{\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{\theta})\delta[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta},t)]\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}. \tag{13}$$

由于 Dirac 函数的奇异性,PDIE 难以解析求解.为此,基于概率空间剖分与 Dirac 函数光滑化技术,DPIM 被提出,进而得到 PDIE 的数值计算公式:

$$P_{X_\gamma}(\boldsymbol{x}_\gamma,t) = \sum_{q=1}^{N_{\mathrm{rep}}}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,\mathrm{e}^{\frac{-[\boldsymbol{x}_\gamma - \boldsymbol{g}_\gamma(\boldsymbol{\theta}_q,t)]^2}{2\sigma^2}}\boldsymbol{P}_q\right\}, \tag{14}$$

其中 N_{rep} 为概率空间剖分的代表点数目, $\boldsymbol{g}_\gamma(\boldsymbol{\theta}_q,t)$ 表示代表性响应, $\boldsymbol{P}_q$ 表示代表点的赋得概率, σ 为对应的光滑参数.利用式(14),可以高效地计算出随机结构中所关心响应的 PDF .

3　数值算例

为评估所提混合方法的性能并探究不同随机工况对声压级与其 PDF 分布的影响,本节设计了一系列数值算例.所有算例均基于几何参数为 $a = c = 1$ m, $b = 1.5$ m,厚度 $h = 0.002$ m 的椭球壳.考虑壳的弹性模量 $E = 210$ GPa,Poisson 比 $\nu = 0.3$, 密度 $\rho = 7\,800$ kg/m^3.底部受到的垂直调和集中力 f_1, 球壳中部区域受到的水平调和分布力 f_2.定义海水声速和海水密度分别为 $c_0 = 1\,500$ m/s 和 $\rho_0 = 1\,030$ kg/m^3.使用 COMSOL 构建三维模型,用 FEM 计算水下三维椭球壳的声振耦合问题得到近场水声压力,生成 200 个训练样本(对应 PIKFNNs 中 200 个神经元)用于 PIKFNNs 训练,随后将预测的声压级视为随机变量,结合 DPIM 求解 PDIE,实现水下声压级响应的不确定性量化.整体计算流程如图 3 所示.在后续各算例中,将在此统一设置的基础上,分别引入不同的随机变量、海洋环境以及多结构配置,以针对性地研究各类因素对水下随机声振响应的影响机制.

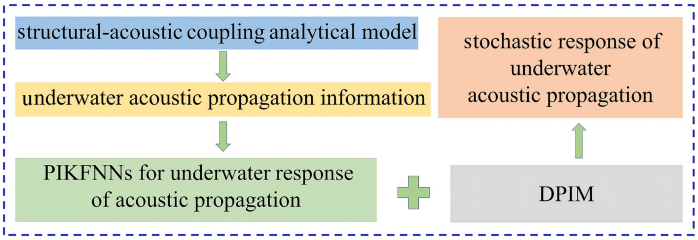


图 3　混合数值计算过程示意图

Fig. 3　Schematic diagram of the hybrid numerical computation process

3.1　算例 1

首先研究深海环境中椭球壳在随机垂直荷载作用下的声振响应,以验证算法的可靠性.结构浸泡在深海海洋中,球壳中部区域受到的水平调和分布力 $f_2 = 2$ N,选取两个测试点进行验证:节点 1 的坐标为(20 m,10 m,20 m),节点 2 的坐标为(4 m,2 m,7 m).在 100~300 Hz 频段内,通过 COMSOL 与 PIKFNNs 分别计算节点 1 的声压级与 200 Hz 下椭球壳附近三维近场声压级;在 100 Hz 频率下,将垂直集中力 f_1 设置为符合对数正态分布的随机变量,均值为 1 N,通过 DPIM 与 Monte-Carlo 模拟(Monte-Carlo simulation, MCS)分别计算节点 2 的声压级 PDF 与累积概率分布.

