

# 初始应力与非线性弹性耦合作用下 弹性波的传播特性研究\*

糜鸿锐<sup>1</sup>, 李文强<sup>1</sup>, 胡恒山<sup>2</sup>

(1. 昆明理工大学 建筑工程学院, 昆明 650500;  
2. 哈尔滨工业大学 航天科学与力学系, 哈尔滨 150001)

**摘要:** 初始应力场与介质的非线性特性会影响弹性波在固体介质中的传播行为, 准确表征受初始应力介质中弹性波的传播规律对于应力无损检测、结构健康监测及地球物理勘探等具有重要的意义。目前研究对初始应力相关的几何非线性(有限变形)与物理非线性如何影响弹性波的传播还缺乏清晰认识。本研究基于声弹性理论, 建立了耦合有限的初始变形与物理非线性的弹性波传播理论框架, 并通过摄动近似方法获得体波相速度的近似解析解, 为快速计算受初始应力介质中弹性波的传播提供有效手段。此外, 通过求解平面波的特征方程并进行对比分析, 系统揭示了初应力场与非线性弹性耦合效应作用下的弹性波传播规律。研究结果表明, 初始应力对弹性波传播的影响是几何非线性效应与物理非线性效应竞争的结果。在拉伸初始应力作用下, 几何非线性会使弹性波速度提高, 而物理非线性会使弹性波速度降低。物理非线性效应使得初始应力产生更显著的体波相速度改变及横波各向异性, 在 7075-T651 铝合金材料中, 横波各向异性程度  $A_s$  可达到 2%~3%。

**关键词:** 初始应力; 声弹性理论; 弹性波传播; 几何非线性与物理非线性; 摄动理论  
**中图分类号:** O34 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.470002

## Coupling Effects of Initial Stresses and Nonlinear Elasticity on the Propagation Characteristics of Elastic Waves

MI Hongrui<sup>1</sup>, LI Wenqiang<sup>1</sup>, HU Hengshan<sup>2</sup>

(1. Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, P.R. China;  
2. Department of Astronautics and Mechanics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, P.R. China)

**Abstract:** The propagation of elastic waves in solids is influenced by initial stresses and material nonlinearity. Accurately characterizing the propagation of elastic waves in initially stressed media is crucial for stress nondestructive testing, structural health monitoring, and geophysical exploration. However, the distinct roles of stress-related geometric nonlinearity and material nonlinearity remain unclear. A theoretical framework based

\* 收稿日期: 2026-01-04; 修订日期: 2026-02-12

基金项目: 云南省基础研究计划(202501CF070160); 国家自然科学基金(12272107)

作者简介: 糜鸿锐(2003—), 男, 硕士生(E-mail: mhr170124@163.com);

李文强(1994—), 男, 讲师, 博士, 硕士生导师(通信作者. E-mail: wqli@kust.edu.cn);

胡恒山(1963—), 男, 教授, 博士, 博士生导师(E-mail: hhs@hit.edu.cn).

引用格式: 糜鸿锐, 李文强, 胡恒山. 初始应力与非线性弹性耦合作用下弹性波的传播特性研究[J]. 应用数学和力学, 2026, 47(6): 750-772.

on acoustoelasticity and coupling finite initial deformation with material nonlinearity was developed. Approximate analytical solutions for the phase velocities of body waves were derived with the perturbation theory, to give an efficient approach for the rapid calculation of elastic wave propagation in initial stress media. Furthermore, the characteristic equation was solved for plane waves, the coupled effects of initial stress and nonlinear elasticity were systematically analyzed. The results show that, the effects of initial stresses stem from the competition between geometric and physical nonlinearity. Under tensile initial stresses, geometric nonlinearity will increase wave speeds, while physical nonlinearity will decrease them. Physical nonlinearity induces more pronounced changes in phase velocity and velocity anisotropy of shear waves. For the 7075-T651 aluminum alloy, the shear wave anisotropy reaches 2% ~ 3%.

**Key words:** initial stress; acoustoelastic theory; elastic wave propagation; geometrically and physically nonlinearity; perturbation theory

## 0 引 言

初始应力通过高阶弹性常数改变弹性波波速的现象,即声弹性效应<sup>[1-2]</sup>,其物理本质源于材料在初始变形作用下的非线性弹性响应.初应力广泛存在各种材料中,包括材料的机械加工和强化工艺,例如,切削加工、锻压、焊接和金属热处理等产生的残余应力<sup>[3]</sup>、结构服役期间预加的应力以及地壳介质因重力或构造活动产生的地应力<sup>[4]</sup>等.建立受初始应力介质中弹性波传播理论并研究弹性波的传播规律是实现结构内部应力状态高精度测量的理论基础,其在材料的应力无损检测、结构健康监测、地球物理勘探等领域具有重要的应用意义.

声弹性理论是基于“叠加在有限变形上的小运动”理论发展起来的,并基于非线性弹性本构建立介质等效弹性性质与初始应力的联系,其通常与高阶弹性常数相关联.Murnaghan<sup>[5]</sup>的研究表明,初始应力的存在会使各向同性的固体材料呈现各向异性特征,并提出了弹性固体的有限变形理论;Biot<sup>[6]</sup>探究了初始应力对弹性波传播的影响,建立了初始应力下的非线性理论,但对初始应力影响介质弹性性质的具体机制讨论尚不充分.两人的研究奠定了声弹性理论的基础.随后,Toupin 等<sup>[7]</sup>推导了任意对称的理想弹性材料在有限变形上叠加小位移的一般方程,以此分析小振幅平面波在初始变形和受力的弹性材料中的传播.Thurston 等<sup>[8]</sup>围绕三阶弹性常数和均匀初应力介质中小振幅弹性波的速度展开研究,推导了弹性波速度在中间构形及自然构形中的表达及其在零应力条件下应力导数的精确表达式.Tokuoka 等<sup>[9]</sup>基于小弹性变形叠加在有限弹性变形上的理论,研究了任意对称性的均匀应力晶体中的波传播,并建立了声学双折射关系.同时,声弹性的应用离不开材料高阶模量的测量,Thurston<sup>[10]</sup>揭示了应力对波传播的影响机制,定义了不同构形下等效弹性常数和应力张量.Kube 等<sup>[11]</sup>提出了应力声弹性公式,对于应力诱导的弹性波相速度变化,可直接通过材料的弹性常数与初始应力状态建立联系.Winkler 等<sup>[12]</sup>通过实验测量了 9 种岩石(砂岩、石灰岩、花岗岩)和一些合成材料在室温环境下的三阶弹性常数.Lubarda<sup>[13]</sup>基于线性理论中自洽方法的推广,提出了一种计算立方晶体各向同性集合体有效三阶弹性常数的改进方法.Abiza 等<sup>[14]</sup>通过将小振幅波与小但有限的预变形耦合,为声弹性技术测定固体的四阶弹性常数提供了理论支持.因此,可利用声弹性理论建立弹性波的传播特性与初始应力及其产生的预变形的联系.

由于机械加工、温度差异、淬火过程以及施加应力等,初始应力广泛存在于金属材料中.应力状态会改变等效材料的弹性性质,进而影响弹性波的传播,这一现象可用于实际工程中应力的无损检测<sup>[15]</sup>.刘镇清等<sup>[16]</sup>基于应力-超声波速度关系,研究螺栓轴向应力测量中声速与应力、温度的关系,介绍了用于分析三者关系的实验与计算方法.Mukherjee 等<sup>[17]</sup>建立了具有横向织构各向异性的初应力固体的框架,展示了如何用小振幅横波测量应力.声弹性理论为研究预应力介质弹性波的传播提供了理论基础.Pao 等<sup>[18]</sup>在自然坐标系和初始坐标系下均推导了声弹性方程,并将其应用于研究具有初始应力的正交异性弹性固体中超声波的传播.Zuo

等<sup>[19]</sup>提出了一种在半解析有限元(SAFE)模型中考虑声弹效应的方法,为研究任意初始应力条件下任意截面波导中的声弹性导波提供了一种通用工具.Liu和Lin等<sup>[20]</sup>基于Biot理论的框架建立了一种结合SAFE和完全匹配层法的方法,用于准确预测任意初始应力作用下各向异性层状半空间中SAW的相速度色散、衰减和极化模式.Zheng等<sup>[21]</sup>发展的Padé声孔隙弹性理论,将预测能力拓展至高应力下发生非弹性变形的多孔岩石.Traylor和Burnley等<sup>[22]</sup>研究了高压高温条件下San Carlos橄榄石的声弹性效应,明确了应力对纵波和横波速度的影响.初始应力诱导的各向异性会导致声双折射现象,即两个横波波速不同.Man和Paroni<sup>[23]</sup>构建了初始应力作用下多晶聚集体的微观力学模型,推导了立方晶粒正交各向异性聚集体的双折射公式,明确了正交织构对声弹性系数的影响.Khidas和Jia<sup>[24]</sup>通过单轴加载下玻璃微珠充填体的应力-应变测量和超声传播实验,研究了应力诱导各向异性性和组构各向异性对其非线性弹性的影响.然而,上述研究结果对于不同初始应力状态如何影响弹性波的传播特性还缺乏深入认识.因此,有必要研究复杂初始应力状态对弹性波传播的影响.

受初始应力介质中预变形的几何非线性及介质的物理非线性会显著影响弹性波的传播特性.Pau等<sup>[1]</sup>分别研究了物理非线性和几何非线性如何影响体波速度和极化方向.Cai和Deng<sup>[2]</sup>建立了初始应力作用下非线性弹性波传播的统一数学框架.Tang等<sup>[25]</sup>通过引入一个中间状态来描述自然状态和最终状态之间的预变形,以将预变形整合到非线性波动方程中,并在微扰理论的二阶近似下对该非线性波动方程进行分解,从而推导出平面弹性波和二次谐波的声弹性方程.Zuo和Zhang等<sup>[26]</sup>研究了Lamb波二次谐波在不连续板中的传播和散射过程,包括不连续点附近消失的Lamb模的贡献和不连续点处的非线性边界效应,通过暂态有限元仿真验证了该方法的有效性.Qu<sup>[27]</sup>聚焦具有二次非线性的各向同性超弹性固体中弹性波的非线性行为,指出二维波运动的非线性行为可由三个独立无量纲参数完全描述,平面波则仅需两个独立无量纲参数,对数值模拟和实验测量数据解释具有重要意义.本文聚焦于弹性波的传播特征,不考虑谐波效应.尽管声弹性理论在预应力介质弹性波的建模与残余应力的检测方面得到了广泛应用,但对初始应力与几何非线性及物理非线性弹性的耦合作用如何影响弹性波传播还缺乏系统认识,对两种非线性机制在弹性波传播中的竞争机制也缺乏深刻的理解.因此,研究初始应力作用下弹性波的传播规律有必要考虑初始变形的几何非线性及材料的物理非线性的影响.

为研究初始变形的几何非线性及物理非线性与初始应力的耦合作用对弹性波的影响,本文将基于声弹性理论基本方程,建立初始应力与几何和物理非线性效应耦合作用下平面波的特征方程,并通过摄动理论求解平面波特征方程以获得受初始应力介质弹性波相速度的解析解.此外,基于初始应力作用下平面波的特征方程,分析单轴、双轴、三轴初始应力状态下静态变形的几何非线性和介质物理非线性对弹性波的相速度方位依赖性、极化各向异性、横波速度各向异性特征的影响.

## 1 声弹性理论及其基本方程

传统的弹性波理论以线弹性理论为基础,弹性波的速度通常被认为是不依赖于初始应力或应变状态的常数.然而大量的实验表明,初始应力作用下传播速度与未受应力时的传播速度不同<sup>[28]</sup>.基于叠加在有限静态变形上的非线性波动理论,声弹性理论从理论上建立了弹性波传播特性与固体中初始应力状态之间的联系<sup>[2]</sup>.叠加的静态变形可以是有限的,也可以是无穷小的;可以是弹性的,也可以是非弹性的.

为建立弹性波在受初应力固体中传播的理论框架,声弹性理论通常涉及三个构形:自然构形 $V_0$ 、中间构形 $\tilde{V}$ 与当前构形 $V$ .同时为便于描述,将这三个构形之间的变形与运动关系置于同一坐标框架中进行刻画,如图1所示.分别使用大写拉丁字母、小写希腊字母和拉丁字母下标来表示物理场在自然状态、中间状态和当前状态下的分量,并用带波浪号变量表示中间构形以作区分.

