

# 超重力环境下黏弹性软固体的 Rayleigh-Taylor 失稳\*

熊弘雷<sup>1</sup>, 叶 晗<sup>1</sup>, 李科呈<sup>1,2</sup>, 吕朝锋<sup>1,2,3</sup>

- (1. 宁波大学 极端环境交叉力学研究中心, 浙江 宁波 315211;  
2. 宁波大学 冲击与安全工程教育部重点实验室, 浙江 宁波 315211;  
3. 浙江大学 建筑工程学院, 杭州 310058)

**摘要:** 在超重力环境下,受限黏弹性软固体的自由表面可能发生 Rayleigh-Taylor 失稳 (Rayleigh-Taylor instability, RTI),其演化行为同时受到材料流变特性与几何约束的显著影响.本文以受限圆柱形黏弹性软固体为研究对象,基于线性黏弹性本构关系建立了自由表面扰动的线性稳定性分析框架,通过在频域中求解控制方程,推导得到了扰动增长率与波数之间的色散关系,从而系统刻画了超重力、表面张力、材料压缩性及黏性耗散等因素对失稳特征的影响机制.进一步考虑有限几何尺寸的作用,在柱坐标系下引入环向边界条件,将连续波数离散化,构建了适用于受限体系的失稳模态描述方法,明确了径厚比在失稳临界值与模态选择行为中的关键作用.在此基础上,结合有限元特征值分析与非线性数值模拟,对理论预测进行了验证,并用于探讨失稳模态与后期形貌演化之间的关联.本文的研究为分析超重力条件下受限黏弹性软固体的界面稳定性问题提供了一种系统的理论与数值研究思路,可为相关实验设计及软材料失稳形貌调控提供参考.

**关键词:** Rayleigh-Taylor 失稳; 超重力; 黏弹性; 模态选择; 软材料

**中图分类号:** O331 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.460243

## Rayleigh-Taylor Instability of Viscoelastic Soft Solids in Hypergravity

XIONG Honglei<sup>1</sup>, YE Han<sup>1</sup>, LI Kecheng<sup>1,2</sup>, LÜ Chaofeng<sup>1,2,3</sup>

- (1. *Center for Mechanics Plus Under Extreme Environments, Ningbo University, Ningbo, Zhejiang 315211, P.R. China;*  
2. *Key Laboratory of Impact and Safety Engineering, Ministry of Education, Ningbo University, Ningbo, Zhejiang 315211, P.R. China;*  
3. *College of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang University, Hangzhou 310058, P.R. China*)

**Abstract:** Under hypergravity conditions, the free surface of confined viscoelastic soft solids can become un-

\* 收稿日期: 2025-12-29; 修订日期: 2026-02-11

基金项目: 国家自然科学基金(11925206;12402197);浙江省自然科学基金(LQ24A020005)

作者简介: 熊弘雷(2004—),男,硕士生;

李科呈(1995—),男,副研究员,博士(通信作者. E-mail: likecheng@nbu.edu.cn);

吕朝锋(1978—),男,教授,博士,博士生导师(通信作者. E-mail: lucf@nbu.edu.cn).

引用格式: 熊弘雷,叶晗,李科呈,吕朝锋. 重力环境下黏弹性软固体的 Rayleigh-Taylor 失稳[J]. 应用数学和力学, 2026, 47(6): 699-711.

stable due to Rayleigh-Taylor instability, with the evolution behavior governed by both material rheology and geometric confinement. The confined cylindrical viscoelastic soft solids were studied, and a linear stability analysis for free-surface perturbations was developed based on linear viscoelastic constitutive relations. The governing equations were formulated and solved in the frequency domain, to deduce the dispersion relation between the perturbation growth rate and the wavenumber. Then, the roles of hypergravity, surface tension, material compressibility and viscous dissipation were systematically investigated in the instability process. Finite geometric effects were incorporated through introduction of circumferential boundary conditions in a cylindrical coordinate system, to discretize the admissible wavenumbers and reveal the effects of finite confinement on the instability critical values and mode selections. Furthermore, the finite element method was used to verify the theoretical predictions and to investigate the relationship between instability modes and the subsequent evolutions of surface patterns. This study provides a coherent theoretical and numerical approach for analyzing interfacial stability in confined viscoelastic soft solids under hypergravity, and offers a guidance for experiment design and pattern control of soft materials.

**Key words:** Rayleigh-Taylor instability; hypergravity; viscoelasticity; mode selection; soft material

## 0 引言

软材料,如聚合物凝胶、水凝胶、生物组织等,属于一类具有低弹性模量、大变形能力的物质体系。这些材料在微小的外部荷载或自身重力作用下即能发生显著变形。这种独特的力学柔性催生了许多在刚性固体中难以观察到的丰富物理现象,成为当前材料物理和力学交叉研究的前沿<sup>[1-3]</sup>。例如:软材料的断裂行为主要受表面张力与弹性之间的竞争影响,决定了裂纹的萌生和扩展<sup>[4]</sup>;软材料的润湿过程在接触线附近常形成显著的“湿性脊”,挑战了经典润湿理论的适用边界<sup>[5]</sup>;同时,软材料的表面形态失稳现象展示了其在外场或约束条件下能自发形成褶皱、皱褶和凹坑等可控图案,这些图案在柔性电子、光子器件及组织工程等领域具有巨大的应用潜力<sup>[6-7]</sup>。

Rayleigh-Taylor失稳(RTI)是流体力学中描述的一种基础性界面失稳现象:当高密度流体位于低密度流体之上时,受到微小扰动后,高密度流体在重力作用下会下沉,导致系统势能降低,并引发界面失稳<sup>[8]</sup>。在弹性固体中, Rayleigh-Taylor失稳的变形主要由软材料的重力势能和应变能之间的竞争决定。与流体相比,固体材料内部结构稳定,因此失稳过程表现出显著的不同,重力驱动表面失稳,而弹性恢复力则抑制扰动的无限发展,最终形成稳定的表面图案<sup>[9]</sup>。

Rayleigh-Taylor失稳在工业和自然现象中都扮演着重要角色。例如:在惯性约束聚变中,它可能影响靶丸的对称性与完整性,进而导致靶丸壳层的破裂<sup>[10]</sup>;在颗粒悬浮液中,其会影响固体颗粒物的沉积及运移<sup>[11]</sup>。此外, Rayleigh-Taylor失稳广泛应用于模拟地壳板内的造山运动和地幔柱的形成<sup>[12]</sup>,并在天体物理学中用于研究超新星爆发等现象<sup>[13]</sup>。在生物学领域, Rayleigh-Taylor失稳也可能与大脑皮质等生物组织的表面形态形成紧密相关<sup>[14]</sup>。在载人航天领域,飞行员常承受超重力荷载,这种超重力条件会使其面部皮肤出现波浪形的变形与褶皱现象<sup>[15]</sup>。因此,开展超重力环境下的 Rayleigh-Taylor失稳研究,是超重力技术发展的自然需求,应用前景广阔。

近年来,软固体中的 Rayleigh-Taylor失稳研究发展迅速,逐步建立起从线性到非线性、从弹性到黏弹性、从无限平板到有限约束的较为完整的理论体系。Mora等<sup>[9]</sup>率先通过实验发现,在常重力环境下,倒置的柔软水凝胶会出现与流体类似的 Rayleigh-Taylor失稳现象,并且基于无限大弹性平板模型通过线性失稳分析得到了失稳临界荷载,为后续研究提供了重要的理论基础。在此基础上,利用非线性分岔理论进一步分析了多种可能的失稳形貌,并成功预测弹性凝胶在有限变形条件下会形成六边形屈曲图案<sup>[16]</sup>。考虑到实验中软固体不可避免地受到边界约束作用,Zheng等<sup>[17]</sup>通过线性扰动分析和数值模拟发现,在重力作用下,水凝胶的环向约束条件及结构尺寸会显著改变其 Rayleigh-Taylor失稳形貌,并发现当径厚比足够大时,失稳临界重力因子约为固定值 6.22。此外,摄动分析和有限元模拟表明,对于黏附在刚性基底上的双层水凝胶系统,底层水