图 4 显示,在 100~300 Hz 范围内,PIKFNNs 预测的声压级与 COMSOL 有限元仿真结果高度吻合,验证了该方法的准确性.图 5 给出了两种方法三维近场声压级云图对比,二者分布形态一致,表明该方法可有效准确地描述声场的空间分布.图 6 为 DPIM 与 MCS 所得声压级 PDF 曲线与声压级累积概率分布曲线的对比,二者吻合良好,证明了该方法在统计特性预测上的可靠性,且在相同工况下 MCS 耗时 209.88 h,DPIM 仅需 24.32 h,计算效率约为前者的 8.6 倍.

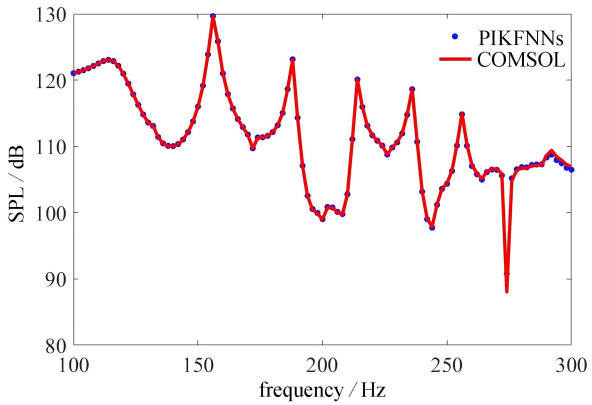
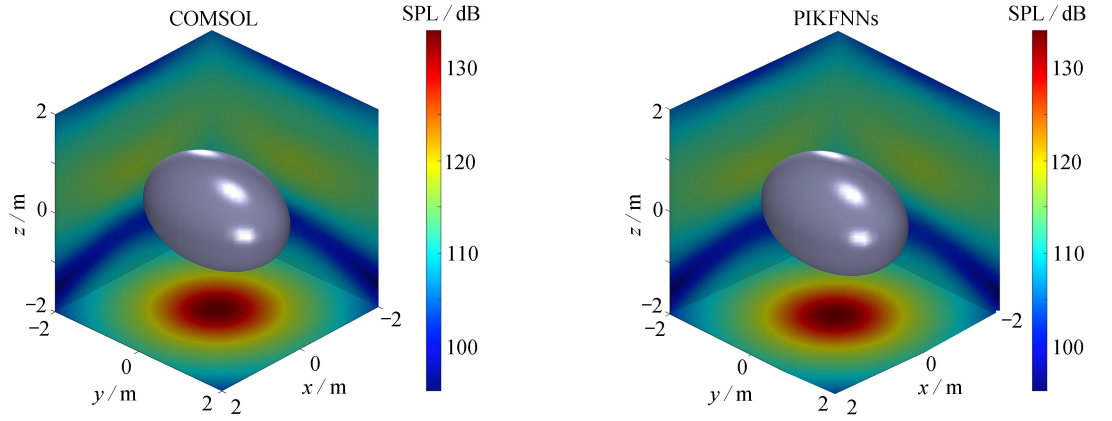


图 4 PIKFNNs 与 COMSOL 声压级计算结果对比

Fig. 4 Comparison of sound pressure level(SPL) calculations between PIKFNNs and COMSOL