初始应力作用下的弹性波运动可模拟为叠加在静态变形上的小弹性运动问题.因此,不同构形中物质点的位置具有如下联系:

$$\xi(X) = X + w(X), \quad x(X, t) = u(X, t) + \xi(X), \quad (1)$$

其中,  $w(X)$  为初始应力相关的静态位移,  $u(X, t)$  为弹性波运动相关的动态位移。

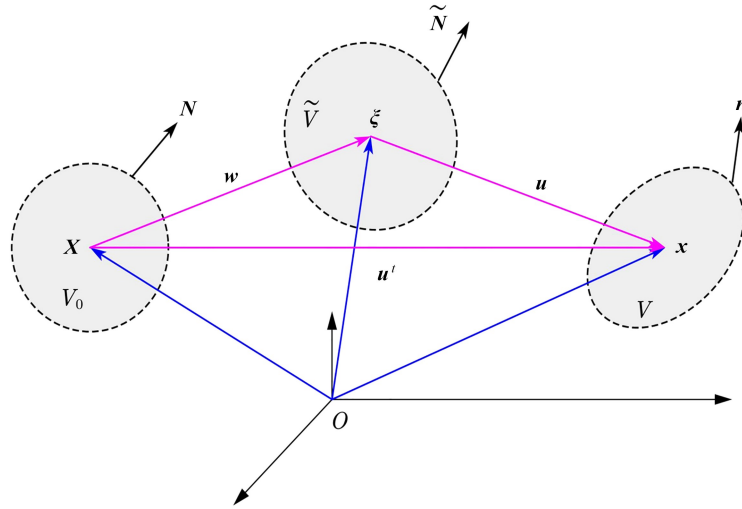


图 1 自然构形、中间构形及当前构形的变形示意图

Fig. 1 Schematic of the deformation among the natural, intermediate, and current states

假设初始应力产生均匀的静态变形,则当前构形相对自然构形的总 Green 应变张量可表示为如下形式:

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] + \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha} \cdot (\nabla \mathbf{u}) + \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u})^T \cdot (\nabla \mathbf{u}), \quad (2)$$

其中,  $\boldsymbol{\alpha}$  为初始变形相关的应变张量. 上式可以为研究初始应力相关的静态变形对弹性波传播的影响提供便利.

为研究初始应力及其产生的变形对材料弹性性质的影响,需建立初始应力或初始变形相关的本构关系. 通常将受初始应力的固体考虑为非线性的超弹性材料,假设材料存储的能量全部通过等熵的弹性变形过程转化为应变能.因此,基于第二类 Piola-Kirchhoff 应力(下文简称为 SK 应力)可用高阶弹性常数,将三阶非线性的声弹性本构关系表示为如下形式<sup>[14,29]</sup>:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{\text{SK}} = & \lambda (\text{tr} \mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} + C(\text{tr} \mathbf{E})^2 \mathbf{I} + B \text{tr}(\mathbf{E}^2) \mathbf{I} + 2B(\text{tr} \mathbf{E}) \mathbf{E} + A \mathbf{E}^2 + D \text{tr}(\mathbf{E}^3) \mathbf{I} + \\ & 3D(\text{tr} \mathbf{E}) \mathbf{E}^2 + 2F(\text{tr} \mathbf{E}) \text{tr}(\mathbf{E}^2) \mathbf{I} + 2F(\text{tr} \mathbf{E})^2 \mathbf{E} + 4G \text{tr}(\mathbf{E}^2) \mathbf{E} + 4H \text{tr}(\mathbf{E})^3 \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中,  $\lambda, \mu$  为二阶弹性常数;  $A, B, C$  为三阶弹性常数;  $D, F, G, H$  为四阶弹性常数.

为了将弹性波运动与初始静态变形联系起来,初始应力介质中弹性波的运动方程通常利用第一类 Piola-Kirchhoff 应力(下文简称为 PK 应力)来描述<sup>[30]</sup>.利用 PK 应力张量表示的运动方程表示为

$$\nabla \cdot \mathbf{T}^{\text{PK}} = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}(X), \quad (4)$$

其中,  $\rho_0$  为自然构形下的密度.引入 PK 应力与 SK 应力之间的关系式(A11),运动方程式(4)可通过 SK 应力  $\mathbf{T}^{\text{SK}}$  表示为

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^{\text{SK}}) = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}(X). \quad (5)$$

上述式(1)—(5)的详细推导过程与应力张量的定义见附录 A.

联立式(2)、式(3)和式(5),可得到初始应力作用下耦合几何非线性与物理非线性的运动方程:

$$\begin{aligned} & [\lambda + \mu + (B + 2C) \text{tr} \boldsymbol{\alpha} + (F + 12H) (\text{tr} \boldsymbol{\alpha})^2 + (2F + 2G) \text{tr}(\boldsymbol{\alpha}^2)] \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \\ & \left[ \frac{A}{2} + 2B + \left( \frac{3D}{2} + 4F \right) \text{tr} \boldsymbol{\alpha} \right] \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + 3D \boldsymbol{\alpha}^2 \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + 3D \nabla \nabla \cdot (\boldsymbol{\alpha}^2 \cdot \mathbf{u}) + \\ & [\mu + B \text{tr} \boldsymbol{\alpha} + F(\text{tr} \boldsymbol{\alpha})^2 + 2G \text{tr} \boldsymbol{\alpha}^2] \Delta \mathbf{u} + \left( \frac{A}{2} + \frac{3D}{2} \text{tr} \boldsymbol{\alpha} \right) \boldsymbol{\alpha} \cdot \Delta \mathbf{u} + 8G \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla[\nabla \cdot (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{u})] + \end{aligned}$$

$$\left(\frac{A}{2} + \frac{3D}{2} \operatorname{tr} \boldsymbol{\alpha}\right) \nabla \cdot (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \left[\frac{A}{2} + 2B + \left(\frac{3D}{2} + 4F\right) \operatorname{tr} \boldsymbol{\alpha}\right] \nabla \nabla \cdot (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{u}) = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}. \quad (6)$$

## 2 受初始应力介质中非线性介质平面波的传播

一般地,当前构形中平面波方程具有如下形式:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U} e^{i(k\mathbf{N} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}. \quad (7)$$

弹性波运动相关的动态变形满足小变形假设,即  $\|\mathbf{u}\| \ll \|\mathbf{w}\|$  与  $\|\partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{X}\| \ll \|\partial \mathbf{w} / \partial \mathbf{X}\|$ . 考虑初始应力产生均匀的静态变形时,变形梯度(A4)可退化为

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \approx (\mathbf{I} + \boldsymbol{\alpha}). \quad (8)$$

由于动态变形  $\mathbf{u}$  为小变形,因此当前构形与中间构形物理量几乎没有区别.

将式(8)代入式(7),可得到在自然构形下的平面波方程为

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{U} e^{i[k\mathbf{N} \cdot (\mathbf{I} + \boldsymbol{\alpha}) \cdot \mathbf{X} - \omega t]}, \quad (9)$$

将式(9)代入式(6)可得到初始应力非线性介质平面波的特征方程:

$$(\mathbf{Q} - v^2 \mathbf{I}) \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (10)$$

其中,  $\mathbf{Q}$  称为声张量或 Christoffel 矩阵,其与初始变形、二阶、三阶弹性常数、平面波的传播方向相关.求解特征方程(10)的特征值  $v$  可以得到三类体波(纵波、准 SV 波、准 SH 波)的相速度,相应的特征向量对应三类体波的偏振方向.

### 2.1 几何非线性的静态变形——材料线性条件下平面波的相速度

考虑几何非线性的静态变形作用下的小弹性波运动,Green 应变张量表示为

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] + \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha} \cdot (\nabla \mathbf{u}) + \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \boldsymbol{\alpha}. \quad (11)$$

假设材料为线弹性,用  $\mathbf{T}^{\text{PK}}$  表示的本构方程仅包含二阶弹性常数的贡献,即

$$\mathbf{T}^{\text{PK}} = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\alpha} + \nabla \mathbf{u}) \cdot (\lambda (\operatorname{tr} \mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E}). \quad (12)$$

联立式(4)、式(9)和式(12),可得到仅考虑静态变形的几何非线性时的声张量:

$$\mathbf{Q} = \left\{ (\mu \mathbf{I} + \lambda \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{N} \cdot \mathbf{q} \otimes \mathbf{N} \cdot \mathbf{q}) \cdot \mathbf{q} + \mu [(\mathbf{N} \cdot \mathbf{q}) \cdot \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} \cdot (\mathbf{N} \cdot \mathbf{q})] \mathbf{I} + \mu [(\mathbf{N} \cdot \mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\alpha} \otimes (\mathbf{N} \cdot \mathbf{q}) \cdot \mathbf{q}] + \lambda \operatorname{tr} \left( \boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha}^2 \right) (\mathbf{N} \cdot \mathbf{q})^2 \mathbf{I} + 2\mu (\mathbf{N} \cdot \mathbf{q})^2 \left( \boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha}^2 \right)^T \right\} / \rho_0, \quad (13)$$

其中,  $\mathbf{q} = \mathbf{I} + \boldsymbol{\alpha}$ .

对于静水应力的情况下,有  $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_0 \mathbf{I}$ .将对应的声张量  $\mathbf{Q}$  代入式(10)求解相应的特征方程可得到静水压力作用下弹性波的相速度与静水应变的关系<sup>[1-2,14]</sup>:

$$\begin{cases} c_p = \sqrt{(1 + \alpha_0)^2 [\lambda + 2\mu + (5\lambda + 6\mu)\alpha_0 + (5\lambda/2 + 3\mu)\alpha_0^2] / \rho_0}, \\ c_s = \sqrt{(1 + \alpha_0)^2 [\mu + (3\lambda + 4\mu)\alpha_0 + (3\lambda/2 + 2\mu)\alpha_0^2] / \rho_0}, \end{cases} \quad (14)$$

其中,  $c_p$  表示纵波相速度,  $c_s$  表示横波相速度.在静水应力作用下,各向同性材料依然具有各向同性的等效弹性性质,因此两类横波具有相同的相速度.

考虑沿  $X_1$  方向的单轴初始应力,初始应力产生的变形为  $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_0 [\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - v(\mathbf{I} - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)]$ .当弹性波沿  $X_1$  方向传播(即传播方向与单轴应力方向一致)时,  $\mathbf{N} = (1, 0, 0)$ .将其代入声张量  $\mathbf{Q}$  并求解特征方程(10),可得到沿单轴应力方向传播的体波相速度为<sup>[1-2,14]</sup>

$$c_p = \sqrt{\frac{(1 + \alpha_0)^2}{\rho_0} \left[ \lambda + 2\mu + 3(\lambda + 2\mu) \left( \alpha_0 + \frac{1}{2} \alpha_0^2 \right) - 2\lambda \left( v\alpha_0 - \frac{1}{2} v^2 \alpha_0^2 \right) \right]}, \quad (15)$$

$$c_{S1} = c_{S2} = \sqrt{\frac{(1 + \alpha_0)^2}{\rho_0} \left[ \mu + (\lambda + 2\mu) \left( \alpha_0 + \frac{1}{2} \alpha_0^2 \right) - 2(\lambda + \mu) \left( v\alpha_0 - \frac{1}{2} v^2 \alpha_0^2 \right) \right]}, \quad (16)$$

其中,下标 S1 表示快横波,S2 表示慢横波.当弹性波的传播方向与单轴应力方向平行时,两类横波的相速度相等,其物理本质为垂直于传播方向的平面仍保持各向同性的特性.

当弹性波的传播方向垂直单轴应力方向时,即  $N = (0, 1, 0)$  或  $N = (0, 0, 1)$ . 求解特征方程(10),可得到三类弹性波的相速度分别为

$$c_p = \sqrt{\frac{(1 - v\alpha_0)^2}{\rho_0} \left[ \lambda + 2\mu + \frac{1}{2} \lambda (2\alpha_0 + \alpha_0^2) - (3\mu + 2\lambda) (2v\alpha_0 - v^2\alpha_0^2) \right]}, \quad (17)$$

$$\begin{cases} c_{S1} = \sqrt{\frac{(1 - v\alpha_0)^2}{\rho_0} \left[ \mu + \left( \frac{\lambda}{2} + \mu \right) (2\alpha_0 + \alpha_0^2) - (\mu + \lambda) (2v\alpha_0 - v^2\alpha_0^2) \right]}, \\ c_{S2} = \sqrt{\frac{(1 - v\alpha_0)^2}{\rho_0} \left[ \mu + \frac{1}{2} \lambda (2\alpha_0 + \alpha_0^2) - (2\mu + \lambda) (2v\alpha_0 - v^2\alpha_0^2) \right]}. \end{cases} \quad (18)$$

由式(18)可知,当弹性波传播方向与单轴应力方向垂直时,两类横波的相速度不再相等,即出现横波分裂现象<sup>[31]</sup>.这一现象的物理本质是初始应力的偏量部分诱导产生等效的弹性各向异性,使得沿单轴应力方向和垂直于单轴应力方向具有不同的等效弹性性质,进而导致两种横波相速度的差异.

### 2.2 几何线性的静态变形——物理非线性条件下平面波的相速度

考虑初始应力产生线性的静态变形,即静态变形为小变形,式(2)的 Green 应变退化为

$$E = \alpha + \frac{1}{2} [\nabla u + (\nabla u)^T]. \quad (19)$$

对于几何线性的静态变形,有  $I + \alpha \approx I$ , 则平面波方程可重新表示为如下形式:

$$u(X, t) = U e^{i(kN \cdot X - \omega t)}. \quad (20)$$

联立式(5)、式(19)和式(20),则可得到初始应力作用下仅考虑物理非线性时的声张量:

$$\begin{aligned} Q = & \{ [\lambda + \mu + (B + 2C) \text{tr } \alpha + (F + 12H) (\text{tr } \alpha)^2 + (2F + 2G) \text{tr}(\alpha^2)] n \otimes n + \\ & (A/2 + 2B + (3D/2 + 4F) \text{tr } \alpha) [n \otimes n \cdot \alpha + \alpha \cdot (n \otimes n)] + \\ & [\mu + B \text{tr } \alpha + F (\text{tr } \alpha)^2 + 2G \text{tr } \alpha^2] n^2 I + 3D [\alpha^2 \cdot (n \otimes n) + n \otimes n \cdot \alpha^2] + \\ & (A/2 + 3D \text{tr } \alpha/2) [n \cdot \alpha \cdot n + (\alpha \cdot n) \cdot n] I + 8G (\alpha \cdot n \otimes n \cdot \alpha) \cdot I \} / \rho_0. \end{aligned} \quad (21)$$

在静水的初始应力条件下,通过求解特征方程(10)可得到体波的相速度为<sup>[1-2,14]</sup>

$$c_p = \sqrt{\frac{1}{\rho} [\lambda + 2\mu + (2A + 10B + 6C) \alpha_0 + (24D + 48F + 20G + 108H) \alpha_0^2]}, \quad (22)$$

$$c_s = \sqrt{\frac{1}{\rho} [(\mu + (A + 3B) \alpha_0 + (9D + 9F + 6G) \alpha_0^2)]}. \quad (23)$$

同样地,在静水的初始应力作用下,两类横波具有相同的相速度.