凝胶越厚越软,其发生重力驱动的 Rayleigh-Taylor 失稳的倾向越强<sup>[18]</sup>。在此研究基础之上,动态稳定性理论的发展进一步揭示了材料黏弹性效应对失稳模态以及形貌发展演化的影响规律<sup>[19]</sup>。研究还进一步拓展到同时存在磁场的情形,如文献[20]建立了二维不可压缩磁性 Rayleigh-Taylor 失稳的线性理论,并分析了轻质理想流体上方线弹性层在上下磁场作用下的稳定性。目前, Rayleigh-Taylor 失稳现象也被积极应用于软材料表面形貌成型领域<sup>[21]</sup>。

尽管已有研究在 Rayleigh-Taylor 失稳的线性与非线性理论、黏弹性效应、边界约束及外场条件等方面取得了重要进展,但对于受限容器内黏弹性软固体在超重力环境下的失稳机制与模态选择规律仍缺乏系统的理论分析与验证,尤其是环向约束条件对黏弹性软固体失稳形貌与波数选择的耦合影响尚不清楚。本文通过研究约束在容器中的黏弹性软圆柱体的 Rayleigh-Taylor 失稳现象,旨在探究影响黏弹性软固体失稳样貌的因素,并阐述受限黏弹性软固体在超重力下失稳的机制。本文主要结构安排如下:在第 1 节中,我们建立了考虑黏弹性的线性稳定性理论模型,推导出了影响失稳样貌的关键因数和色散关系;在第 2 节中,我们系统分析了各参数对失稳特征的影响;在第 3 节中,我们重点探讨了环向边界条件下的模态竞争和选择机制,结合有限元仿真验证结果,模拟了黏弹性软固体失稳形貌演化过程;第 4 节对本文进行了总结。

## 1 黏弹性 Rayleigh-Taylor 失稳理论公式

### 1.1 受约束的黏弹性软固体理论模型

在柱坐标系  $(r, \theta, z)$  下,考虑一个直径为  $2R$ ,厚度为  $H$ ,密度为  $\rho$  以及剪切模量为  $\mu$  的各向同性黏弹性软固体圆柱体,如图 1 所示。其顶部及环向边界固定,底部为自由表面,受到垂直于自由表面的超重力  $Ng$  作用,其中  $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$  为地球标准重力加速度。接下来我们将基于线性稳定性分析,求解其 Rayleigh-Taylor 失稳的临界条件及影响失稳形貌的主要参数。

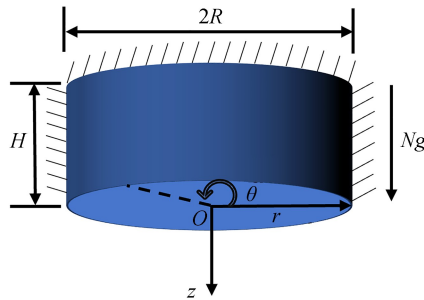


图 1 超重力环境下受约束的黏弹性软固体示意图

Fig. 1 Schematic diagram of a constrained viscoelastic soft solid in a supergravity environment

### 1.2 控制方程

我们假设软固体为线性黏弹性材料,其应力  $\sigma_{ij}$  可由历史应变  $\varepsilon_{ij}$  卷积得到<sup>[22]</sup>:

$$\sigma_{ij}(t) = 2 \int_{-\infty}^t \mu(t-t') \frac{\partial \varepsilon_{ij}(t')}{\partial t'} dt' + \delta_{ij} \int_{-\infty}^t \lambda(t-t') \frac{\partial \varepsilon_{kk}(t')}{\partial t'} dt', \quad (1)$$

其中,  $t, t'$  分别指当前与过去某一时刻;  $\mu(t)$  和  $\lambda(t)$  是松弛模量,两者通过 Poisson 比  $\nu$  相互联系,  $\lambda = 2\nu / ((1-2\nu)\mu)$ ; 应变  $\varepsilon_{ij}$  与三维位移场  $\mathbf{u}$  的关系为  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ 。由于黏度是关于时间的函数,在失稳扰动以增长率  $s$  随时间发展时,位移场可以表示为

$$\mathbf{U}(r, \theta, z, t) = \mathbf{u}(r, \theta, z) e^{st}. \quad (2)$$

最初,平坦的自由表面在超重力作用下会随着时间的推移变得失稳,可给出在柱坐标系下的平衡方程为

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \rho Ng = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \quad (5)$$

我们假设软固体为幂律凝胶<sup>[23]</sup>,其剪切模量随时间变化.幂律凝胶的复剪切模量可以近似为

$$\tilde{\mu}(s) = \mu(1 + (st_v)^n), \quad (6)$$

其中, $\mu$ 是静态剪切模量; $t_v$ 是黏弹性材料的松弛时间, $t_v = 0$ 对应于纯弹性材料; $n$ 是幂律指数,对于固体材料其取值通常在0.5~1的范围内, $n$ 越大,软固体更接近“黏性固体”,反之,软固体更接近“弹性固体”.

将式(1)进行双侧 Laplace 变换,在复频域内本构关系简化为

$$\tilde{\sigma}_{ij}(s) = 2\tilde{\mu}(s)\varepsilon_{ij}(s) + \delta_{ij}\tilde{\lambda}(s)\varepsilon_{kk}(s). \quad (7)$$

将式(7)代入到平衡方程(3)—(5)中,得到柱坐标系下的控制方程:

$$(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}) \frac{\partial}{\partial r}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \tilde{\mu} \left( \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) = \rho s^2 u_r, \quad (8)$$

$$(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \tilde{\mu} \left( \nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) = \rho s^2 u_\theta, \quad (9)$$

$$(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}) \frac{\partial}{\partial z}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \tilde{\mu} \nabla^2 u_z + \rho Ng = \rho s^2 u_z. \quad (10)$$

### 1.3 边界条件

在圆柱坐标系下,其固定顶部,自由表面和环向边界条件可分别表示为

$$u_r = u_\theta = u_z = 0, \quad z = -H, \quad (11)$$

$$\sigma_{rz} = \sigma_{z\theta} = 0, \quad \sigma_{zz} = \gamma \nabla \cdot \mathbf{n}, \quad z = 0, \quad (12)$$

$$u_r = u_\theta = u_z = 0, \quad r = R, \quad (13)$$

其中, $\gamma$ 是表面张力, $\mathbf{n}$ 是垂直于自由表面的向外的单位向量.式(12)的后者是线性化的 Young-Laplace 方程,用于控制具有表面张力的界面上的法向应力.然而,圆柱侧壁的环向固定边界条件(13)对位移分量施加了严格约束,难以获得位移场的解析形式,在参考前人工作<sup>[17]</sup>后,我们将环向边界条件(13)修改为以下新的边界条件:

$$u_r = 0, \quad \frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad r = R. \quad (14)$$

修正后的边界条件类似于分析受限流体中 Rayleigh-Taylor 失稳时采用的 Navier 滑移条件<sup>[24]</sup>,这一边界条件介于无摩擦和固定边界条件之间.这样修改后,通过 Helmholtz 分解扰动位移场,我们可以找到位移的解析形式如下<sup>[19]</sup>:

$$u_r = [A \cosh(az) + B \sinh(az) + b(C \sinh(bz) + D \cosh(bz))] \frac{1}{2} \left[ J_{n+1}\left(\frac{kr}{R}\right) - J_{n-1}\left(\frac{kr}{R}\right) \right] e^{in\theta}, \quad (15)$$

$$u_\theta = \frac{in}{r} [A \cosh(az) + B \sinh(az) + b(C \cosh(bz) + D \sinh(bz))] J_n\left(\frac{kr}{R}\right) e^{in\theta}, \quad (16)$$

$$u_z = [b(A \cosh(az) + B \sinh(az)) + k^2(C \cosh(bz) + D \sinh(bz))] J_n\left(\frac{kr}{R}\right) e^{in\theta}, \quad (17)$$