(a) COMSOL 三维声压级云图

(a) The 3D SPL contour plot from COMSOL

(b) PIKFNNs 三维声压级云图

(b) The 3D SPL contour plot from PIKFNNs

图 5 PIKFNNs 与 COMSOL 三维近场声压级计算结果对比

Fig. 5 Comparison of 3D near-field SPL calculations between PIKFNNs and COMSOL

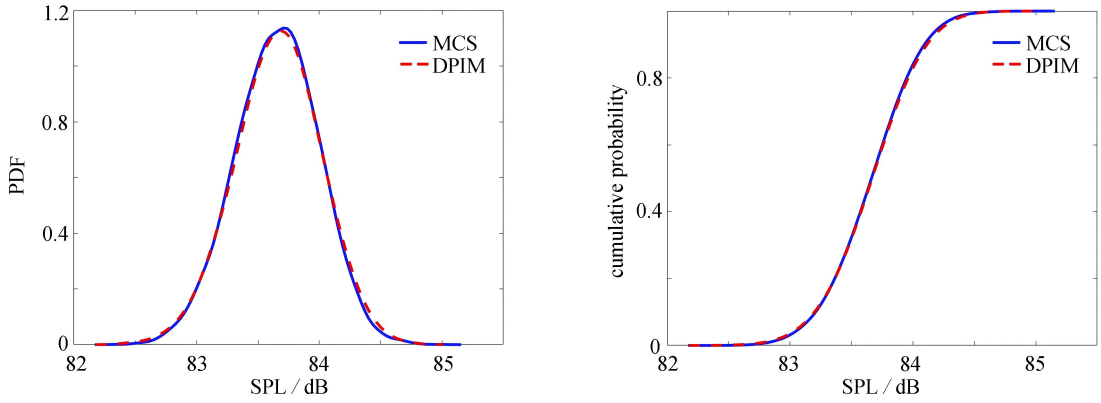
3.2 算例 2

在无界海洋中,进一步将声速 c_0 与海水密度 ρ_0 设为服从对数正态分布的随机参数,二者均值分别为 1 500 m/s 与 1 030 kg/m^3.沿测试点(20 m,5 m,2 m),(20 m,5 m,50 m),(20 m,5 m,100 m)分析声压级的 PDF 与其标准差(standard deviation, SD).表 1 结果表明,随着频率从 100 Hz 升高至 300 Hz,各测试点声压级的 SD 普遍增大.表明在所研究的频段内,随机参数对声场分布的影响随着频率升高而更加明显.这是由于波长随频率升高而缩短,使得在相同空间尺度内包含了更多的波周期,从而增加了响应的不确定性的影响.

3.3 算例 3

考虑深海场景如图 7 所示,结构到海面的距离为 4 m,进一步考虑到实际工况将声速 c_0、海水密度 ρ_0 和垂直激励力 f_1 设置为服从对数正态分布的随机参数,均值分别为 1 500 m/s,1 030 kg/m^3 与 1 000 N,将结构球壳中部区域受到的水平调和分布力设置为 f_2 = 2 000 N/m 的固定值.从图 8 可以看出,由于海面反射效应的影响,声场呈现出独特的空间分布规律,沿 z 方向声压级 PDF 的峰值出现剧烈波动.同时可以观测到声压级出现明显的先增强后衰减趋势,在特定距离处形成声压级的极大值.这表明在深海环境中,声波传播包含

直达波和海面反射波两个主要成分.这两个波束在传播过程中产生相干叠加，形成复杂的声压级空间分布，导致近场 PDF 形态复杂多变.随着距离增加，反射效应相对减弱，声场分布趋于规律化，声压级 PDF 形态趋于平稳.



（a）声压级 PDF 对比　　（b）声压级累积概率分布对比

（a）Comparison of SPL PDF　　（b）Comparison of SPL cumulative probabilities

图 6　DPIM 与 MCS 计算的声压级统计分布对比

Fig. 6　Comparison of SPL statistical distributions calculated by DPIM and MCS

表 1　双随机变量下不同空间坐标与频率下的声压级与声压级标准差统计

Table 1　SPL and SPL SD at different spatial coordinates and frequencies under dual random variables

coordinate/m	frequency/Hz	mean SPL/dB	SD of SPL/dB
(20,5,2)	100	69.80	0.14
	200	73.96	0.38
	300	71.93	0.42
(20,5,50)	100	62.74	0.21
	200	69.83	0.23
	300	55.13	0.77
(20,5,100)	100	57.21	0.19
	200	65.21	0.22
	300	47.03	0.36

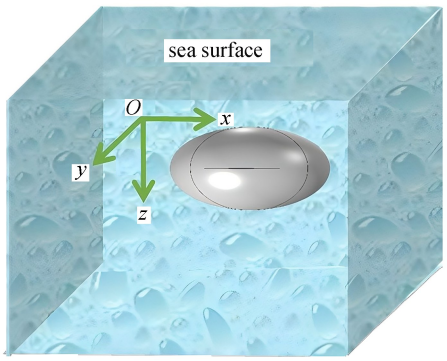


图 7　深海中单椭球结构分布示意图

Fig. 7　Schematic of the single ellipsoid structural configuration in the deep sea

3.4　算例 4

最后一个算例考虑深海环境中双结构情况，在原单椭球壳结构下方布置几何参数相同的椭球壳，如图 9 所示，将声速 c_0、海水密度 ρ_0 和垂直激励力 f_1 设置为服从对数正态分布的随机参数，均值分别为 1 500 m/s，1 030 kg/m^3 与 1 000 N，将结构球壳中部区域受到的水平调和分布力设置为 f_2 = 2 000 N/m 的固定值.研究结

构间距对双结构声振耦合响应的影响规律.