考虑沿  $X_1$  方向的单轴初始应力,当弹性波传播方向与单轴应力平行,即  $N = (1, 0, 0)$ , 将声张量  $Q$  代入式(10),可得到三阶弹性常数下体波的相速度为

$$c_p = \left[ \frac{1}{\rho_0} (\lambda + 2\mu + 2A\alpha_0 + 2B(3 - 2v)\alpha_0 + 2C(1 - 2v)\alpha_0 + 12D(1 - v)\alpha_0^2 + 12F(1 - 2v + v^2)\alpha_0^2 + 4G(3 + 2v^2)\alpha_0^2 + 12H(1 - 2v)^2\alpha_0^2) \right]^{0.5}, \quad (24)$$

$$c_{S1} = c_{S2} = \left\{ \frac{1}{\rho_0} \{ \mu + [A + 3D(1 - 2v)\alpha_0] (1 - v)\alpha_0/2 + B(1 - 2v)\alpha_0 + \right.$$

$$F(1-2v)^2\alpha_0^2 + 2G(1+2v^2)\alpha_0^2 \}^{0.5}. \quad (25)$$

考虑沿  $X_1$  方向的单轴初始应力,弹性波传播方向与单轴应力方向垂直,即  $\mathbf{N} = (0, 1, 0)$  或  $\mathbf{N} = (0, 0, 1)$ . 将声张量  $\mathbf{Q}$  代入式(10),可得到三阶弹性常数下相速度为

$$c_p = \left\{ \frac{1}{\rho_0} [\lambda + 2\mu - 2Av\alpha_0 + 2B(1-4v)\alpha_0 + 2C(1-2v)\alpha_0 + 6D(3v^2-v)\alpha_0^2 + 4F(1-4v+7v^2)\alpha_0^2 + 4G(1+4v^2)\alpha_0^2 + 12H(1-2v)^2\alpha_0^2] \right\}^{0.5}, \quad (26)$$

$$\begin{cases} c_{S1} = \left\{ \frac{1}{\rho_0} [\mu - Av\alpha_0 + B(1-2v)\alpha_0 - 3D(v-2v^2)\alpha_0^2 + F(1-2v)^2\alpha_0^2 + 2G(1+2v^2)\alpha_0^2] \right\}^{0.5}, \\ c_{S2} = \left\{ \frac{1}{\rho_0} [\mu + (A + 3D(1-2v)\alpha_0)(1-v)\alpha_0/2 + B(1-2v)\alpha_0 + F(1-2v)^2\alpha_0^2 + 2G(1+2v^2)\alpha_0^2] \right\}^{0.5}. \end{cases} \quad (27)$$

同样地,沿单轴应力方向传播的两类横波的相速度相等.由于应力诱导的各向异性,垂直单轴应力方向传播的两类横波具有不同的相速度.

### 2.3 非线性介质平面波的摄动近似解

在各向异性介质中,当传播方向与各向异性主轴方向不一致时,平面波的体波相速度和偏振方向通常无法得到解析解.然而,在弱各向异性近似条件下,可借助摄动理论得到体波速度及其偏振方向的解析表达式.该方法以某一各向同性介质为参考背景,将各向异性部分处理为对各向同性弹性参数的微小扰动,进而通过矩阵摄动理论求解平面波的特征值方程获得体波的相速度及极化方向<sup>[32]</sup>.由于各向异性的初始应力存在,受初始应力介质也具有等效各向异性的特征.因此,本小节将采用摄动理论求解初始应力与非线性弹性耦合作用下,弹性波相速度的摄动近似解析解.

在弱各向异性假设下,可将初始应力作用下的声张量视为基于静水应力作用下声张量的扰动,即可将声张量分为两部分:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{(iso)} + \Delta\mathbf{Q}, \quad (28)$$

其中,  $\mathbf{Q}^{(iso)}$  对应于初始应力的静水部分作用下的声张量,  $\Delta\mathbf{Q}$  为初始应力偏置部分诱导各向异性条件下的声张量.

基于摄动理论<sup>[33]</sup>,其特征值与特征向量可以表示为摄动级数的形式:

$$\begin{cases} \lambda = \lambda^{(0)} + \lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + \dots, \\ \mathbf{P} = \mathbf{P}^{(0)} + \mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(2)} + \dots, \end{cases} \quad (29)$$

其中,  $\lambda^{(0)}$  与  $\mathbf{P}^{(0)}$  分别表示静水应力条件下弹性波的相速度与极化矢量,其对应于声张量为  $\mathbf{Q}^{(iso)}$  时特征方程(10)的特征值与特征向量;  $\lambda^{(1)}$  和  $\lambda^{(2)}$  分别为相速度平方的一阶和二阶摄动项,  $\mathbf{P}^{(1)}$  和  $\mathbf{P}^{(2)}$  分别为极化矢量的一阶和二阶摄动项.

对于准纵波,其特征值的一阶和二阶的摄动项分别具有如下形式:

$$\begin{cases} \lambda_p^{(1)} = g_{pp}, \\ \lambda_p^{(2)} = \frac{g_{S1P}^2}{\lambda_p^{(0)} - \lambda_{S1}^{(0)}} + \frac{g_{S2P}^2}{\lambda_p^{(0)} - \lambda_{S2}^{(0)}}, \end{cases} \quad (30)$$

其中,  $g_{pp} = (\mathbf{P}_p^{(0)})^T \cdot \Delta\mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}_p^{(0)}$ ,  $g_{S1P} = (\mathbf{P}_{S1}^{(0)})^T \cdot \Delta\mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}_p^{(0)}$ ,  $g_{S2P} = (\mathbf{P}_{S2}^{(0)})^T \cdot \Delta\mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}_p^{(0)}$ .

因此准纵波的相速度为

$$V_p^2 = c_p^2 + \lambda_p^{(1)} + \lambda_p^{(2)} + \dots, \tag{31}$$

其中,  $c_p$  为静水应力条件下纵波相速度,可通过式(14)或式(23)得到.

对于准横波,有

$$V_{S1,S2}^2 = c_s^2 + \frac{1}{2} \{ (g_{11} + g_{22}) \pm [ (g_{11} - g_{22})^2 + 4g_{12}^2 ]^{1/2} \}, \tag{32}$$

其中,  $c_s$  为静水应力条件下横波相速度,可通过式(14)或式(23)得到. $g_{ij}(i, j = 1, 2)$  的摄动级数形式如下:

$$g_{ij} = g_{ij}^{(1)} + g_{ij}^{(2)} + \dots, \tag{33}$$

其中,一阶和二阶摄动项的结果为

$$\begin{cases} g_{11}^{(1)} = (\mathbf{P}_{S1}^{(0)})^T \cdot \Delta \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}_{S1}^{(0)}, g_{22}^{(1)} = (\mathbf{P}_{S2}^{(0)})^T \cdot \Delta \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}_{S2}^{(0)}, g_{12}^{(1)} = (\mathbf{P}_{S1}^{(0)})^T \cdot \Delta \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}_{S2}^{(0)}, \\ g_{11}^{(2)} = \frac{g_{S1P}^2}{c_s^2 - c_p^2}, g_{22}^{(2)} = \frac{g_{S2P}^2}{c_s^2 - c_p^2}, g_{12}^{(2)} = \frac{g_{S1P} g_{S2P}}{c_s^2 - c_p^2}. \end{cases} \tag{34}$$

以单轴预应力介质纵波的相速度为例,给定传播方向  $(\varphi, \theta)$  时,摄动方法得到的一阶近似项  $g_{PP}$  可表示为如下形式:

$$g_{PP} = L_{PP}^{(0)} + L_{PP}^{(1)} \cos(2\phi) + (L_{PP}^{(2)} + L_{PP}^{(3)} \cos(2\phi)) \cos(2\theta) + (L_{PP}^{(4)} + L_{PP}^{(5)} \cos(2\phi)) \cos(4\theta) + L_{PP}^{(6)} (3 - 4\cos(2\theta) + \cos(4\theta)) \cos(4\phi). \tag{35}$$

类似地,与体波相速度的二阶摄动项相关的系数  $g_{S1P}$  与  $g_{S2P}$  的表达式分别为

$$\begin{cases} g_{S1P} = (L_{S1P}^{(1)} + L_{S1P}^{(2)} \cos(2\phi)) \sin(2\theta) + (L_{S1P}^{(3)} + L_{S1P}^{(4)} \cos(2\phi)) \sin(4\theta) + L_{S1P}^{(5)} (-2\sin(2\theta) + \sin(4\theta)) \cos(4\phi), \\ g_{S2P} = (L_{S2P}^{(1)} + L_{S2P}^{(2)} \cos(2\phi)) \sin(2\phi) \sin \theta + L_{S2P}^{(3)} (1 - \cos(2\theta)) \sin(4\phi) \sin \theta. \end{cases} \tag{36}$$

横波相速度的一阶摄动项的系数  $g_{ij}^{(1)}$  的表达式为

$$\begin{cases} g_{11}^{(1)} = L_{11}^{(0)} + L_{11}^{(1)} \cos(2\theta) + (L_{11}^{(2)} + L_{11}^{(3)} \cos(2\theta) + L_{11}^{(6)} \cos(4\theta)) \cos(2\phi) + L_{11}^{(4)} \cos(4\theta) + (L_{11}^{(5)} + L_{11}^{(7)} \cos(4\theta)) \cos(4\phi), \\ g_{22}^{(1)} = L_{22}^{(0)} + L_{22}^{(1)} \cos(2\theta) + (L_{22}^{(2)} + L_{22}^{(3)} \cos(2\theta)) \cos(2\phi) + (L_{22}^{(4)} + L_{22}^{(5)} \cos(2\theta)) \cos(4\phi), \\ g_{12}^{(1)} = [ (L_{12}^{(1)} + L_{12}^{(2)} \cos(2\theta)) \sin(2\phi) + (L_{12}^{(3)} + L_{12}^{(4)} \cos(2\theta)) \sin(4\phi) ] \cos \theta, \end{cases} \tag{37}$$

其中,  $L_{PP}^{(i)}, L_{S1P}^{(i)}, L_{S2P}^{(i)}, L_{11}^{(i)}, L_{22}^{(i)}, L_{12}^{(i)}$  具体的表达式见附录 B1(考虑物理非线性)和附录 B2(考虑初始变形的几何非线性).由式(35)–(37)及附录 B1 和 B2 结果可见,在非静水的初始应力作用下,不管是考虑物理非线性还是静态变形的几何非线性,弹性波体波相速度对传播方向都具有  $2\phi, 4\phi, \theta, 2\theta$  及  $4\theta$  的正弦和余弦函数的依赖性.其各方位依赖性项的权重取决于初始应力方向及其产生的静态变形的大小.

为验证摄动近似解析解的有效性,我们将体波相速度的摄动近似解与数值求解式(10)得到的精确解进行比较.假设单轴应力产生的预应变为  $\alpha_1 = 0.004, \alpha_2 = -v\alpha_1, \alpha_3 = -v\alpha_1$ .考虑 7075-T651 铝合金材料,其物理参数见表 1.

图 2 展示了物理非线性条件下受单轴初应力的介质中体波相速度的摄动近似解与数值精确解的对比.可以看到,在考虑物理非线性条件的初始应力介质中,纵波与快横波相速度的一阶摄动近似解与数值计算得到的精确解高度吻合.而慢横波相速度的一阶摄动近似解存在显著误差,但二阶近似解与数值精确解高度吻合.因此,考虑材料的物理非线性时,体波相速度的二阶摄动近似解便具有较高的精度,验证了摄动近似解析求解初始应力作用下体波相速度的可行性与有效性.此外,由于应力诱导的各向异性,体波相速度具有明显的方位依赖性.由式(35)–(37),体波在方位角上以正弦和余弦函数形式呈现周期性的变化.由图 2 可知,纵波与快横波(S1 波)的相速度以  $2\phi$  的方位依赖性为主导,而慢横波的相速度以  $4\phi$  的方位依赖性为主导.

图 3 展示了单轴应力作用下考虑初始变形的几何非线性时体波相速度的摄动近似解与数值精确解的对

比.可以看到,在考虑几何非线性条件的预应力介质中,体波相速度的一阶摄动近似解便能与数值计算得到的精确解高度吻合,且几何非线性对体波相速度的影响较物理非线性要小.仅考虑静态变形的几何非线性时,单轴应力作用下体波的相速度均以 $2\phi$ 的方位依赖性为主导.通过以上分析,初始应力作用下体波的二阶摄动近似解在两种情况下均与精确的相速度解具有高度一致性,从而验证了本文摄动近似求解的可行性与有效性.