其中, $A, B, C, D$ 为常数, $k$ 代表径向波数, $a = \sqrt{(s\sqrt{\rho/(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})})^2 + k^2}$ , $b = \sqrt{(s\sqrt{\rho/\tilde{\mu}})^2 + k^2}$ , $J_n$ 是第一类 Bessel 函数, $n$ 为环向模数.根据位移-应变关系式  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ ,将假设的位移代入即可得到对应的应变,再将得到的应变  $\varepsilon_{ij}$  代入到本构关系(7)中,可以得到应力为

$$\sigma_{zz} = 2\tilde{\mu} \left[ \frac{b^2 + k^2}{2} (A \cosh(az) + B \sinh(az)) + 2bk^2 (C \cosh(bz) + D \cosh(bz)) \right] J_n\left(\frac{kr}{R}\right) e^{in\theta}, \quad (18)$$

$$\sigma_{rz} = \tilde{\mu} [2b(\text{Asinh}(az) + B\text{cosh}(az)) + (b^2 + k^2)(C\text{cosh}(bz) + D\text{cosh}(bz))] \frac{1}{2} \left[ J_{n+1}\left(\frac{kr}{R}\right) - J_{n-1}\left(\frac{kr}{R}\right) \right] e^{in\theta}, \tag{19}$$

$$\sigma_{\theta z} = \tilde{\mu} \left[ \frac{in}{r} 2a(\text{Asinh}(az) + B\text{cosh}(az)) + (b^2 + k^2)(C\text{cosh}(bz) + D\text{cosh}(bz)) \right] J_n\left(\frac{kr}{R}\right) e^{in\theta}. \tag{20}$$

将式(15)—(20)代入环向边界条件(14)中,可得径向波数  $k$  和环向模数  $n$  之间需要满足以下关系:

$$J_{n+1}(k) - J_{n-1}(k) = 0. \tag{21}$$

式(21)给出了径向波数  $k$  与环向模数  $n$  的耦合关系.引入环向边界约束后,径向与环向扰动位移不再相互独立,原本连续的波数谱被离散化,体现出容器几何尺寸对失稳波数及模态结构的选择作用.对于每一个非负整数的环向模数  $n$ ,均可由式(21)求解得到一组离散的  $k$  值.按照由小到大的顺序,这些  $k$  值可定义径向模数  $m$ ,从而每个失稳模态可由唯一模数对  $(m, n)$  描述.

### 1.4 色散关系

为便于刻画不同物理量之间的关系,引入无量纲化处理.选取剪切模量  $\mu$ 、厚度  $H$  和材料密度  $\rho$  作为基准量,对其他相关物理量进行无量纲化,从而能够系统分析超重力、表面张力、材料压缩性及黏性效应对 Rayleigh-Taylor 失稳性机理的影响.无量纲化后可以得到以下无量纲数:

$$\begin{cases} \eta = sH \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}, \kappa = kH, \alpha = \frac{\rho NgH}{\mu}, \Sigma = \frac{\gamma}{\mu H}, \tau = t_v \sqrt{\frac{\mu}{\rho H^2}}, \\ \Gamma_1 = \sqrt{\frac{\tilde{\nu}^2 \eta^2}{1 + (\tau \eta)^n} + \kappa^2}, \Gamma_2 = \sqrt{\frac{\eta^2}{1 + (\tau \eta)^n} + \kappa^2}, \tilde{\nu} = \sqrt{\frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}}, \end{cases} \tag{22}$$

这里,  $\eta$  是无量纲增长率,  $\kappa$  是无量纲波数,  $\tilde{\nu}$  是一个压缩因子,对于不可压缩的材料  $\tilde{\nu} = 0$ ,  $\alpha$  是弹性重力数,  $\Sigma$  是弹性毛细管数,分别表示重力和表面张力与弹性力之间的竞争,  $\tau$  是衡量材料黏性强弱的无量纲数,  $\tau = 0$  对应纯弹性材料,  $\Gamma_1, \Gamma_2$  分别是纵波和横波的特征波数.

将式(15)—(20)代入边界条件(11)和(12)中,可以得到关于系数  $A, B, C, D$  的方程组:

$$\mathbf{M}\mathbf{Y} = \mathbf{0}, \tag{23}$$

式中,  $\mathbf{Y} = (A, B, C, D)^T$ , 系数矩阵  $\mathbf{M}$  为

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cosh \Gamma_1 & \sinh \Gamma_1 & \Gamma_2 \sinh \Gamma_2 & \Gamma_2 \cosh \Gamma_2 \\ \Gamma_1 \sinh \Gamma_1 & \Gamma_1 \cosh \Gamma_1 & \kappa^2 \cosh \Gamma_2 & \kappa^2 \sinh \Gamma_2 \\ \Gamma_2^2 + \kappa^2 & \Gamma_1 \frac{\alpha - \Sigma \kappa^2}{1 + (\tau \eta)^n} & \kappa^2 \frac{\alpha - \Sigma \kappa^2}{1 + (\tau \eta)^n} & 2\kappa^2 \Gamma_2 \\ 0 & 2\Gamma_1 & \Gamma_2^2 + \kappa^2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

只有当该系数矩阵的行列式为零时,该方程组才存在非平凡解.当  $\det(\mathbf{M}) = 0$ , 可得到黏弹性软固体 Rayleigh-Taylor 失稳的色散关系具体表示为

$$\begin{aligned} &4\Gamma_1 \Gamma_2 \kappa^2 (\Gamma_2^2 + \kappa^2) - \kappa^2 (4\Gamma_1^2 \Gamma_2^2 + (\Gamma_2^2 + \kappa^2)^2) \sinh \Gamma_1 \sinh \Gamma_2 - \\ &\Gamma_1 \Gamma_2 \cosh \Gamma_1 \cosh \Gamma_2 (\Gamma_2^4 + 2\Gamma_2^2 \kappa^2 + 5\kappa^4) \Gamma_1 (\Gamma_2^2 - \kappa^2) \frac{\alpha - \Sigma \kappa^2}{1 + (\tau \eta)^n} \times \\ &(\Gamma_1 \Gamma_2 \sinh \Gamma_1 \cosh \Gamma_2 - \kappa^2 \cosh \Gamma_1 \sinh \Gamma_2) = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

需要指出的是,在推导色散关系式(25)过程中,我们未考虑圆柱容器侧壁的环向约束作用.在这一简化下,波数  $\kappa$  可被视为连续的,这使得我们能够系统分析超重力、表面张力、材料压缩性及黏性等参数对 Rayleigh-Taylor 失稳性的影响.在这一框架下,色散关系直接刻画了不同尺度扰动的发展速率,有助于揭示各种物理效应之间的竞争关系与相对重要性.然而在实际物理系统中,尤其是在有限尺寸的圆柱容器内,环向约束会显著改变失稳特性.结合式(21)与色散关系式(25),分析可自然推广至考虑环向约束的情形.此时,扰动波数

不再是连续分布,而是被容器几何条件所限制,表现为一系列离散的模式波数.这种离散化源于波动边界条件与几何对称性,只有满足特定波长(或波数)的扰动,才能与容器周向边界条件相匹配并形成稳定的空间模式.离散化波数的出现意味着几何尺寸与失稳模式之间存在强耦合,容器半径、截面形状以及边界材料性质都会影响可容许的模式数量与分布,从而影响失稳发展的主导模式.

## 2 软固体 Rayleigh-Taylor 失稳参数影响分析

### 2.1 纯弹性软固体 Rayleigh-Taylor 失稳参数影响分析

色散关系式(25)为一个高度非线性的特征方程,其一般解需要通过数值方式获得.本文通过考察无量纲增长率平方  $\eta^2$  的符号来判断自由表面是否稳定:当  $\eta^2 > 0$  时,扰动随时间增长,对应自由表面失稳;当  $\eta^2 < 0$  时,  $\eta$  为纯虚数,扰动表现为振荡行为,对应自由表面稳定.我们将先重点讨论纯弹性极限下 ( $\tau = 0$ ) 各无量纲参数对失稳特征的影响,以厘清不同物理机制在 Rayleigh-Taylor 失稳中的作用.图 2 给出了纯弹性软固体的 Rayleigh-Taylor 失稳色散曲线,即无量纲增长率平方  $\eta^2$  随无量纲波数  $\kappa$  的变化情况.在不同参数条件下,色散曲线均呈现出有限波数区间内的不稳定带  $\kappa \in [\kappa_{\min}, \kappa_{\max}]$ , 并存在一个对应最大增长率  $\eta_{\max}^2$  的特征波数  $\kappa_c$ , 该波数决定了失稳初期最易被放大的主导扰动尺度.