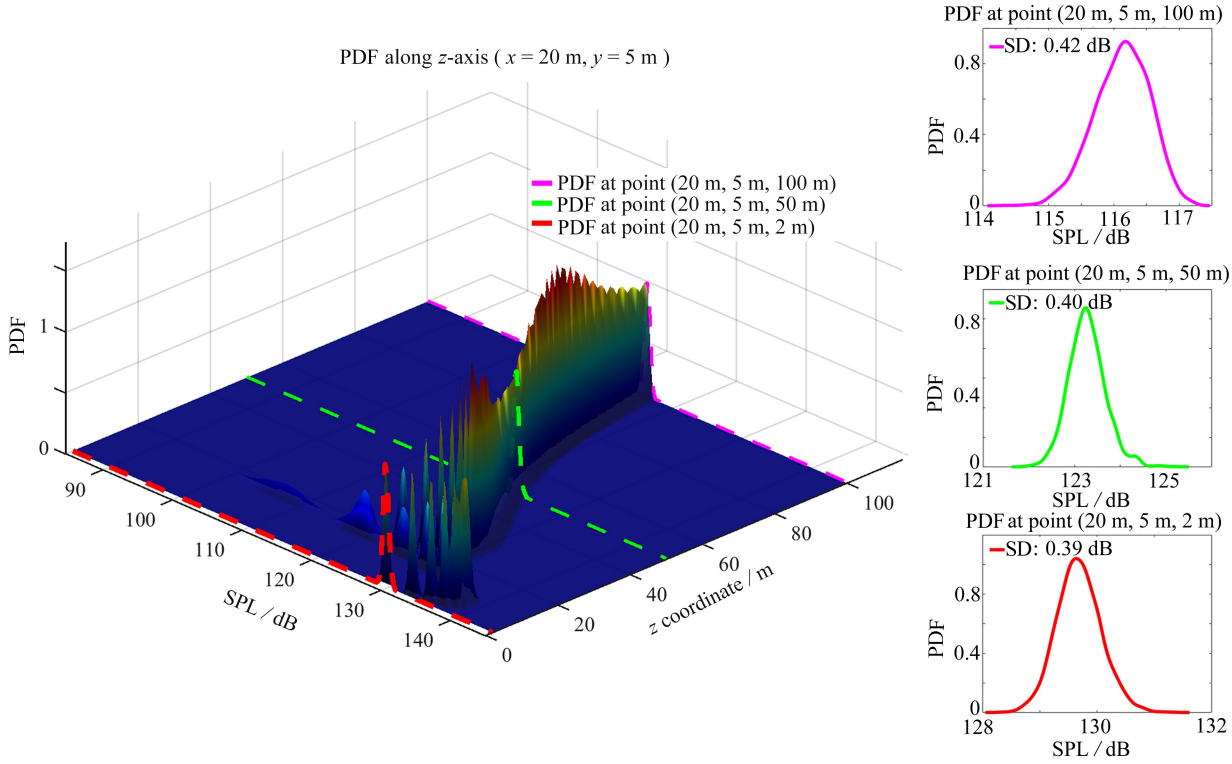


图 8 深海三随机变量下,300 Hz 声压级沿 z 轴方向的 PDF 分布与统计特性

Fig. 8 The PDF distributions and statistics of the 300 Hz SPL along the z-axis under triple random variables in the deep sea