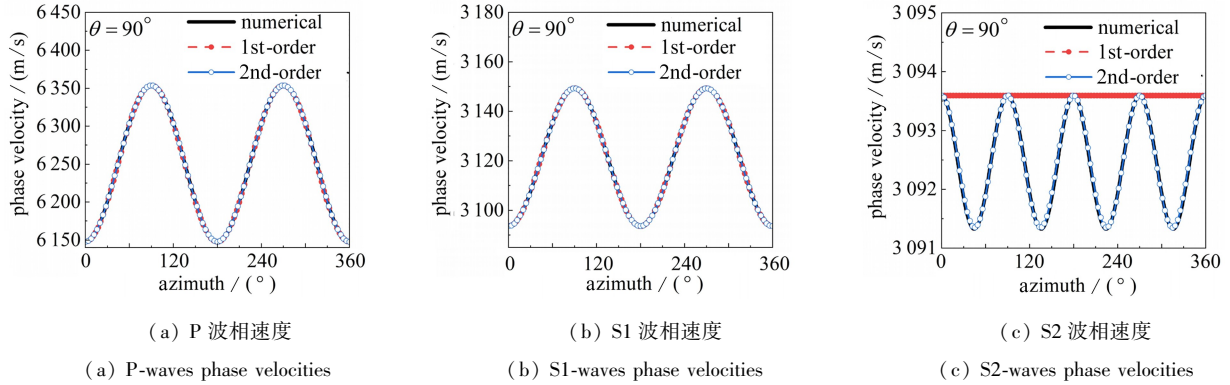


图2 物理非线性条件下P波、S1波和S2波相速度的摄动近似解和数值精确解的比较

Fig. 2 Comparisons of the phase velocities of P-waves, S1-waves and S2-waves through perturbation approximations and exactly numerical solutions with physical nonlinearity

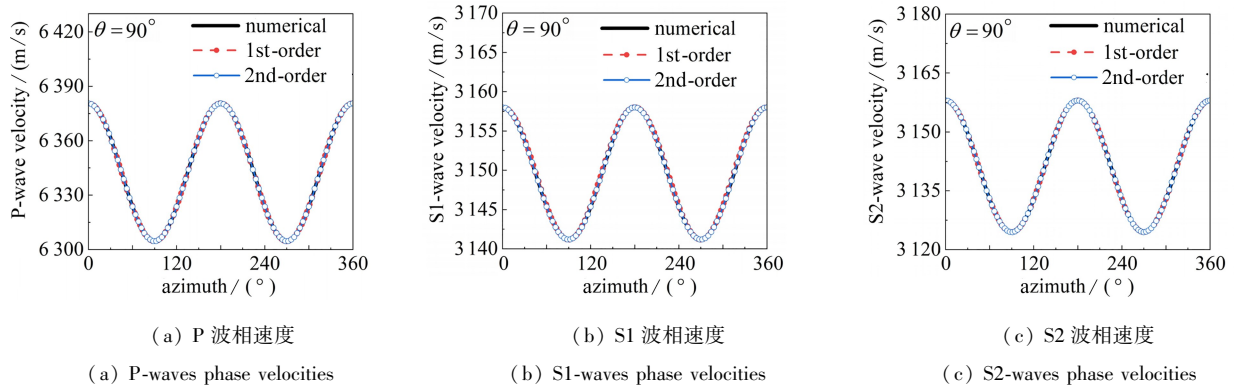


图3 几何非线性条件下P波、S1波和S2波相速度的摄动近似解和数值精确解的比较

Fig. 3 Comparisons of the phase velocities of P-waves, S1-waves and S2-waves through perturbation approximations and exactly numerical solutions with geometric nonlinearity

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同.

### 3 结果与讨论

为研究受初始应力介质中物理非线性与几何非线性对弹性波传播的影响,我们分别针对单轴、双轴、三轴初始应力情形对特征方程(10)求解,并进一步系统分析物理非线性与几何非线性对弹性波相速度、偏振方向以及应力诱导的速度各向异性和极化各向异性等方面影响.采用初始各向同性的7075-T651铝合金材料进行分析,其密度为 $2700 \text{ kg/m}^3$ ,弹性参数见表1.为便于建立初始变形与初始应力的联系,假设初始应力产生弹性的预应变,以研究不同初始应力状态对弹性波传播的影响.

表1 7075-T651 铝合金弹性常数

Table 1 Elastic constants of the 7075-T651 aluminum alloy

$\lambda/\text{GPa}$	$\mu/\text{GPa}$	$A/\text{GPa}$	$B/\text{GPa}$	$C/\text{GPa}$
54.9	26.5	-351.2	-149.4	-102.8

### 3.1 单轴初始应力作用下平面波的传播

对于单轴应力情形,假设初始应力产生的初始应变为  $\alpha_1 = 0.004, \alpha_2 = -\nu\alpha_1, \alpha_3 = -\nu\alpha_1$ .通过求解特征方程(10)可以得到平面波相速度的方位依赖性,体波的极化方向.图 4 展示了几何非线性和物理非线性条件下纵波(P 波)的相速度相对变化、极化方向及极化各向异性.图中上标 GN 和 PN 分别表示考虑几何非线性和物理非线性情形,  $V_p^0$  为无初始应力时的纵波速度,  $X, Y, Z$  对应  $X_1, X_2, X_3$  轴,其中方位角  $\phi$  通过传播方向在  $X_1-X_2$  平面内的投影与  $X_1$  轴的夹角来定义,倾角  $\theta$  表示传播方向与  $X_3$  轴的夹角.在单轴拉伸应力作用下,体波传播特征显著依赖于初始变形的几何非线性与物理非线性特性.几何非线性导致沿传播方向的 P 波相速度增加,而物理非线性导致沿传播方向的 P 波相速度减小,物理非线性对 P 波相速度的影响更显著,如图 4(a) 与 4(d) 所示.这归因于初始拉应力作用下,物理非线性导致等效纵波模量减小,而几何非线性导致等效纵波模量增加,如式(17)和(24)所示.然而,对于垂直单轴应力方向附近传播的 P 波,几何非线性导致 P 波相速度减小,而物理非线性导致 P 波相速度增加.这是因为在单轴拉应力作用下,由于 Poisson 效应垂直单轴应力的方向产生压缩变形.初始应力可导致材料的等效弹性性质具有各向异性特征,导致 P 波速度具有方位依赖性.单轴初始应力作用下,准纵波的方位依赖性以  $2\phi$  和  $2\theta$  项占主导.

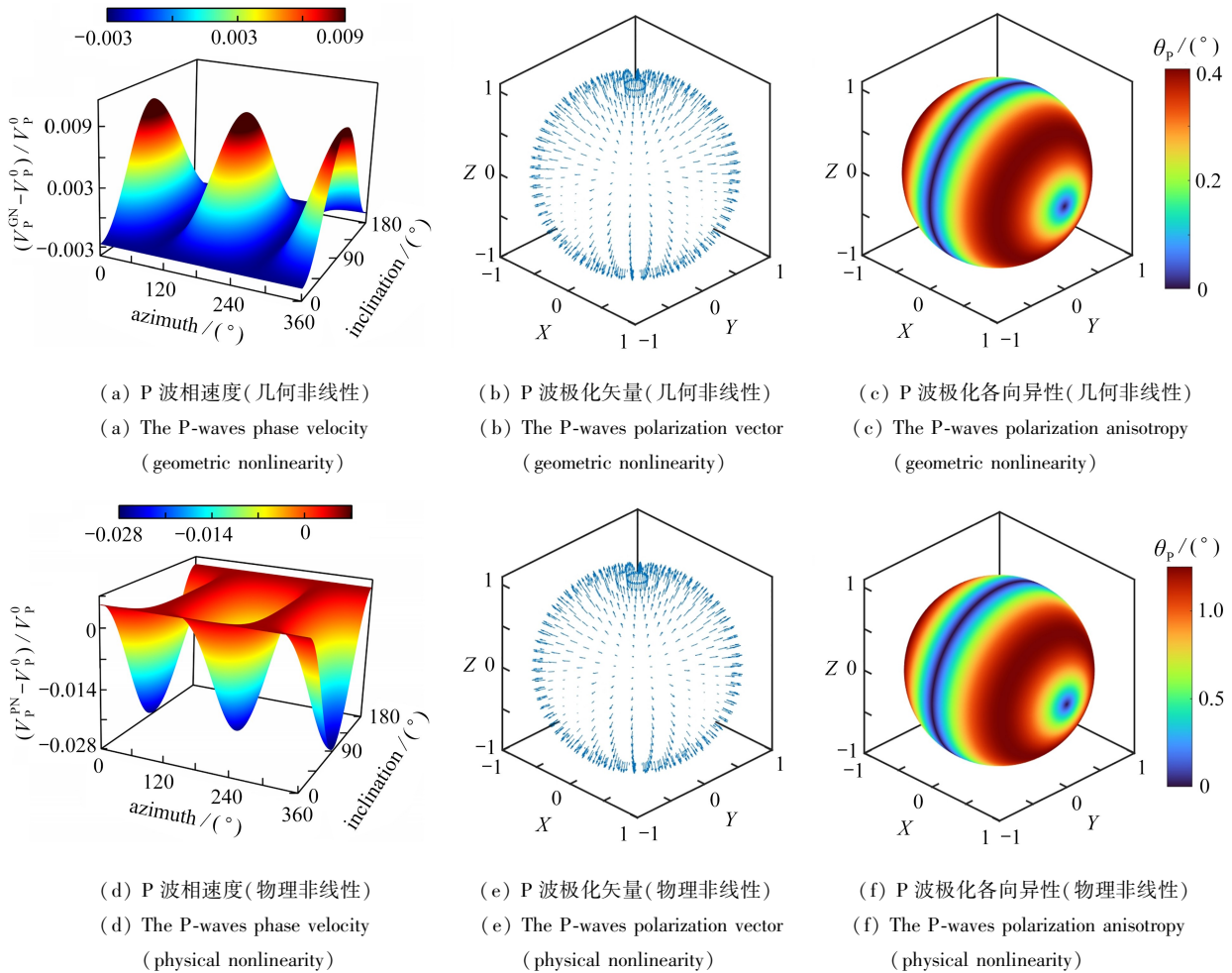


图 4 受单轴初应力介质几何非线性及物理非线性条件下 P 波的相速度相对变化、极化矢量及极化各向异性

Fig. 4 Relative variations of phase velocities, polarization vectors and polarization anisotropy of P-waves under geometric nonlinearity or physical nonlinearity in uniaxially stressed media

此外,应力诱导的各向异性还导致准纵波的偏振方向偏离传播方向,产生极化各向异性.极化各向异性通过相对各向同性时体波极化方向的偏离角  $\theta_i (i = P, S)$  来衡量,其定义如下:

$$\theta_i = \arccos\left(\frac{\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_i^{(0)}}{|\mathbf{P}_i| |\mathbf{P}_i^{(0)}|}\right), \quad (38)$$

其中,  $\mathbf{P}_i$  表示初始应力作用下体波的极化矢量,  $\mathbf{P}_i^{(0)}$  表示无应力时体波的极化矢量. 由于快慢横波的极化方向正交, 且它们的极化方向的偏离角相同, 因此统一使用  $\theta_s$  表征快慢横波的极化各向异性.

由于应力诱导的各向异性, 极化各向异性参数  $\theta_p$  与  $\theta_s$  与传播方向有关, 如图 4(c) 与 4(f) 所示. 物理非线性与静态变形的几何非线性对 P 波的极化各向异性的空间分布具有相似的影响, 但物理非线性对纵波的极化各向异性影响更大(极化方向的偏差可达  $1^\circ$  左右). 在沿平行于和垂直于单轴应力的方向上, P 波的偏振方向与传播方向一致, 此时三类体波解耦. 另外, 在垂直单轴应力方向的平面 ( $X_2$ - $X_3$  平面) 内, 此时 P 波不具有极化各向异性. 这是因为此时  $X_2$ - $X_3$  平面为各向同性平面, P 波与 SV 波解耦.