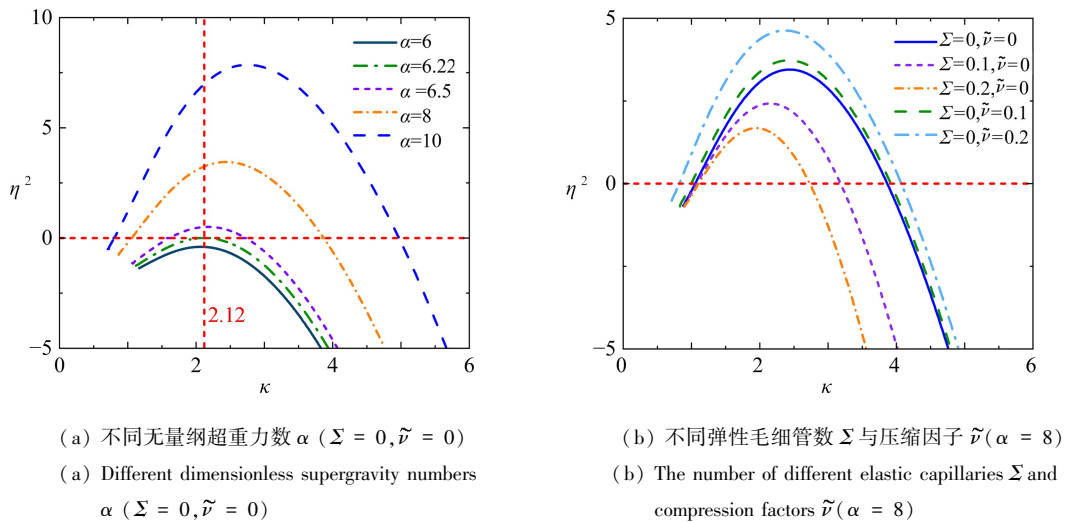


图 2 纯弹性软固体的 Rayleigh-Taylor 失稳色散曲线 ( $\tau = 0$ )

Fig. 2 RTI dispersion curves for pure elastic soft solids ( $\tau = 0$ )

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同.

首先忽略表面张力和材料压缩性的影响 ( $\Sigma = 0, \tilde{\nu} = 0$ ), 考察无量纲超重力数  $\alpha$  的影响,如图 2(a)所示.可以看到,随着无量纲超重力数  $\alpha$  的增大,无量纲增长率的平方  $\eta^2$  也随之增大,且临界无量纲波数  $\kappa_c$  向着更高的波数偏移.这主要是因为超重力的增强放大了体系中可释放的重力势能,使得更小尺度(更短波长)的扰动也能够克服弹性恢复力的约束而被激发.因此,超重力不仅提高了失稳扰动的增长速率,还推动系统向更精细的空间结构演化.进一步地,当  $\alpha < 6.22$  时,色散曲线在所有波数范围内均保持  $\eta_{\max}^2 < 0$ , 系统处于稳定状态.而该临界值与 Mora 等<sup>[9]</sup>基于能量分析得到的结果一致,验证了本文线性动力学分析框架的合理性.

接下来考虑材料可压缩性  $\tilde{\nu}$  和表面张力  $\Sigma$  的影响 ( $\tilde{\nu} = 0$ ), 如图 2(b)所示.可以看到,随着  $\Sigma$  的增大,色散曲线整体向左下平移,最大增长率降低,而不稳定波数区间逐渐收缩.从物理机制上看,表面张力会抵制自由表面曲率的快速变化,使界面产生起伏时需要付出更高的能量代价,因此对尺度较小的扰动具有更强的抑制作用.这一效应在色散关系中表现为高波数区域的不稳定区间迅速收缩,而低波数端的起始位置变化相对较小,说明表面张力主要限制短波扰动的发展,相当于对高波数失稳起到一种抑制作用.该结果与软材料表面失稳研究中普遍观察到的表面张力稳定化效应一致.而随着压缩因子  $\tilde{\nu}$  的增大,最大增长率提高,同时对应的特征波数向低波数方向移动.这一趋势表明,材料压缩性增强削弱了软固体对体积变形的抵抗能力,使

得扰动可以通过体积压缩的方式部分释放弹性应变能,从而更有利于长波扰动的发展.因此,表面张力主要通过抑制短波扰动参与尺度选择,而材料可压缩性则通过体变形机制改变主导失稳波长,使系统更易发生大尺度形变.

在此基础上,我们进一步考察表面张力与材料可压缩性对失稳阈值的影响.首先在不考虑材料可压缩性的条件下,图 3(a)给出了临界无量纲超重力数  $\alpha_c$  随弹性毛细管数  $\Sigma$  的变化关系.可以看到,  $\alpha_c$  随  $\Sigma$  的增大而单调增加,表明表面张力效应会提高系统发生 Rayleigh-Taylor 失稳所需的临界驱动力.这是由于表面张力倾向于抑制自由表面的起伏,使界面形变需要付出更高的能量代价,从而在整体上对失稳起到稳定化作用.另一方面,在忽略表面张力的条件下,图 3(b)给出了  $\alpha_c$  随可压缩性参数变化的结果.可以看到,  $\alpha_c$  随压缩因子的增大而单调减小,这意味着材料可压缩性增强会降低失稳阈值,使系统更易发生失稳.随着材料对体积变形的约束减弱,扰动可以通过体变形方式更有效地释放或重分配弹性应变能,从而降低了触发失稳所需的临界驱动力.

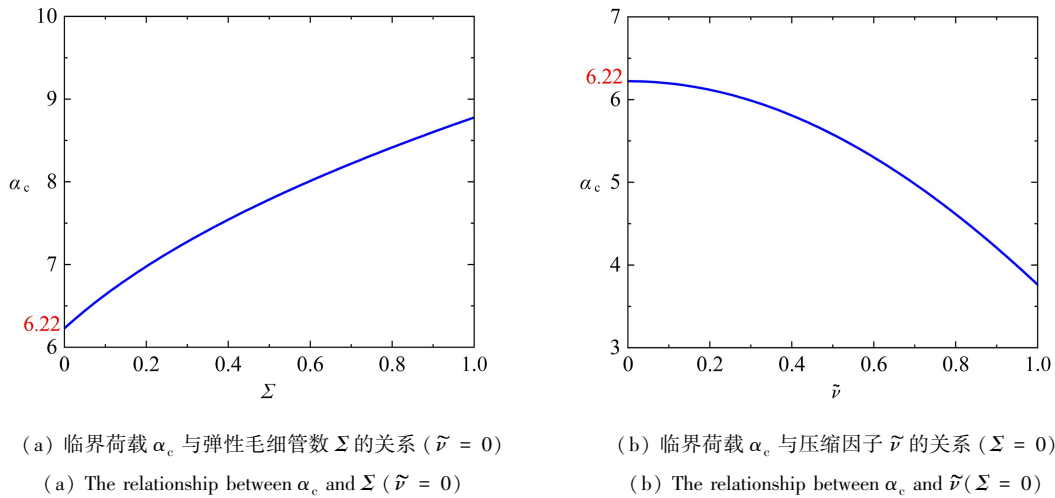


图 3 纯弹性软固体的 Rayleigh-Taylor 失稳临界荷载分析 ( $\tau = 0$ )

Fig. 3 Critical load analysis of RTI critical loads of pure elastic soft solids ( $\tau = 0$ )

### 2.2 黏弹性软固体 Rayleigh-Taylor 失稳参数影响分析

在本小节中,我们将进一步分析黏性效应  $\tau$  对软固体 Rayleigh-Taylor 失稳的影响.考虑不可压缩材料,忽略表面张力,在固定幂律指数  $n=0.5$  的条件下,图 4(a)给出了不同无量纲黏性参数  $\tau$  对应的色散关系曲线.可以看到,随着黏性参数的增大,色散曲线在整个波数范围内整体下移,最大增长率显著降低,而不稳定区间的宽度也逐渐缩小.这表明黏性耗散在扰动演化过程中持续消耗由重力释放的机械能,使得失稳扰动的增长受到有效抑制.与表面张力主要针对短波扰动不同,黏性耗散对各个尺度的扰动均产生阻尼效应.在黏性较强的情况下,即使系统在静态意义上具备发生 Rayleigh-Taylor 失稳的条件,失稳的发展过程也会被显著拖慢,从而推迟失稳形貌的出现.