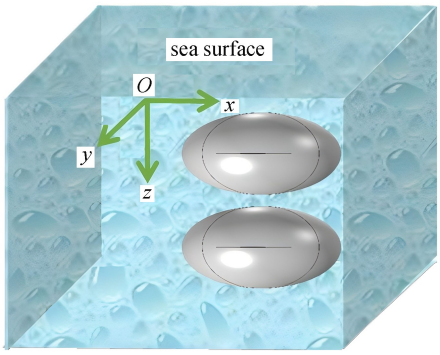


图 9 深海中双椭球结构分布示意图

Fig. 9 Schematic of the biaxial ellipsoid structural configuration in the deep sea

当双结构中心间距设置为 4 m 时,通过对比图 8 所示的单结构系统与图 10 所示的双结构系统声压级 PDF 分布可知,双结构系统的声压级 PDF 分布表现出更加明显的空间复杂性.在沿 z 轴方向的远场区域,声压级 PDF 分布范围明显展宽,其形态呈现出多峰或拖尾特征.该现象与两球壳在纵向排列条件下产生的多路径反射波和散射波相干叠加密切相关,本质上是复杂声干涉效应在概率维度上的体现.

进一步将结构间距增大至 20 m,由图 11 所示,声场特征发生进一步变化.在近场区域,声压级分布在空间上表现出更强烈的非均匀性与局部极值.同时,声压级 PDF 分布在近场表现出更加复杂的离散现象.

综合对比间距 4 m(图 10)与间距 20 m(图 11)的结果,可以验证纵向结构间距是调控双结构系统声场统计分布的关键参数.间距变化会直接改变结构间声干涉效应的强度与作用范围,从而系统性影响声场在空间中的概率分布形态.