图 5 展示了几何非线性和物理非线性条件下快(S1)慢(S2)横波的相速度相对变化及横波相速度的各向异性特征,  $V_s^0$  为无初始应力时各向同性介质的横波速度. 其中横波速度的各向异性通过横波各向异性参数  $A_s$  来衡量:

$$A_s = \frac{V_{S1} - V_{S2}}{(V_{S1} + V_{S2})/2}. \quad (39)$$

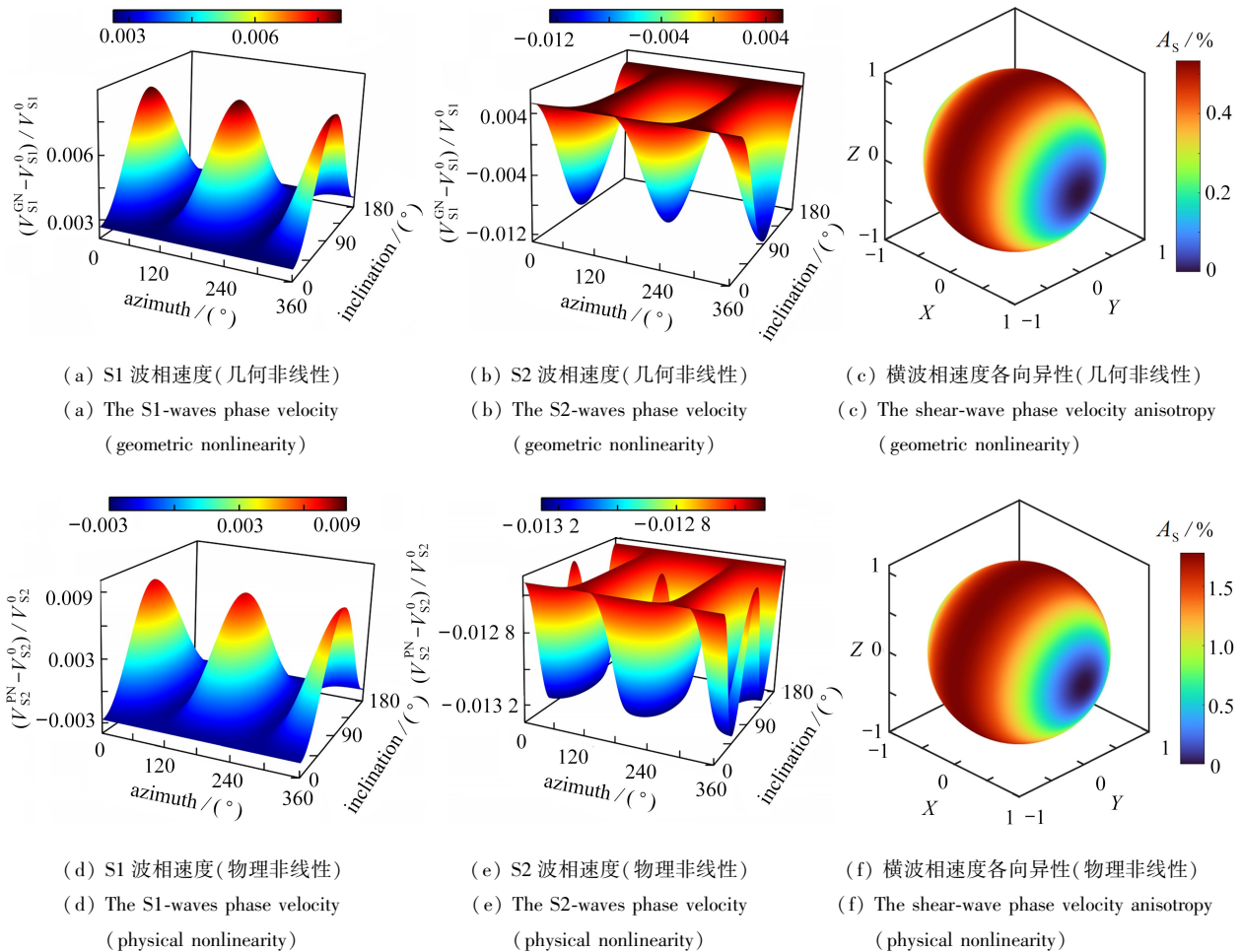


图 5 受单轴初应力介质几何非线性及物理非线性条件下 S1 波和 S2 波的相速度相对变化和横波相速度各向异性

Fig. 5 Relative variations of phase velocities of S1-waves and S2-waves as well as the shear-wave phase velocity anisotropy under geometric nonlinearity or physical nonlinearity in uniaxially stressed media

横波各向异性参数可以表征应力诱导各向异性导致的快慢横波相速度差异. 与纵波不同, 受横波偏振方向的影响, 单轴初始应力对快慢横波速度的影响规律较复杂. 在单轴拉应力作用下, 几何非线性与物理非线性均导致沿传播方向的 S1 波相速度增加. 对于垂直于单轴应力方向附近传播的 S1 波, 几何非线性导致快横

波相速度增加,而物理非线性导致 S1 波相速度减小.然而,几何非线性与物理非线性对 S2 波相速度的影响规律截然不同.物理非线性导致所有传播方向上的 S2 波相速度减小,而几何非线性导致垂直于单轴应力方向传播的 S2 波相速度增加.与纵波类似,考虑物理非线性时初始应力对 S2 波相速度的影响更显著.与纵波类似,由于应力诱导的各向异性,考虑几何非线性与物理非线性时快横波的方位依赖性均以  $2\phi$  和  $2\theta$  项占主导.仅考虑静态变形的几何非线性时,慢横波的方位依赖性以  $2\phi$  和  $2\theta$  项占主导,而考虑物理非线性时慢横波的方位依赖性以  $4\phi$  和  $2\theta$  项占主导,且慢横波的相速度受传播方向的影响相对快横波要小很多.考虑几何非线性与物理非线性时,单轴应力诱导的横波各向异性特征相似,且沿单轴应力方向传播的两类横波相速度相同,这是因为沿  $X_1$  方向的单轴应力作用下,  $X_2$ - $X_3$  平面为各向同性平面.而在  $X_2$ - $X_3$  平面内传播的横波各向异性最显著,且考虑物理非线性时应力诱导的横波速度各向异性程度更显著(  $A_s$  可达到 1.5% ).

图 6 展示了几何非线性和物理非线性条件下快(S1)慢(S2)横波的极化矢量及横波极化各向异性特征.图中蓝色箭头对应准 SV 波,而红色箭头对应准 SH 波.准 SV 波与准 SH 波以通过  $X_3$  轴的竖向平面为传播平面来定义.与纵波极化各向异性类似,横波的极化各向异性通过初始应力作用下横波偏振方向与无初应力时横波偏振方向偏离角度来衡量.由图可知,初始应力诱导各向异性导致快慢横波的极化各向异性.考虑物理非线性与几何非线性条件时,在空间中快慢横波极化矢量均包含准 SV 波与准 SH 波两种类型,但两种条件下快慢横波对应的类型刚好相反.在蓝色与红色箭头的交界处,产生准 SV 波与准 SH 波的类型转换,此时快慢横波的极化各向异性达到最大程度(偏离角度达到  $45^\circ$  ).

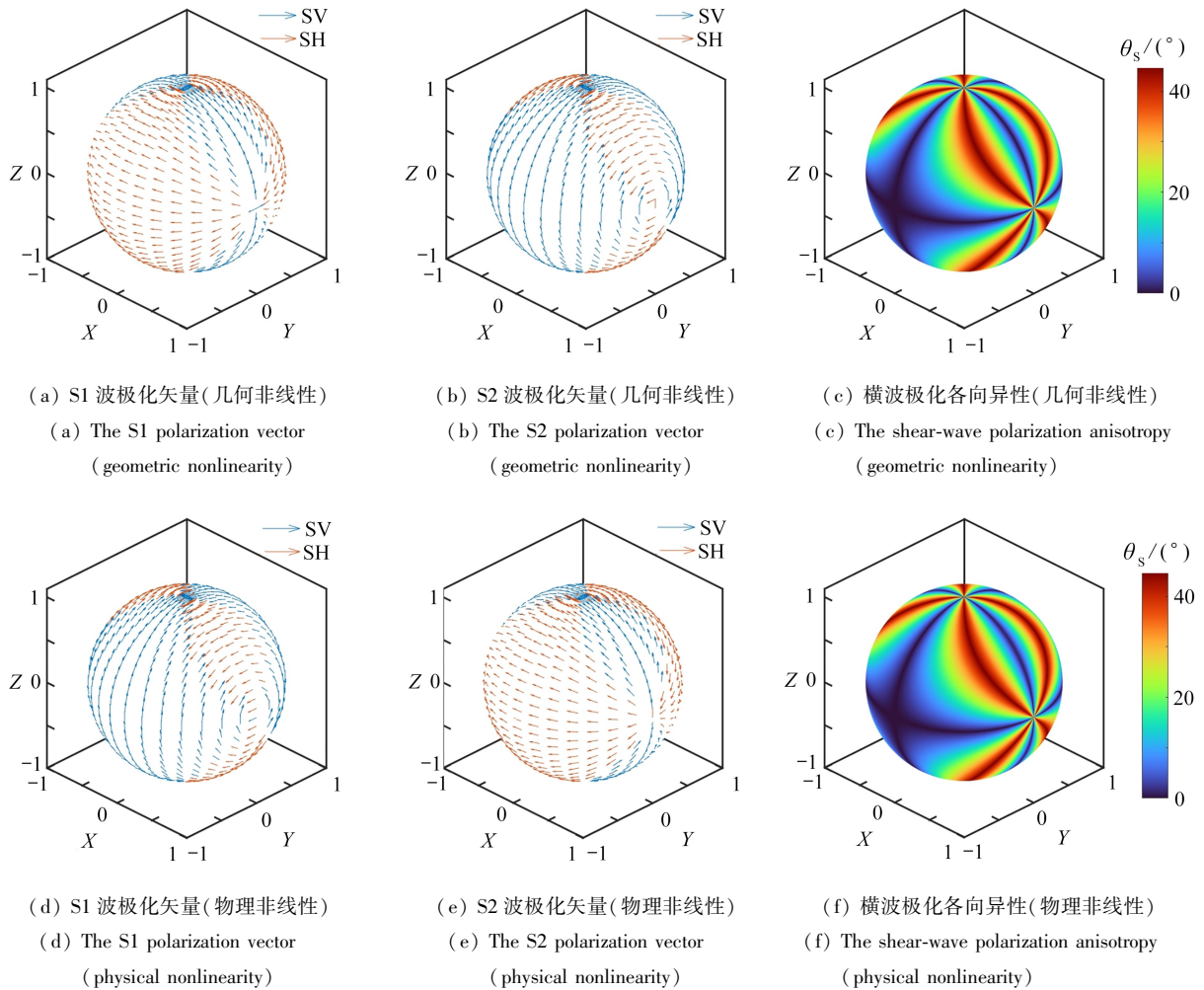


图 6 受单轴初应力介质几何非线性及物理非线性条件下 S1 波和 S2 波的极化矢量与横波极化各向异性

Fig. 6 Polarization vectors and polarization anisotropy of S1 and S2 waves under geometric nonlinearity or physical nonlinearity in uniaxially stressed media

### 3.2 双轴初始应力作用下平面波的传播

对于双轴应力情形,假设双轴的初始应力产生的初始应变为  $\alpha_1 = 0.004, \alpha_2 = 0.002$ , 则  $\alpha_3 = -v / ((1 - v)(\alpha_1 + \alpha_2))$ . 同样地,通过求解特征方程(10)可以得到三类体波的相速度和极化方向.

图7展示了双轴初始应力作用下考虑几何非线性和物理非线性时P波的相速度相对变化、极化矢量及极化各向异性.在双轴拉伸应力作用下,体波传播特征同样依赖于初始变形的几何非线性和物理非线性特性.几何非线性导致沿双轴应力平面内传播的P波相速度增加,而物理非线性导致双轴应力平面内传播的P波相速度减小,且沿最大初应力方向传播的纵波具有最小相速度.这源于拉伸的初始变形导致沿最大应力方向材料“变软”.对于垂直双轴应力方向传播的P波,几何非线性导致P波相速度减小,而物理非线性导致P波相速度增加,如图7(a)和7(d)所示.

双轴初始应力作用下P波速度同样具有方位依赖性,且以  $2\phi$  和  $2\theta$  项为主,但其对方位角  $\phi$  的依赖性较单轴应力时更小.然而,P波的相速度变化具有明显与方位无关的各向同性项,这来源于双轴应力中平均应力分量的贡献.此外,准纵波的极化各向异性也较单轴应力时更复杂,静态变形的几何非线性和物理非线性对准纵波极化各向异性的空间分布具有相似的影响,如图7(c)与7(f)所示.物理非线性对纵波的极化各向异性影响更大(极化方向的偏差可达  $1.5^\circ$  左右).在平行于初始应力主轴的方向上,P波的偏振方向与传播方向一致,此时三类体波解耦,是因为均匀静态变形假设下应力诱导的各向异性主轴与主应力轴方向一致.在平行于最大主应力平面内,在倾角  $\theta \approx \pm 45^\circ$  的方向上具有最大极化各向异性.