在此基础上,进一步考察材料黏性对失稳阈值的影响.如图 4(b)所示,在相同幂律指数条件下,临界无量纲超重力数  $\alpha_c$  随无量纲黏性参数  $\tau$  的增大而单调增加.这表明黏性耗散提高了系统发生 Rayleigh-Taylor 失稳所需的临界驱动力,其物理原因在于扰动增长过程中,部分由重力释放的机械能被持续转化为内耗散,从而削弱了失稳扰动的放大能力.与此同时,在相同黏性强度下,幂律指数较大的材料整体表现出更高的临界荷载,说明当材料的流变行为更偏向黏性响应时,失稳更难被触发.

在上述参数分析中可以看到,超重力决定了 Rayleigh-Taylor 失稳是否发生及其发展的强度,表面张力与材料压缩性则通过限制界面形变的特征尺度,选择性地抑制不同波长的扰动,而黏性耗散主要作用于时间尺度,通过降低扰动的增长速率来延缓失稳的发展.因此, Rayleigh-Taylor 失稳的空间结构与演化过程并非由单一因素控制,而是由多种物理机制在不同尺度和时间层面共同作用的结果.这种多机制耦合的特征,在引入有限几何约束后将进一步影响失稳模态的竞争与选择.

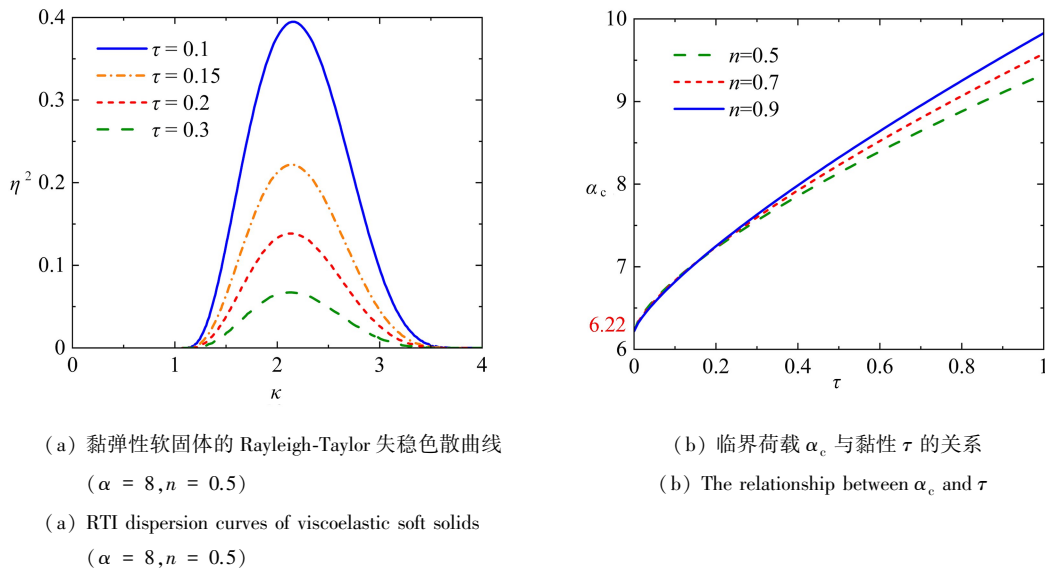


图4 黏弹性软固体的 Rayleigh-Taylor 失稳参数分析 ( $\Sigma = 0, \tilde{\nu} = 0$ )  
Fig. 4 The parameter analysis of viscoelastic soft solids ( $\Sigma = 0, \tilde{\nu} = 0$ )

### 3 考虑边界影响的失稳临界值和模态选择

#### 3.1 有限几何约束下的失稳临界值

前述分析中,扰动波数被视为连续变量,这一假设对应于横向尺度远大于失稳波长的理想情形.然而,在有限尺寸的圆柱容器中,自由表面的扰动必须同时满足径向与环向方向上的边界条件,从而使可允许的波数谱离散化.此时,系统的稳定性特征不可避免地受到几何尺寸的显著影响.

在考虑不可压缩性  $\tilde{\nu} = 0$ , 忽视表面张力作用  $\Sigma = 0$  的条件下,图5给出了纯弹性软固体临界无量纲超重力数  $\alpha_c$  随圆柱径厚比  $R/H$  的变化关系.可以看到,当径厚比较小时,临界无量纲超重力数  $\alpha_c$  显著高于无限大平面层情形.这是由于强烈的环向约束限制了材料的横向位移,使得自由表面扰动在发展过程中需要克服更大的弹性恢复力,从而提高了失稳发生所需的临界载荷.随着径厚比的逐渐增大,侧向约束效应迅速减弱,当径厚比  $R/H > 2$  时,临界无量纲超重力数  $\alpha_c$  逐渐趋于稳定,逐渐逼近半无限弹性层的经典理论结果  $\alpha_c \approx 6.22$ .在这一极限下,几何约束对失稳阈值的影响可以忽略,软固体失稳行为与无侧壁约束情形基本一致.该结果与 Zheng 等<sup>[17]</sup>关于受限弹性软圆柱的研究结果一致,进一步验证了本文模型在纯弹性极限下的正确性.

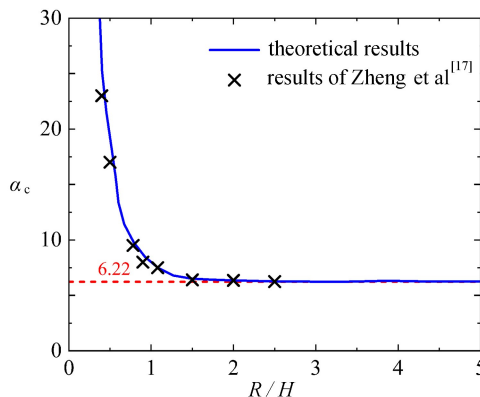


图5 纯弹性软固体临界荷载  $\alpha_c$  与径厚比  $R/H$  的关系 ( $\Sigma = 0, \tilde{\nu} = 0, \tau = 0$ )  
Fig. 5 The relationship between  $\alpha_c$  and  $R/H$  of pure elastic soft solids ( $\Sigma = 0, \tilde{\nu} = 0, \tau = 0$ )

#### 3.2 有限几何约束下模态竞争与选择机制

需要指出的是,临界失稳条件仅反映系统由稳定向失稳转变的起点,在超过临界载荷后,实际可观测的

失稳形貌取决于不同模式之间的竞争,受限圆柱体中的失稳波数需同时满足径向与环向方向的特征方程,每一种失稳模式均对应一组离散的模态数组  $(m, n)$ ,不同模式的增长率在给定的径厚比下互相竞争,其中增长率最大的模态将决定自由表面最初出现的形貌结构.本小节将进一步结合不同模式的色散关系,系统分析受限黏弹性软固体中的模态选择机制及几何参数和材料黏性对其的影响.