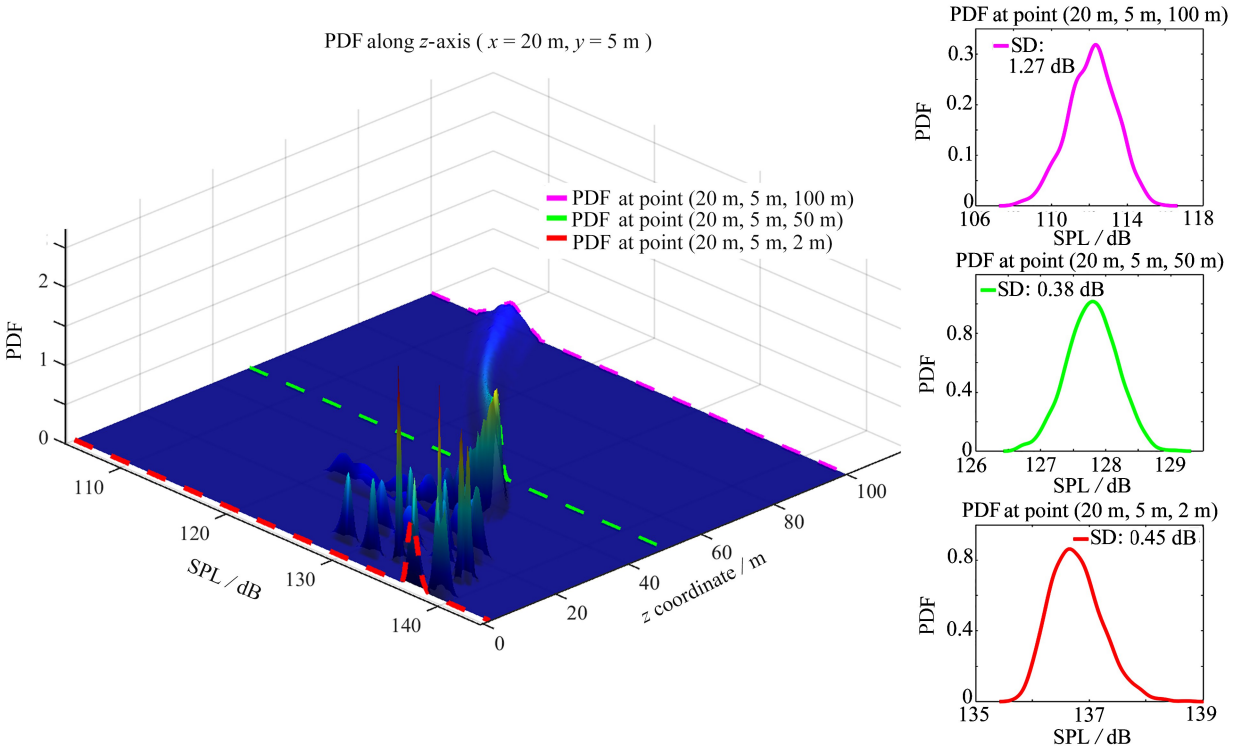


图 10　深海双结构间距 4 m 时，300 Hz 声压级沿 z 轴方向的 PDF 分布与统计特性

Fig. 10　The PDF distributions and statistical characteristics of the 300 Hz SPL along the z-axis for dual structures with a spacing of 4 m in the deep sea

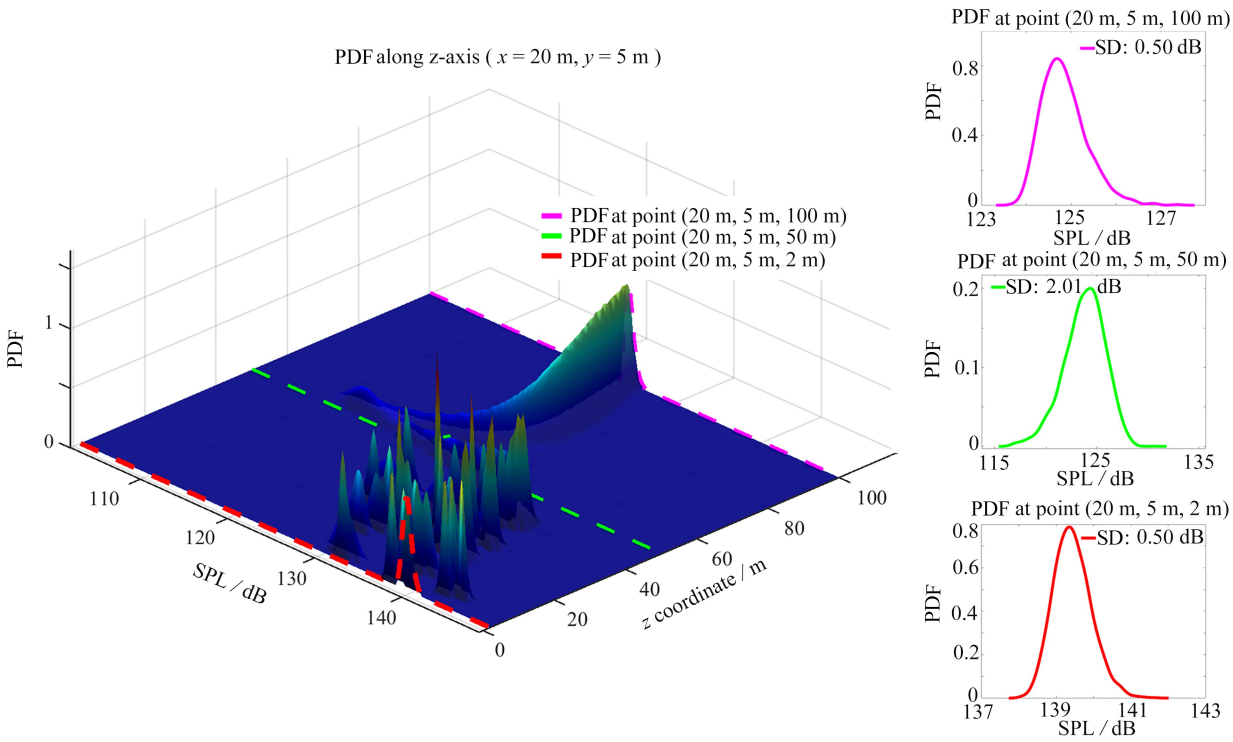


图 11　深海双结构间距 20 m 时，300 Hz 声压级沿 z 轴方向的 PDF 分布与统计特性

Fig. 11　The PDF distributions and statistical characteristics of the 300 Hz SPL along the z-axis for dual structures with a spacing of 20 m in the deep sea

4 结 论

针对深海环境下结构声振耦合系统的随机响应分析问题,本研究发展了一种结合 PIKFNNs 与 DPIM 的混合数值方法,实现了从确定性计算到不确定性量化的高效统一.通过一系列数值实验,得到了以下主要结论:

1) PIKFNNs 通过嵌入解析核函数作为激活函数,天然满足控制方程与辐射边界条件.在 100~300 Hz 频段内,其声压级预测与 COMSOL 计算结果高度一致;DPIM 所得声压级 PDF 与 MCS 吻合良好,验证了混合方法的可靠性.