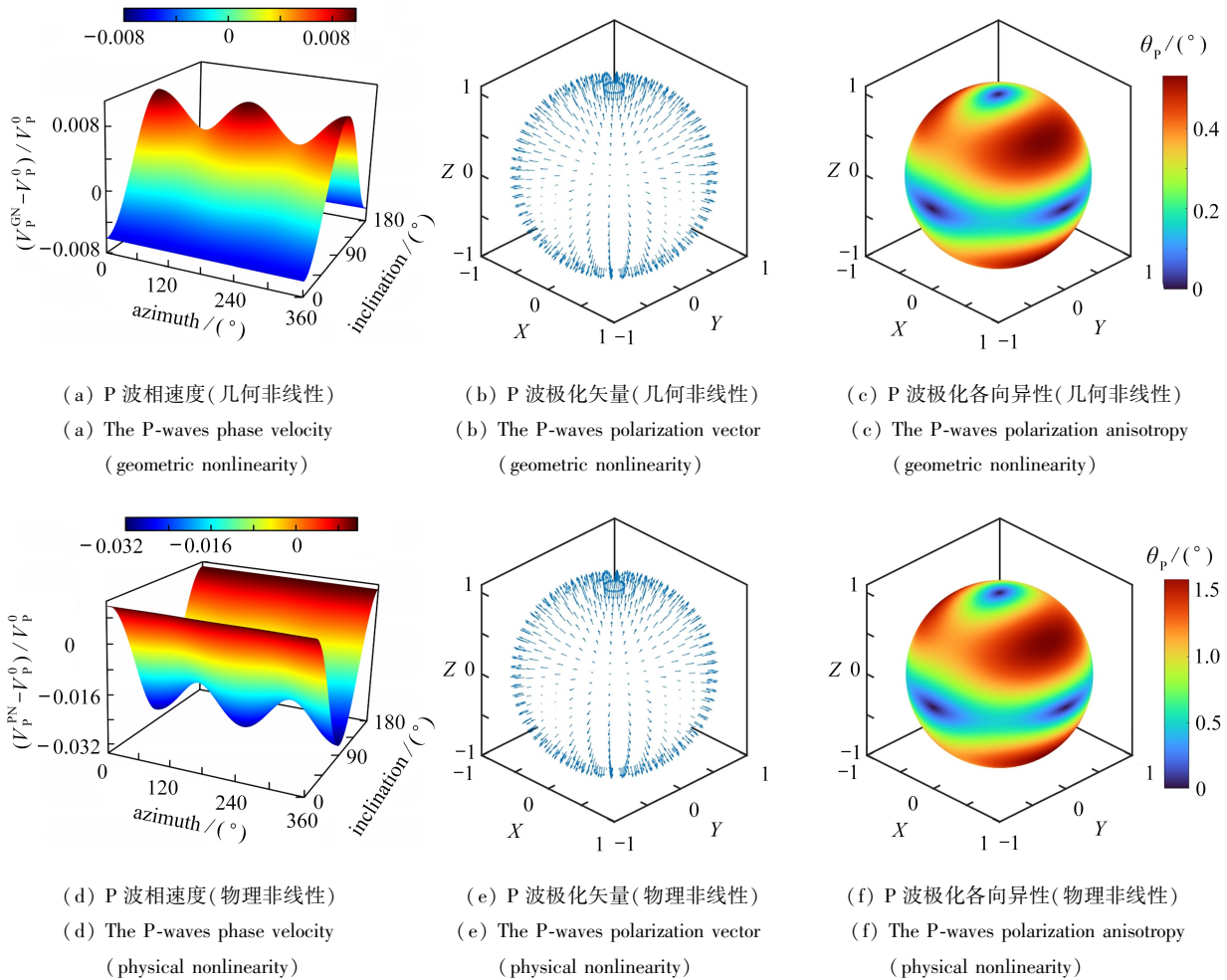


图7 受双轴初应力介质几何非线性及物理非线性条件下P波的相速度、极化矢量及极化各向异性

Fig. 7 Relative variations of phase velocities, polarization vector and polarization anisotropy of P-wave under geometric nonlinearity or physical nonlinearity in biaxially stressed media

图 8 展示了双轴初始应力作用下考虑几何非线性和物理非线性时,快(S1)慢(S2)横波的相速度相对变化及横波相速度的各向异性特征.与单轴应力情形类似,物理非线性条件下初应力对横波相速度的影响更显著.与单轴应力情形不同,仅考虑几何非线性时双轴应力导致快慢横波的相速度均增加,而考虑物理非线性时双轴初始应力导致慢横波相速度均减小.不同非线性机制对横波相速度的方位依赖性的影响呈现明显差异.仅考虑静态变形的几何非线性时,慢横波相速度随方位角  $\phi$  的变化更显著.而考虑物理非线性时,快横波相速度随方位角  $\phi$  的变化更显著,而慢横波相速度随倾角  $\theta$  的变化更显著,但快慢横波的方位依赖性均以  $2\phi$  和  $2\theta$  项为主.

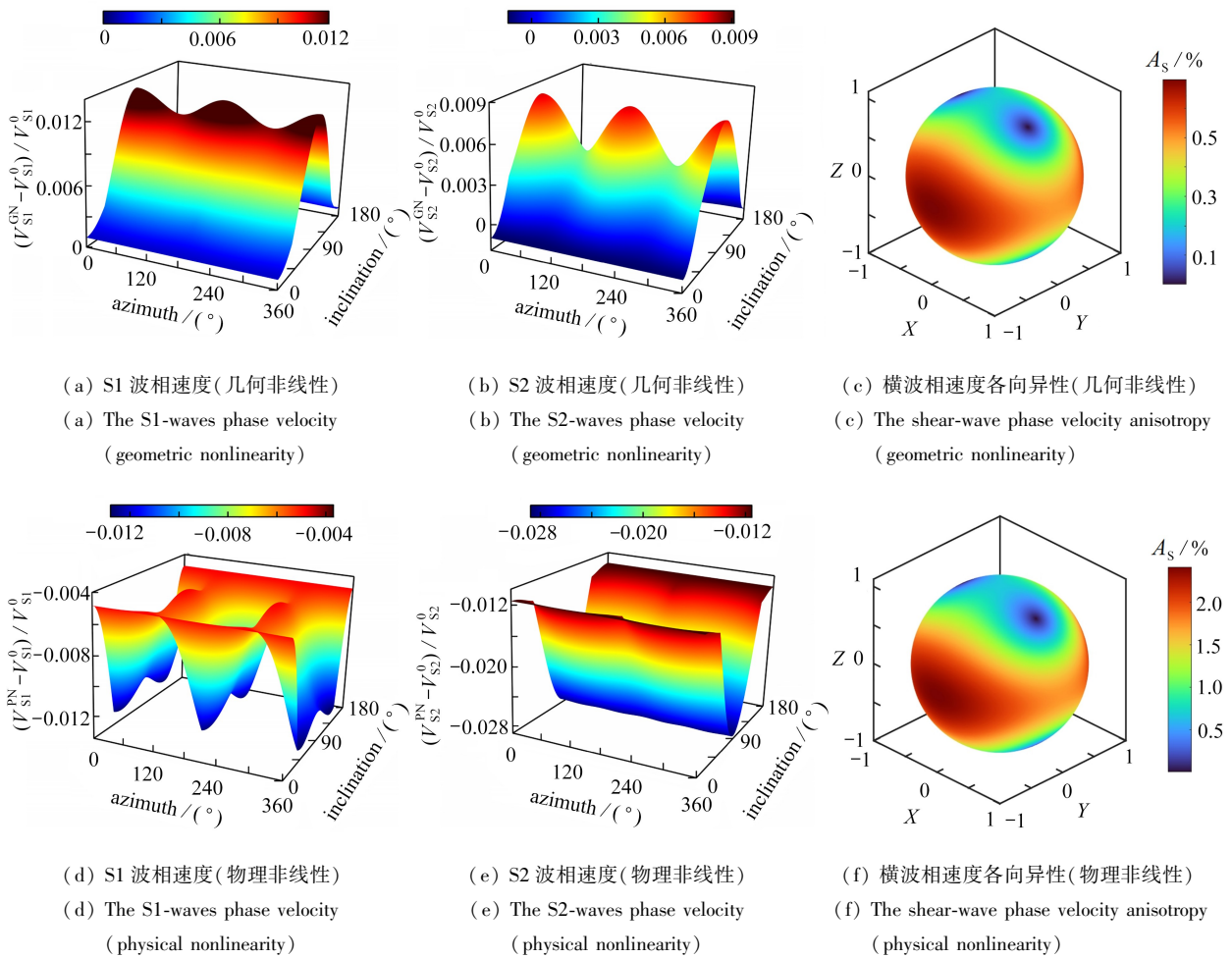


图 8 受双轴初应力介质几何非线性及物理非线性条件下 S1 波和 S2 波的相速度和横波相速度各向异性  
Fig. 8 Relative variations of phase velocities of S1-waves and S2-waves as well as the shear-wave phase velocity anisotropy under geometric nonlinearity or physical nonlinearity in biaxially stressed media

此外,相比单轴应力,双轴应力诱导的横波速度各向异性更加显著,且考虑物理非线性时应力诱导的横波分裂程度更大 ( $A_s$  可达到 2.0%).沿双轴应力方向及垂直双轴应力平面方向的两类横波相速度具有明显差异,源于双轴应力作用下应力主轴方向的初始变形明显不同.但在传播空间中依然存在横波简并的方向 ( $A_s$  为零的方向).

图 9 展示了几何非线性和物理非线性条件下快(S1)慢(S2)横波的极化矢量及横波极化各向异性特征.图中蓝色箭头对应准 SV 波,而红色箭头对应准 SH 波.同样地,初始双轴应力诱导各向异性导致快慢横波的极化各向异性,但其极化各向异性的空间分布范围相较单轴应力时更小,这源于双轴拉伸应力导致  $X_1$ - $X_2$  平面内的等效弹性各向异性减小.与单轴应力作用时相似,在传播空间中快慢横波极化矢量均包含准 SV 波与准 SH 波两种类型,但在考虑几何非线性和物理非线性情形下,快慢横波对应的类型刚好相反.由图 9(c) 和 9(f) 可以看到,无论是考虑几何非线性还是物理非线性,横波的极化各向异性都集中分布在垂直双轴应

力平面的传播方向附近.在蓝色与红色箭头的交界处,产生准SV波与准SH波的类型转换,此时横波的速度各向异性较小,但快慢横波的极化各向异性达到最大程度(偏离角度达到 $45^\circ$ ).

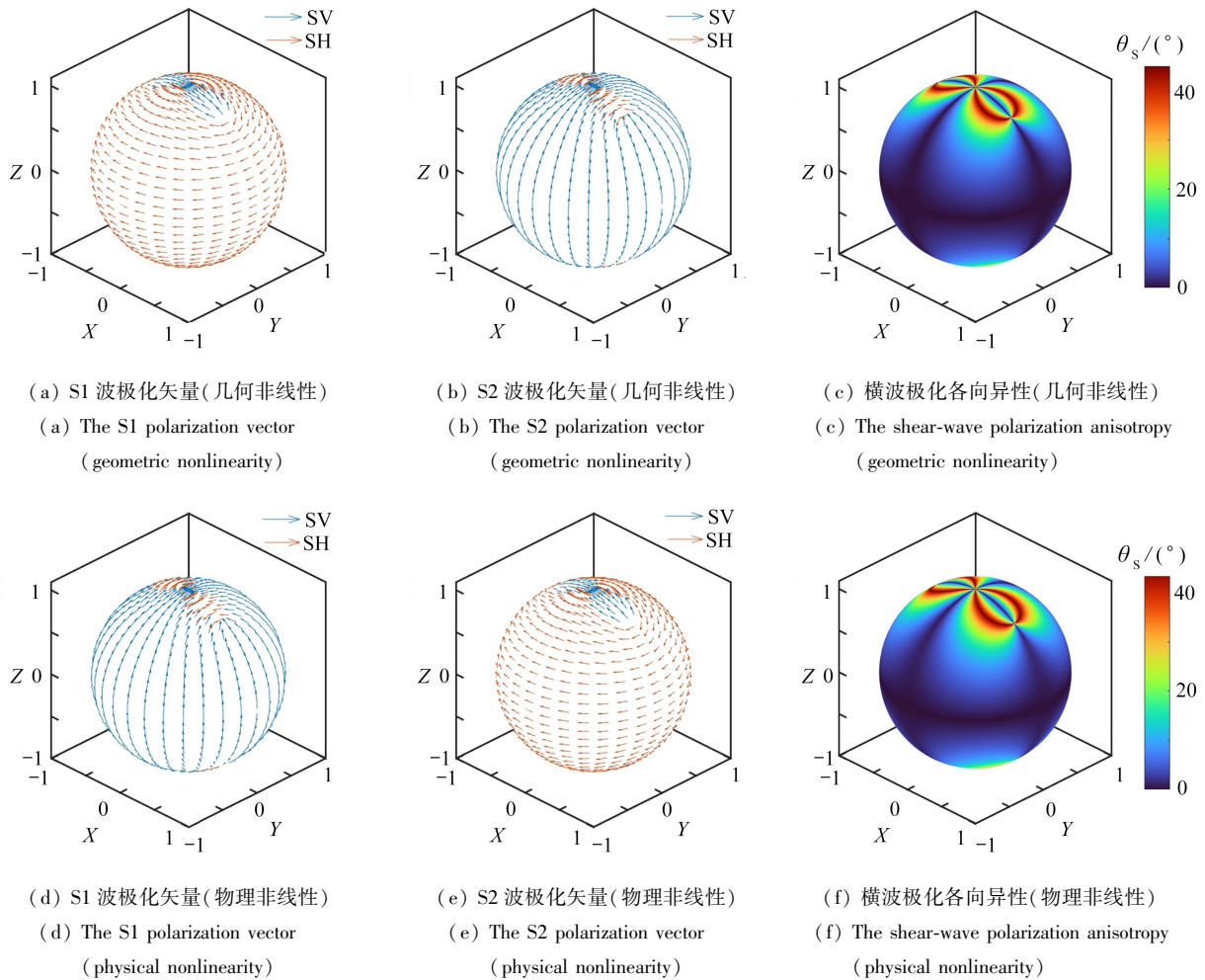


图9 受双轴初应力介质几何非线性及物理非线性条件下S1波和S2波的极化矢量与横波极化各向异性  
Fig. 9 Polarization vectors and polarization anisotropy of S1 and S2 waves under geometric nonlinearity or physical nonlinearity in biaxially stressed media

### 3.3 三轴初始应力作用下平面波的传播

对于三轴应力情形,假设三轴初始应力产生的初始应变为 $\alpha_1 = 0.004, \alpha_2 = 0.002, \alpha_3 = 0.001$ ,其在 $X_1$ - $X_2$ 平面内的应变与双轴应力情形时相同.通过求解特征方程(10)同样获得了三类体波的相速度和极化方向.图10展示了三轴初始应力作用下考虑几何非线性和物理非线性时,P波的相速度相对变化、极化矢量及极化各向异性.在三轴拉伸应力作用下,体波传播特征也明显依赖于初始变形的几何非线性和物理非线性特性.几何非线性导致准P波的相速度增加,而物理非线性导致准P波的相速度减小.由于三轴应力状态下静水应力部分导致材料的“软化或硬化”,三轴的拉伸应变导致更加显著的相速度变化.在三轴应力作用下,物理非线性条件下应力诱导的各向异性产生的准P波方位依赖性规律与考虑静态变形的几何非线性时相反,但准P波的相速度均主要以 $2\phi$ 和 $2\theta$ 项方位依赖性变化,如图10(a)和10(d)所示.