图 6(a)展示了在参数  $\alpha = 8, \Sigma = 0, \tilde{\nu} = 0, \tau = 0$  的条件下,纯弹性软固体中不同模式的无量纲增长率平方  $\eta^2$  随圆柱径厚比  $R/H$  的变化关系.每一条曲线对应一组特定的模态  $(m, n)$ ,增长率最大的模态即为主导模态,决定了自由表面最先出现的失稳样貌.可以看到,对于任意给定的径厚比  $R/H$ ,总是存在一个增长率最大的主导模态,该模态将在失稳初期占据主导地位并决定自由表面的初始形貌.当不同模式的增长率曲线发生交叉时,系统将根据不同的径厚比出现主导模态的切换.随着径厚比的增大,侧向约束逐渐减弱,越来越多的模态进入不稳定区间,不同模式之间的增长率差异不断缩小,从而导致主导模态在参数空间中频繁切换.这意味着在弱约束条件下,模态选择对初始扰动、材料参数及几何缺陷等因素更加敏感.图 6(b)系统地给出了纯弹性软固体中主导模态随径厚比变化的分布图.可以看到,在较小径厚比条件下,环向约束效应显著,仅少数低阶模态能够进入不稳定区间,其中  $(1, 1)$  模态在较宽的参数范围内占据主导地位.而随着径厚比的增大,高阶模态逐渐参与竞争,各模态对应的主导区间明显收缩,并在较大径厚比时出现频繁切换,反映了几何约束减弱后模态竞争的显著增强.

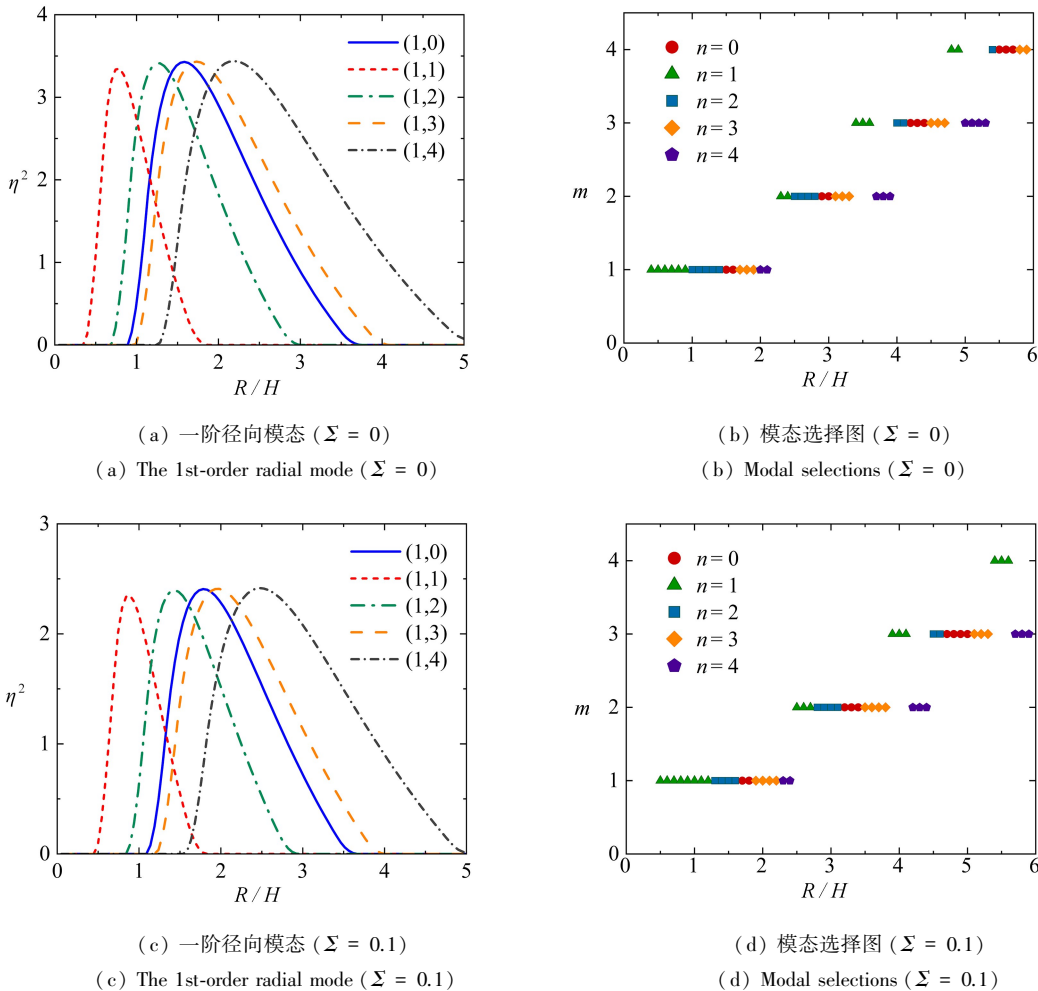


图 6 纯弹性软固体的模态选择 ( $\alpha = 8, \tilde{\nu} = 0, \tau = 0$ )

Fig. 6 Modal selections of pure elastic soft solids ( $\alpha = 8, \tilde{\nu} = 0, \tau = 0$ )

图 6(c)和 6(d)进一步给出了在考虑表面张力的情况下,一阶径向模态的增长率和主导模态随径厚比的变化关系.可以看到,改变  $\Sigma$  会降低失稳扰动的增长速率,但并不会改变不同模式出现的先后顺序,而是会

影响各模态在径厚比方向上的主导区间范围,例如,对于给定的模式(1,1),增加 $\Sigma$ 会扩大径厚比 $R/H$ 范围.这进一步说明,在纯弹性体系中,模态选择主要受几何约束控制,而表面张力的作用更多影响扰动增长速率和主导模态的类型.

图7(a)给出了在参数 $\alpha = 8, \Sigma = 0, \tilde{\nu} = 0, \tau = 0.1, n = 0.5$ 条件下,黏弹性软固体中一阶径向模态的无量纲增长率平方 $\eta^2$ 随圆柱径厚比 $R/H$ 的变化关系.与纯弹性情形相比,所有模态的增长率均显著降低.这一现象表明,黏性耗散抑制了失稳扰动的整体增长.从物理角度看,黏性耗散在扰动演化过程中持续消耗机械能,从而削弱了失稳扰动的放大能力.图7(b)所示的模态选择图进一步表明,与纯弹性体系相比,改变 $\tau$ 并不会改变不同失稳模态出现的先后顺序,而是会影响各模态在径厚比方向上的主导区间范围,这一特性对于实际实验中失稳图案的可控形成具有重要意义,也表明材料流变特性为调控 Rayleigh-Taylor 失稳形貌提供了一条有效途径.

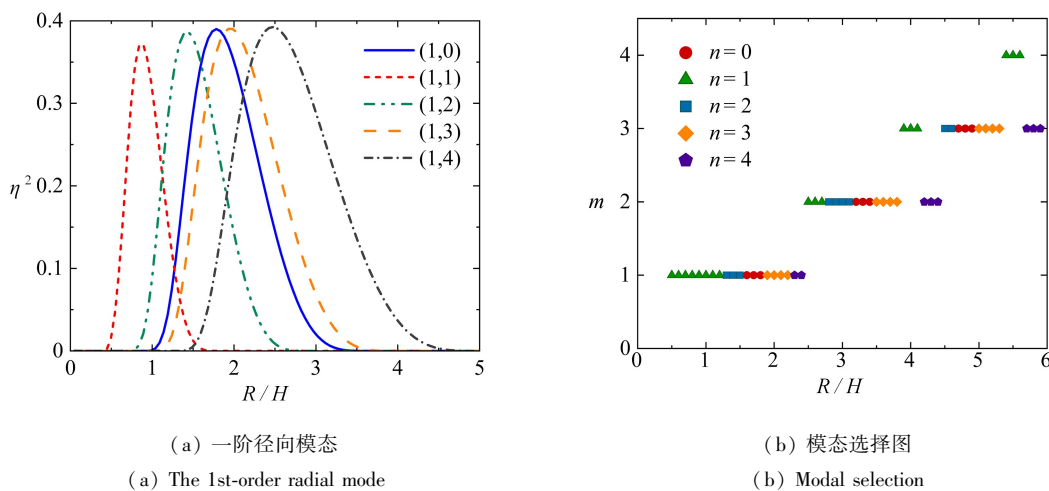


图7 黏弹性软固体的模态选择 ( $\alpha = 8, \Sigma = 0, \tilde{\nu} = 0, \tau = 0.1, n = 0.5$ )

Fig. 7 Modal selections of viscoelastic soft solids ( $\alpha = 8, \Sigma = 0, \tilde{\nu} = 0, \tau = 0.1, n = 0.5$ )