2) 在随机参数不确定性量化分析方面,研究表明声速、密度等参数的不确定性在 100~300 Hz 频段声场波动会随频率的提升而增大,表现为 SD 升高、PDF 形态趋于复杂.这主要是因为波长缩短,微小扰动易引发强烈的相位干涉.

3) 环境边界条件对声场不确定性分析有重要影响.对比无界海域与深海发现,深海环境中海面反射会引起多次反射干涉,使得近场声压呈现"先增强后衰减"的空间分布特征,且整体不确定性水平高于无界海域,体现了边界条件在概率演化中的关键作用.

4) 对于双结构系统,双球壳纵向排列会使 z 方向的声压级 PDF 分布的空间离散性加剧,结构间距作为重要参数,对远场声场分布影响显著.

本文构建的 PIKFNNs-DPIM 混合方法,有效避免了传统有限元在无界域模拟中的局限性,降低了高维随机采样的计算压力,为复杂海洋装备在多源不确定环境下的声振性能评估与优化设计,提供了一个高效的数值工具,具有较好的理论价值与工程应用前景.

参考文献(References):

[1] Xi Q, Fu Z J, Zou M S, et al. An efficient hybrid collocation scheme for vibro-acoustic analysis of the underwater functionally graded structures in the shallow ocean[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2024, **418**: 116537.

[2] Kim S M, Kim J G, Chae S W, et al. A strongly coupled model reduction of vibro-acoustic interaction[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, **347**: 495-516.

[3] 崔鼎, 郝南海. S-FGM 板的声振耦合特性研究[J]. 应用力学学报, 2021, **38**(5): 1974-1980. (Cui Ding, Hao Nanhai. Analysis of vibro-acoustic coupling characteristics of S-FGM plate[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2021, **38**(5): 1974-1980. (in Chinese))

[4] 张国军, 闫云聚, 李鹏博. 飞行器结构噪声致振试验及声振耦合响应分析[J]. 应用数学和力学, 2013, **34**(11): 1157-1164. (Zhang Guojun, Yan Yunju, Li Pengbo. Noise-induced vibration experiment of aircraft structure and vibro-acoustic coupling response analysis[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(11): 1157-1164. (in Chinese))

[5] 杜庆华, 姚振汉. 边界积分方程—边界元法的基本理论及其在弹性力学方面的若干工程应用[J]. 固体力学学报, 1982, **3**(1): 1-22. (Du Qinghua, Yao Zhenhan. Some basic problems and engineering applications of boundary integral equation boundary element methodin elasticity[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1982, **3**(1): 1-22. (in Chinese))

[6] 王会苹, 王桂霞, 陈德财. 含椭圆孔有限大二十面体准晶板平面弹性问题的边界元分析[J]. 应用数学和力学, 2024, **45**(4): 400-415. (Wang Huiping, Wang Guixia, Chen Decai. Boundary element analysis for the plane elasticity problems of finite icosahedral quasicrystal plates containing elliptical holes[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2024, **45**(4): 400-415. (in Chinese))

[7] 张炳荣. 大规模声学计算的快速多极基本解法及声学灵敏度分析[D]. 合肥: 合肥工业大学, 2013. (Zhang Bingrong. Research on fast multipole method of fundamental solutions for large-scale acoustic problems and acoustic sensitivity analysis[D]. Hefei: Hefei University of Technology, 2013. (in Chinese))

[8] 张凯, 王克用, 齐东平. 热传导问题杂交基本解有限元法虚拟源点的探究[J]. 应用数学和力学, 2023, **44**(4): 431-440. (Zhang Kai, Wang Keyong, Qi Dongping. Research on the fictitious source points of the hybrid fundamental solution-based finite element method for heat conduction problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*,

2023, **44**(4): 431-440. (in Chinese))

[9] Fu Z, Xi Q, Gu Y, et al. Singular boundary method: a review and computer implementation aspects[J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2023, **147**: 231-266.