此外,三轴初始应力作用下准纵波的极化各向异性与单轴、双轴应力时明显不同.三轴初始应力导致的纵波速度各向异性及极化各向异性均比单轴、双轴应力情形要小,但静态变形的几何非线性和物理非线性对纵波极化各向异性的空间分布的影响相似,如图10(c)与10(f)所示.在平行于最大主应力平面内,在倾角 $\theta \approx \pm 45^\circ$ 的方向上具有最大的极化各向异性,但在考虑物理非线性时准纵波的极化方向的偏差也仅可达 $0.6^\circ$ 左右.这说明三轴初始应力诱导的各向异性较单轴和双轴应力情形更弱,其归因于给定的三轴应力状态的应力偏量部分更小.同时,在平行于初始应力主轴方向上,P波的偏振方向与传播方向一致,此时三

类体波解耦。

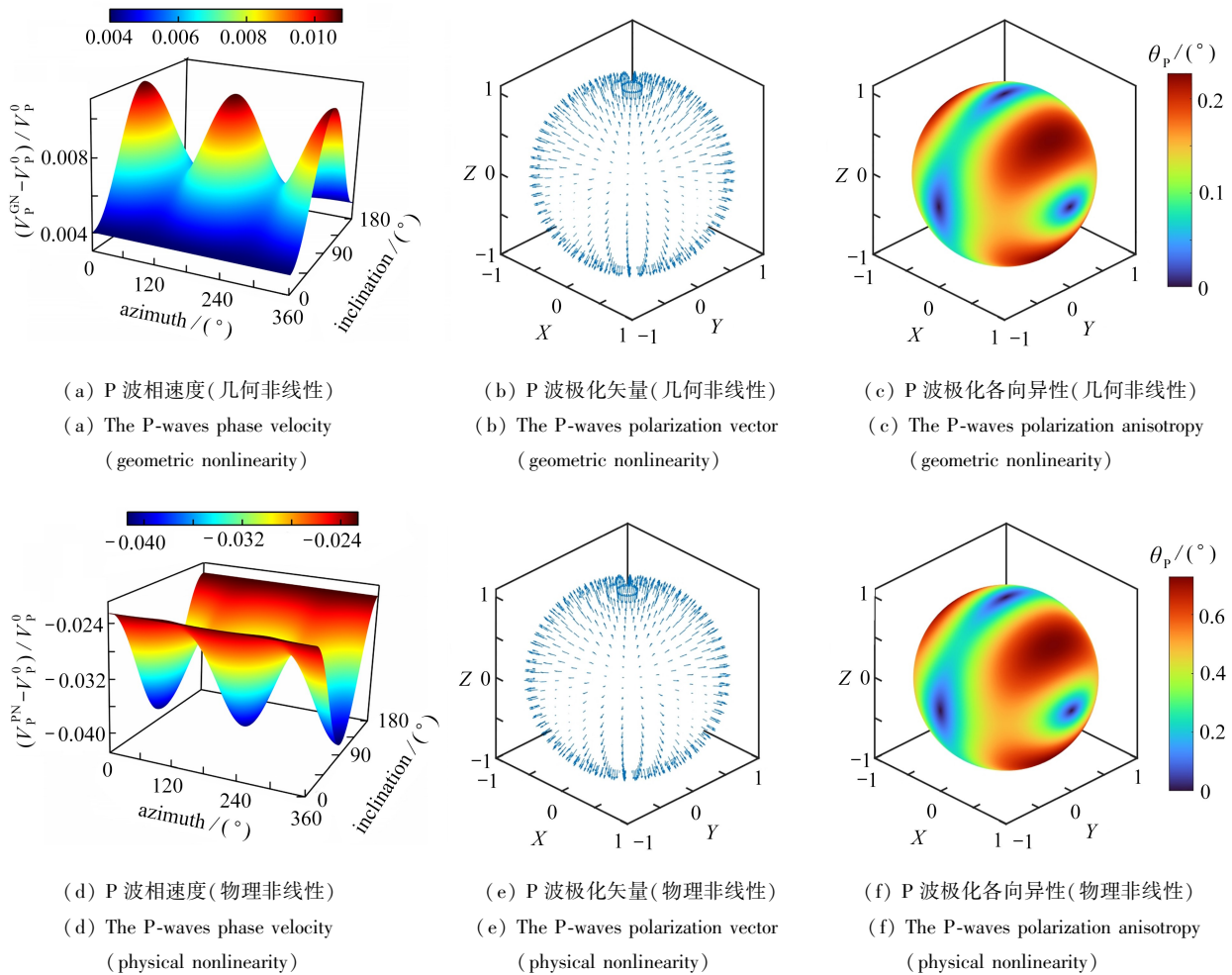


图 10 受三轴初始应力介质几何非线性及物理非线性条件下 P 波的相速度、极化矢量及极化各向异性

Fig. 10 Relative variations of phase velocities, polarization vector and polarization anisotropy of P-wave under geometric nonlinearity or physical nonlinearity in triaxially stressed media

图 11 展示了三轴初始应力作用下考虑几何非线性和物理非线性时,快(S1)慢(S2)横波的相速度相对变化及横波相速度的各向异性特征.同样地,物理非线性条件下初始应力对横波相速度的影响更显著.与纵波速度一样,考虑静态变形的几何非线性时三轴的预拉应变导致快慢横波的相速度均增加,而考虑物理非线性时三轴的预拉应变导致快慢横波的相速度均减小.三轴初始应力作用下横波的方位依赖性与单轴应力相似,但相速度明显具有与方位无关的各向同性分量.三轴应力作用下快慢横波随方位角的变化较单轴、双轴应力情形时更小,且快慢横波的方位依赖性也均以  $2\phi$  和  $2\theta$  项为主.三轴初始应力作用下不同非线性机制对横波相速度的方位依赖性的影响也呈现明显差异.考虑静态变形的几何非线性时,快横波仅随倾角  $\theta$  有显著的变化,而慢横波相速度随倾角  $\theta$  和方位角  $\phi$  均有显著的变化.考虑物理非线性时,快慢横波的相速度均随方位角  $\phi$  有显著的变化,而快横波的相速度受传播方向的倾角  $\theta$  变化影响较小.相比单轴与双轴初始应力,三轴初始应力诱导的横波速度各向异性较小,即使考虑物理非线性时应力诱导的横波分裂程度  $A_s$  也仅可达到 1.0%.在受三轴初始应力的介质中,也存在横波简并的传播方向 ( $A_s$  为零的方向).

图 12 展示了几何非线性和物理非线性条件下快(S1)慢(S2)横波的极化矢量及横波极化各向异性特征.三轴初始应力诱导的横波极化各向异性的空间分布介于单、双轴应力情形之间,其极化各向异性特征与双轴应力相似.在传播空间中快慢横波极化矢量均包含准 SV 波与准 SH 波,考虑几何非线性和物理非线性情形下快慢横波对应的横波类型相反.在蓝色与红色箭头的交界处,产生准 SV 波与准 SH 波的类型转换.

无论是考虑物理非线性还是几何非线性,横波的极化各向异性集中分布在靠近最小主应力轴的斜方向上.在主应力平面内传播的快慢横波极化各向异性较小,尤其是沿主应力轴方向为零,此时三类体波是解耦的.但应力主轴方向上快慢横波速度各向异性较强,尤其在最大初应力的主轴方向上.

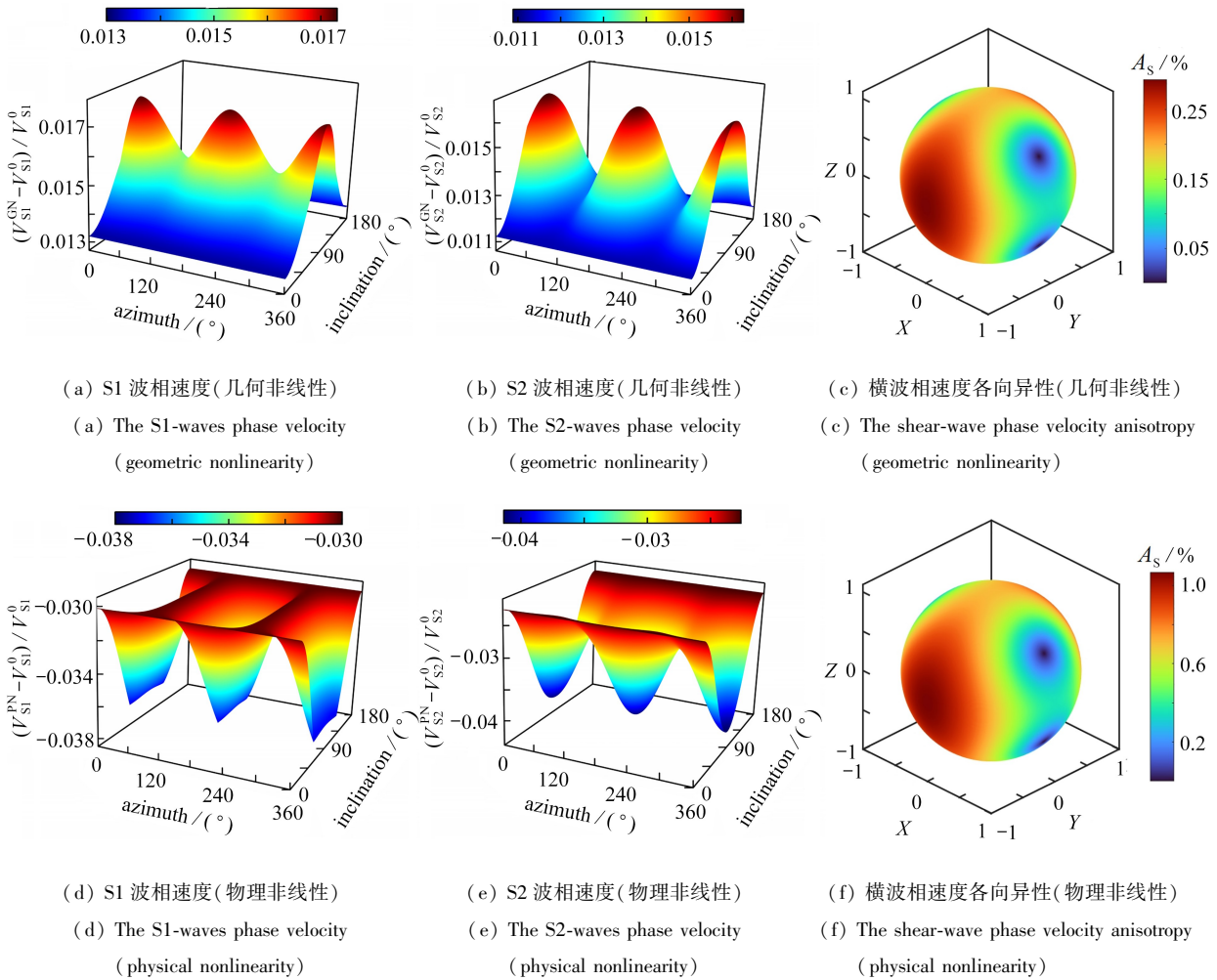
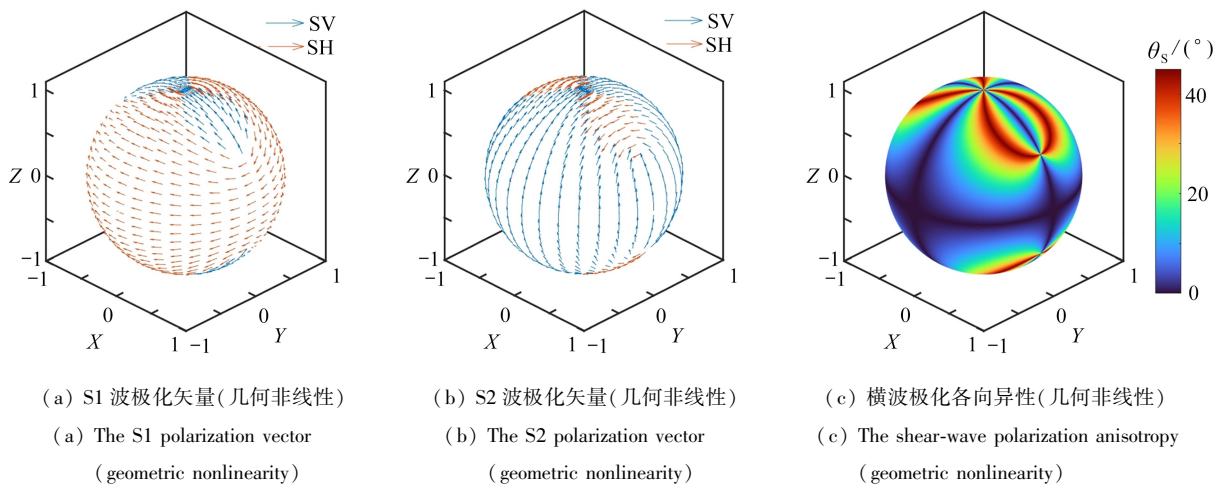