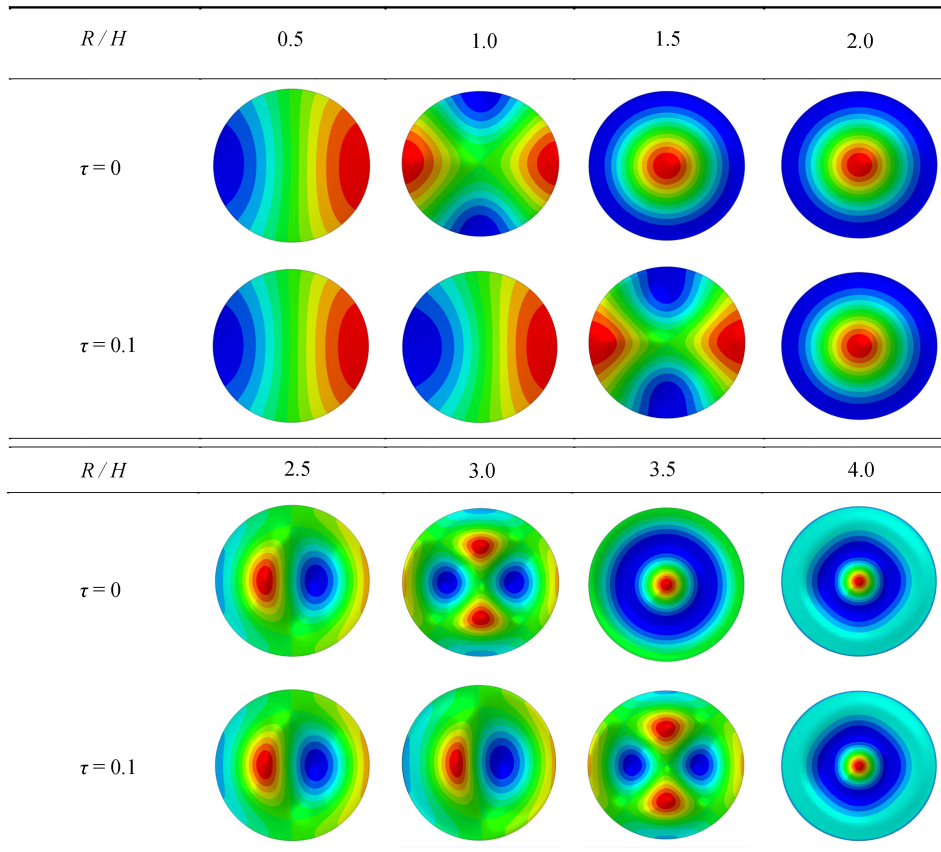
### 3.3 有限元仿真验证与失稳形貌演化

为了进一步验证理论模型对黏弹性软固体在超重力场中 Rayleigh-Taylor 失稳性的预测结果,本研究基于商业有限元软件 ABAQUS 建立了相应的有限元模型.在数值模型中,半径为 $R$ ,高度为 $H$ 的三维圆柱体在竖直方向上受到重力加速度 $Ng$ 的作用,圆柱体固定在上表面,并在下表面设置无应力,圆柱的侧面沿径向固定,以模拟容器的约束,对于圆柱侧表面的两个切向方向,边界条件设置为无摩擦.对于静态剪切模量 $\mu = 60 \text{ Pa}$ ,密度 $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ 的材料,采用线弹性与 Prony 级数描述的不可压缩黏弹性本构关系,单元类型为减缩积分的混合八结点线性六面体单元(C3D8RH).为了获得失稳模态,本文采用“线性摄动-屈曲分析”模块对该过程进行数值模拟.该分析方法能够求解结构在小扰动下的特征值问题,从而直接给出其前若干阶屈曲模态.在具体的分析步设置中,将特征值求解的最大迭代次数设为1000次,并提取前10阶特征模态,以确保能够充分识别潜在的主导失稳模态,同时为后续失稳形貌演化过程提供合理的初始缺陷形式.

表1展示了在不同径厚比和不同黏性条件下,一阶临界 Rayleigh-Taylor 失稳模态的有限元仿真形貌.仿真结果表明,在纯弹性情形下,当径厚比 $R/H < 2$ 时,其主导模态与模态选择图的预测基本一致,例如:当 $R/H = 0.5$ 时,自由表面呈现出典型的(1,1)模态;而当 $R/H = 1.5$ 时,主导形态转变为(1,0)模式,均与线性稳定性分析的预测相符.在此基础上,进一步考虑材料黏性 $\tau = 0.1$ 对失稳模态的影响.可以看到,引入黏性后,失稳模态对几何参数变化的敏感性降低,临界失稳形态在较宽的径厚比范围内保持相对稳定,表现出更为单一的模式特征.这一结果与前文关于黏弹性抑制模态竞争的理论分析相一致.需要指出的是,在部分参数范围内,有限元仿真结果与线性稳定性理论预测的模态结果并不能完全一致,尤其是在径厚比较大的情况.这种偏差主要来源于多方面因素.首先,本文的理论分析基于小扰动和线性化假设,主要刻画失稳初期的增长行为,而有限元仿真中提取的失稳模态已不可避免地受到了几何非线性和有限变形效应的影响.其次,

数值模型中设置的边界条件与我们理论采用的环向边界条件不能完全对应;同时,有限的网格分辨率,可能改变不同模态之间的相对竞争关系,使得某些在线性理论中增长率略低的模态在数值计算中被优先激发.最后,在较大径厚比条件下,多种模态的增长率彼此接近,使模态选择对初始扰动和材料参数的微小变化表现出高度敏感性,从而进一步放大了理论预测与数值结果之间的差异.尽管存在上述差异,有限元仿真仍成功捕捉了理论分析所揭示的主要物理规律,包括主导模态随径厚比变化的系统性趋势、不同模态之间的竞争与切换行为,以及黏弹性材料中失稳模式更趋单一的特征.这表明,本文建立的理论模型能够有效描述有限几何约束下黏弹性软固体的 Rayleigh-Taylor 失稳行为,并为后续研究提供可靠的理论参考.

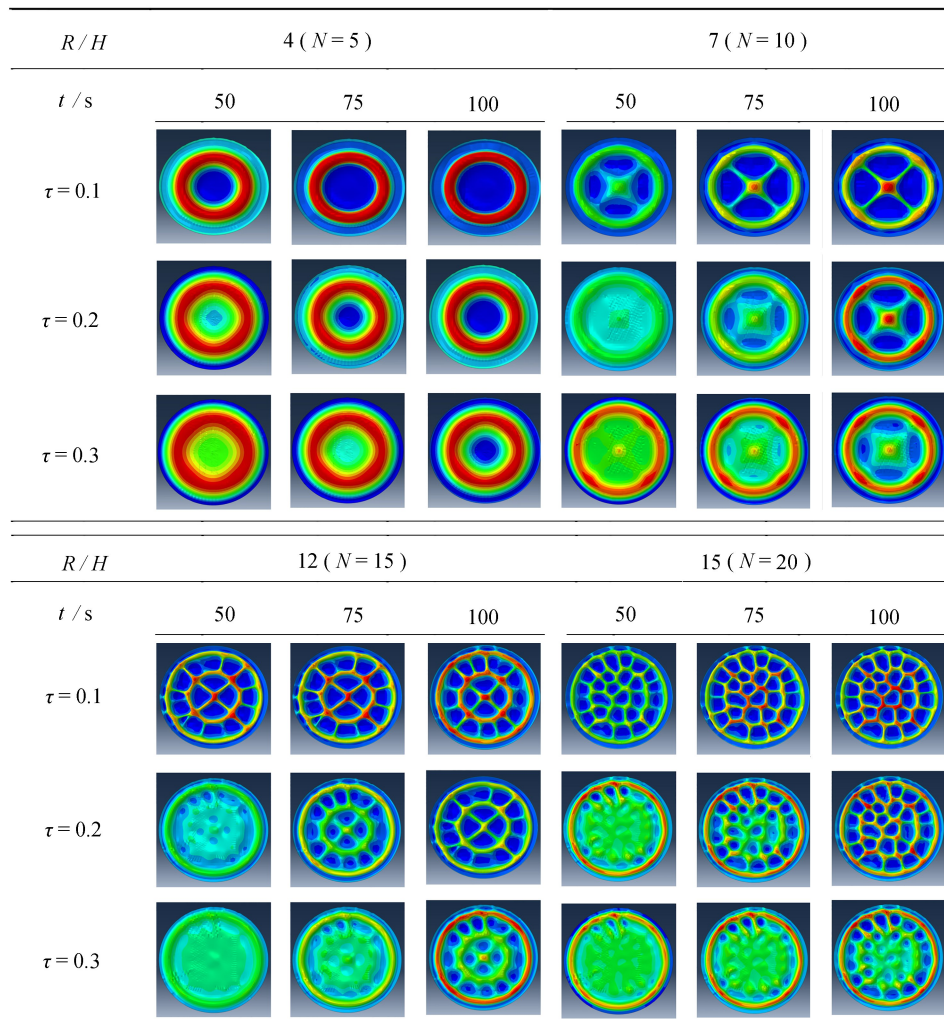
表 1 圆柱形黏弹性软固体的 Rayleigh-Taylor 失稳模态  
Table 1 RTI modes of cylindrical viscoelastic soft solids