[10] 李珺璞, 傅卓佳, 陈文. 奇异边界法分析含水下障碍物水域中的水波传播问题[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(10): 1035-1044. (Li Junpu, Fu Zhuojia, Chen Wen. The singular boundary method for obliquely incident water wave passing a submerged breakwater[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(10): 1035-1044. (in Chinese))

[11] Fu Z, Chen W, Wen P, et al. Singular boundary method for wave propagation analysis in periodic structures[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2018, **425**: 170-188.

[12] Peters H, Kessissoglou N, Marburg S. Modal decomposition of exterior acoustic-structure interaction problems with model order reduction[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2014, **135**(5): 2706-2717.

[13] Zhao W, Chen L, Chen H, et al. Topology optimization of exterior acoustic-structure interaction systems using the coupled FEM-BEM method[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2019, **119**(5): 404-431.

[14] Colaço A, Alves Costa P, Amado-Mendes P, et al. Experimental validation of a FEM-MFS hybrid numerical approach for vibro-acoustic prediction[J]. *Applied Acoustics*, 2018, **141**: 79-92.

[15] Gfrerer M H, Schanz M. A coupled FEM-MFS method for the vibro-acoustic simulation of laminated poro-elastic shells[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2020, **121**(19): 4235-4267.

[16] Fu Z, Xi Q, Li Y, et al. Hybrid FEM-SBM solver for structural vibration induced underwater acoustic radiation in shallow marine environment[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, **369**: 113236.

[17] Kharazmi E, Zhang Z, Karniadakis G E M. Hp-VPINNs: variational physics-informed neural networks with domain decomposition[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2021, **374**: 113547.

[18] Anitescu C, Atroshchenko E, Alajlan N, et al. Artificial neural network methods for the solution of second order boundary value problems[J]. *Computers, Materials & Continua*, 2019, **59**(1): 345-359.

[19] Yuan L, Ni Y Q, Deng X Y, et al. A-PINN: auxiliary physics informed neural networks for forward and inverse problems of nonlinear integro-differential equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 2022, **462**: 111260.

[20] Fu Z, Xu W, Liu S. Physics-informed kernel function neural networks for solving partial differential equations[J]. *Neural Networks*, 2024, **172**: 106098.

[21] Xi Q, Fu Z, Xu W, et al. FEM-PIKFNN for underwater acoustic propagation induced by structural vibrations in different ocean environments[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2024, **176**: 46-54.

[22] Cottone G, Di Paola M, Ibrahim R, et al. Stochastic ship roll motion via path integral method[J]. *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering*, 2010, **2**(3): 119-126.

[23] Li J, Chen J B. Probability density evolution method for dynamic response analysis of structures with uncertain parameters[J]. *Computational Mechanics*, 2004, **34**(5): 400-409.

[24] Li J, Chen J B. The principle of preservation of probability and the generalized density evolution equation[J]. *Structural Safety*, 2008, **30**(1): 65-77.

[25] Chen J B, Li J. A note on the principle of preservation of probability and probability density evolution equation[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2009, **24**(1): 51-59.

[26] Chen G, Yang D. A unified analysis framework of static and dynamic structural reliabilities based on direct probability integral method[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2021, **158**: 107783.

[27] Chen H, Chen G, Meng Z, et al. Stochastic dynamic analysis of nonlinear MDOF systems under combined Gaussian and Poisson noise excitation based on DPIM[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2022, **176**: 109163.

[28] 陈翰澍, 陈国海, 杨迪雄, 等. 基于直接概率积分法的水下航行器随机动力响应高效分析[J]. 力学学报, 2024, **56**(6): 1796-1806. (Chen Hanshu, Chen Guohai, Yang Dixiong, et al. Efficient stochastic dynamic response analysis of underwater vehicle via DPIM[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2024, **56**(6): 1796-1806. (in Chinese))