当无量纲超重力数超过临界值后,黏弹性软固体的自由表面先发生失稳随后进入后屈曲阶段,对于黏弹性材料,扰动随时间的增长而持续演化,形成明显的蜂窝状结构.为了探究失稳演化过程,此部分采用显式动力学分析步进行数值模拟,在具体的分析步设置中,我们设定时间长度为 100 s 来得到设定时间内的失稳图像.表 2 展示了在不同超重力荷载和不同黏性  $\tau$  下,不同径厚比的不可压缩黏弹性软固体的 Rayleigh-Taylor 失稳随时间的演化过程.

可以看到,随着径厚比  $R/H$  逐渐增大,即圆盘变薄,后屈曲失稳形貌中形成的孔洞数量明显增加,整体结构逐渐向规则的蜂窝状排列过渡;相应地,单个孔洞的特征尺寸随之减小.这表明几何尺度通过调控可参与失稳的模态数量,对最终非线性形貌具有显著影响.另一方面,增大黏性参数会显著减缓失稳形貌的演化过程.随着黏性增强,扰动从初始屈曲向明显的蜂窝结构发展的时间尺度明显延长,体现了黏性耗散在非线性阶段对形貌演化的抑制作用.该结果进一步表明,在给定几何尺度条件下,黏性并不会改变失稳形貌所对应的空间模态结构,而是通过引入耗散效应显著调节后屈曲演化的时间尺度,从而控制失稳形貌形成的动力学过程.

表2 圆柱形黏弹性软固体的 Rayleigh-Taylor 失稳演化过程  
Table 2 Evolutions of RTI of cylindrical viscoelastic soft solids



## 4 结 论

本文系统研究了超重力环境下黏弹性软固体的 Rayleigh-Taylor 失稳问题,结合线性稳定性理论与数值分析方法,揭示了材料流变特性与几何约束对失稳行为的协同调控机制。在黏弹性本构框架下,建立了扰动增长特性的理论描述,并分析了超重力、表面张力、材料压缩性及黏性耗散等关键因素对失稳条件与演化特征的影响规律。

研究表明,超重力是诱发 Rayleigh-Taylor 失稳的主要驱动因素,而表面张力和黏性耗散整体上起到稳定化作用,其中表面张力主要限制短波扰动的发展,黏性耗散则通过调控演化时间尺度影响失稳过程。在有限几何约束条件下,径厚比显著影响失稳阈值与模态竞争行为,几何约束减弱时多种模态参与失稳,而黏弹性效应有助于缓解模态竞争、增强失稳行为的稳定性。理论和有限元结果有助于加深对受限黏弹性软固体在超重力场中 Rayleigh-Taylor 失稳行为的理解,并可为相关实验研究及失稳形貌的调控提供理论依据。

### 参考文献 (References):

- [1] FOYART G, RAMOS L, MORA S, et al. The fingering to fracturing transition in a transient gel[J]. *Soft Matter*, 2013, 9(32): 7775-7779.
- [2] LIN S, COHEN T, ZHANG T, et al. Fringe instability in constrained soft elastic layers[J]. *Soft Matter*, 2016, 12(43): 8899-8906.

- [3] DU Y K, LÜ C F, LIU C S, et al. Prescribing patterns in growing tubular soft matter by initial residual stress [J]. *Soft Matter*, 2019, **15**(42): 8468-8474.
- [4] GRZELKA M, BOSTWICK J B, DANIELS K E. Capillary fracture of ultrasoft gels: variability and delayed nucleation[J]. *Soft Matter*, 2017, **13**(16): 2962-2966.
- [5] STYLE R W, BOLTYANSKIY R, CHE Y, et al. Universal deformation of soft substrates near a contact line and the direct measurement of solid surface stresses[J]. *Physical Review Letters*, 2013, **110**(6): 066103.
- [6] DERVAUX J, BEN AMAR M. Mechanical instabilities of gels[J]. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 2012, **3**: 311-332.
- [7] ANDREOTTI B, SNOELJER J H. Statics and dynamics of soft wetting[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2020, **52**: 285-308.
- [8] RAYLEIGH L. On the instability of a cylinder of viscous liquid under capillary force[J]. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1892, **34**(207): 145-154.
- [9] MORA S, PHOU T, FROMENTAL J M, et al. Gravity driven instability in elastic solid layers[J]. *Physical Review Letters*, 2014, **113**(17): 178301.
- [10] CHOU Y J, SHAO Y C. Numerical study of particle-induced Rayleigh-Taylor instability: effects of particle settling and entrainment[J]. *Physics of Fluids*, 2016, **28**(4): 043302.
- [11] LORENZ K T, EDWARDS M J, GLENDINNING S G, et al. Accessing ultrahigh-pressure, quasi-isentropic states of matter[J]. *Physics of Plasmas*, 2005, **12**(5): 056309.
- [12] GORCZYK W, VOGT K. Tectonics and melting in intra-continental settings[J]. *Gondwana Research*, 2015, **27**(1): 196-208.
- [13] BURROWS A. Supernova explosions in the universe[J]. *Nature*, 2000, **403**(6771): 727-733.
- [14] BEN AMAR M, JIA F. Anisotropic growth shapes intestinal tissues during embryogenesis[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2013, **110**(26): 10525-10530.
- [15] LEGOFF L, LECUIT T. Mechanical forces and growth in animal tissues[J]. *Cold Spring Harbor Perspectives in Biology*, 2016, **8**(3): a019232.
- [16] CHAKRABARTI A, MORA S, RICHARD F, et al. Selection of hexagonal bucking patterns by the elastic Rayleigh-Taylor instability[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2018, **121**: 234-257.
- [17] ZHENG Y, LAI Y, HU Y, et al. Rayleigh-Taylor instability in a confined elastic soft cylinder[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2019, **131**: 221-229.
- [18] RICCOBELLI D, CIARLETTA P. Rayleigh-Taylor instability in soft elastic layers[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2017, **375**(2093): 20160421.
- [19] TAMIM S I, BOSTWICK J B. A dynamic analysis of the Rayleigh-Taylor instability in soft solids[J]. *Extreme Mechanics Letters*, 2020, **40**: 100940.
- [20] PIRIZ S A, PIRIZ A R, TAHIR N A, et al. Magneto-Rayleigh-Taylor instability in an elastic-medium slab[J]. *Physics of Fluids*, 2018, **30**(11): 111703.
- [21] BRUN P T. Shape formation in interfacial flows[J]. *Physical Review Fluids*, 2024, **9**(11): 110501.
- [22] CHRISTENSEN. *Theory of Viscoelasticity*[M]. New York: Academic Press, 1982.
- [23] KARPITSCHKA S, DAS S, VAN GORCUM M, et al. Droplets move over viscoelastic substrates by surfing a ridge[J]. *Nature Communications*, 2015, **6**: 7891.
- [24] SWEENEY H, KERSWELL R R, MULLIN T. Rayleigh-Taylor instability in a finite cylinder: linear stability analysis and long-time fingering solutions[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2013, **734**: 338-362.