图 11 受三轴初应力介质几何非线性及物理非线性条件下 S1 波和 S2 波相速度和横波相速度各向异性  
Fig. 11 Relative variations of phase velocities of S1-waves and S2-waves as well as the shear-wave phase velocity anisotropy under geometric nonlinearity or physical nonlinearity in triaxially stressed media



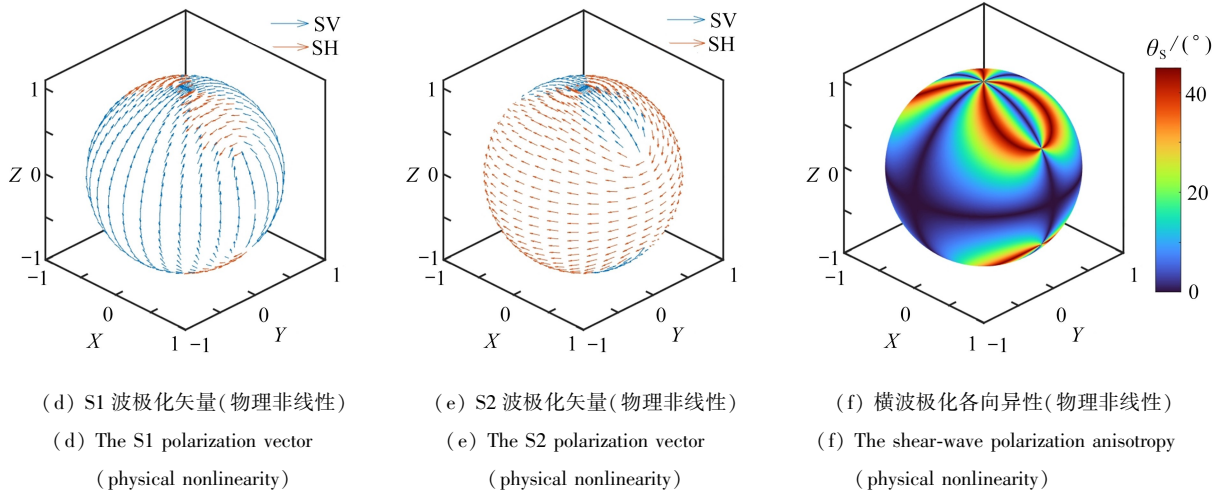


图 12 受三轴初应力介质几何非线性及物理非线性条件下 S1 波和 S2 波极化矢量与横波极化各向异性

Fig. 12 Polarization vectors and polarization anisotropy of S1 and S2 waves under geometric nonlinearity or physical nonlinearity in triaxially stressed media

### 4 结 论

针对初始应力与几何及物理非线性耦合作用下弹性波传播问题,本研究基于声弹性理论,建立了考虑几何和物理非线性效应的预应力介质中平面波的特征方程,并基于摄动理论获得单轴初始应力作用下弹性波相速度的解析近似解.摄动近似结果表明,二阶的摄动近似解与数值精确解高度吻合,验证了摄动方法解析求解弹性波相速度的有效性与可行性,为解析计算受初始应力的介质中弹性波的传播提供了便利.此外,分别研究了单轴、双轴、三轴初始应力介质情形下静态变形的几何非线性和物理非线性对弹性波相速度方位依赖性、极化各向异性、横波速度各向异性特征的影响.结果表明,不同的初始应力状态作用下弹性波传播特性具有显著差异.单轴拉伸应力作用下,横波速度各向异性特征更显著,而双轴及三轴初始应力作用下体波相速度具有明显与方位无关的各向同性分量.初始应力对弹性波传播的影响是几何非线性效应与物理非线性效应竞争的结果.初始变形的几何非线性效应导致拉伸应力方向传播的体波相速度增加,而物理非线性效应则导致拉伸应力方向传播的体波相速度减小.一般地,物理非线性效应使得初始应力产生更显著的体波相速度改变、横波速度及极化各向异性.在金属材料中,横波各向异性程度  $A_s$  可达到 2%~3%.本文研究结果为理解初始应力及几何、物理非线性对弹性波传播的耦合作用机制提供了新见解,也为实现应力的无损检测与测量奠定了理论基础.

### 附录 A 声弹性理论及基本方程推导

声弹性理论以有限静变形上叠加非线性波动为理论框架,建立了弹性波传播特性与固体初始应力状态之间的定量关系.本附录将从变形描述,应力张量的定义,本构方程,运动方程等方面对声弹性的基本方程进行阐述.

#### 1 变形描述

声弹性理论通常涉及三个构形:自然构形  $V_0$ 、中间构形  $\tilde{V}$  与当前构形  $V$ .如图 1 所示,在三个构形中,物质点位置具有如下的映射关系:

$$\xi = \xi(X), \quad x = x(\xi, t); \tag{A1}$$

中间构形物质点的位置与初始应力产生的静态位移  $w(X)$  具有如下联系:

$$\xi(X) = X + w(X). \tag{A2}$$

基于叠加在中间构形的弹性波运动,当前构形中物质点的位置可基于弹性波运动相关的动态位移  $u(X, t)$  建立如下的联系:

$$x(X, t) = u(X, t) + \xi(X). \tag{A3}$$

基于式(A2)与(A3),当前构形相对自然构形的变形梯度张量可表示为

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{w} + \mathbf{I}, \quad (\text{A4})$$

其中,  $\mathbf{I}$  为二阶单位张量.相应地,总的 Green 应变张量可通过变形梯度表示为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}). \quad (\text{A5})$$

假设初始应力产生均匀的静态变形,则初始应力产生的静态位移可以表示为

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{X}, \quad (\text{A6})$$

其中  $\boldsymbol{\alpha}$  是初始变形相关的应变张量.将式(A4)与(A6)代入式(A5),得到静态和动态位移表示的 Green 应变张量:

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] + \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha} \cdot (\nabla \mathbf{u}) + \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u})^T \cdot \boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u})^T \cdot (\nabla \mathbf{u}). \quad (\text{A7})$$

## 2 应力张量的定义

为描述初始应力作用下弹性波的运动,通常具有三种不同方式来定义或测量不同构形中的应力张量. Cauchy 应力张量是最常见的形式. Cauchy 应力张量将当前构形中表面力  $d\mathbf{f}^E$  与变形后的面元  $n dS(t)$  联系起来,其定义如下:

$$d\mathbf{f}^E = n dS(t) \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (\text{A8})$$

变形后  $\mathbf{x}$  处面元上作用的力也可以用变形前  $\mathbf{X}$  处的面元  $N dS_0$  来描述,进而得到第一类 Piola-Kirchhoff 应力  $\mathbf{T}^{PK}$  (简称 PK 应力)的定义:

$$d\mathbf{f}^E = N dS_0 \cdot \mathbf{T}^{PK}. \quad (\text{A9})$$

Cauchy 应力  $\boldsymbol{\sigma}$  是二阶对称张量,而 PK 应力张量是一个两点张量,其将当前构形中的力与变形前的面积相联系,通常不具有对称性.

此外,完全弹性材料的本构关系通常基于第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量  $\mathbf{T}^{SK}$  (简称 SK 应力)来表示. SK 应力张量可通过将当前构形的表面力  $d\mathbf{f}^E$  映射到变形前的构形来定义,

$$d\mathbf{f}^L = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{f}^E = N dS_0 \cdot \mathbf{T}^{SK}, \quad (\text{A10})$$

其中,  $d\mathbf{f}^L$  为  $d\mathbf{f}^E$  在变形前构形中的 Lagrange 描述.可以证明,第二类 Piola-Kirchhoff 应力也是二阶对称张量.基于不同构形间面元的联系,三类不同应力张量具有如下关系:

$$\mathbf{T}^{SK} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}^{PK} = \mathbf{J} \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}, \quad (\text{A11})$$

其中,  $J = \det(\mathbf{F})$ .

## 3 声弹性本构方程

超弹性本构关系的定义通常与第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量  $\mathbf{T}^{SK}$  相关.利用应变能函数,声弹性本构关系定义如下<sup>[18]</sup>:

$$\mathbf{T}^{SK} = \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}. \quad (\text{A12})$$

为准确表征材料在初始应力作用下的非线性力学行为,通常需采用至少三阶的应变能密度函数.对于强非线性材料,可采用更高阶的应变能函数.例如,考虑各向同性的超弹性材料,四阶应变能密度函数可表述<sup>[14,29]</sup>为

$$W(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \lambda (\text{tr} \mathbf{E})^2 + \mu \text{tr}(\mathbf{E}^2) + \frac{1}{3} C (\text{tr} \mathbf{E})^3 + B \text{tr} \mathbf{E} \text{tr}(\mathbf{E}^2) + \frac{A}{3} \text{tr}(\mathbf{E}^3) + D \text{tr} \mathbf{E} \text{tr}(\mathbf{E}^3) + F (\text{tr} \mathbf{E})^2 \text{tr}(\mathbf{E}^2) + G (\text{tr}(\mathbf{E}^2))^2 + H \text{tr}(\mathbf{E})^4, \quad (\text{A13})$$

其中,  $\lambda, \mu$  为二阶弹性常数 (Lamé 常数),  $A, B, C$  为三阶弹性常数,  $D, F, G, H$  为四阶弹性常数.将式(A13)代入式(A12),可得到考虑三阶非线性的声弹性本构关系:

$$\mathbf{T}^{SK} = \lambda (\text{tr} \mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} + C (\text{tr} \mathbf{E})^2 \mathbf{I} + B \text{tr}(\mathbf{E}^2) \mathbf{I} + 2B (\text{tr} \mathbf{E}) \mathbf{E} + A \mathbf{E}^2 + D \text{tr}(\mathbf{E}^3) \mathbf{I} + 3D (\text{tr} \mathbf{E}) \mathbf{E}^2 + 2F (\text{tr} \mathbf{E}) \text{tr}(\mathbf{E}^2) \mathbf{I} + 2F (\text{tr} \mathbf{E})^2 \mathbf{E} + 4G \text{tr}(\mathbf{E}^2) \mathbf{E} + 4H \text{tr}(\mathbf{E})^3 \mathbf{I}. \quad (\text{A14})$$

## 4 运动方程

受初始应力介质中弹性波的运动方程通常基于 PK 应力来描述,忽略体力项:

$$\nabla \cdot \mathbf{T}^{PK} = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}), \quad (\text{A15})$$

$\rho_0$  表示自然构形下的密度,变量上方的两点表示对时间的二阶导数.当然,利用不同应力张量间的关系式(A11),运动方程(A15)也可用 SK 应力或 Cauchy 应力张量来表示.为与声弹性本构关系相关的 SK 应力联系起来,运动方程可以方便地重新表示为

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^{\text{sk}}) = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}). \quad (\text{A16})$$

### 附录 B1 单轴初始应力作用下考虑几何非线性时体波摄动近似解相关系数

考虑单轴的初始应力与初始变形的几何非线性效应耦合作用时,体波相速度的一阶及二阶摄动近似项分别可以表示为如下形式:

$$\begin{aligned} g_{\text{pp}} &= L_{\text{pp}}^{(0)} + L_{\text{pp}}^{(1)} \cos(2\phi) + (L_{\text{pp}}^{(2)} + L_{\text{pp}}^{(3)} \cos(2\phi)) \cos(2\theta) + \\ &\quad (L_{\text{pp}}^{(4)} + L_{\text{pp}}^{(5)} \cos(2\phi)) \cos(4\theta) + L_{\text{pp}}^{(6)} (3 - 4\cos(2\theta) + \cos(4\theta)) \cos(4\phi), \\ g_{\text{sip}} &= (L_{\text{sip}}^{(1)} + L_{\text{sip}}^{(2)} \cos(2\phi)) \sin(2\theta) + (L_{\text{sip}}^{(3)} + L_{\text{sip}}^{(4)} \cos(2\phi)) \sin(4\theta) + L_{\text{sip}}^{(5)} (-2\sin(2\theta) + \sin(4\theta)) \cos(4\phi), \\ g_{\text{s2p}} &= [L_{\text{s2p}}^{(1)} \sin(2\phi) + L_{\text{s2p}}^{(2)} \cos(2\theta) \sin(2\phi) + L_{\text{s2p}}^{(3)} (1 - \cos(2\theta)) \sin(4\phi)] \sin \theta, \\ g_{11}^{(1)} &= L_{11}^{(0)} + L_{11}^{(1)} \cos(2\theta) + (L_{11}^{(2)} + L_{11}^{(3)} \cos(2\theta) + L_{11}^{(6)} \cos(4\theta)) \cos(2\phi) + \\ &\quad L_{11}^{(4)} \cos(4\theta) + (L_{11}^{(5)} + L_{11}^{(7)} \cos(4\theta)) \cos(4\phi), \\ g_{22}^{(1)} &= L_{22}^{(0)} + L_{22}^{(1)} \cos(2\theta) + (L_{22}^{(2)} + L_{22}^{(3)} \cos(2\theta)) \cos(2\phi) + (L_{22}^{(4)} + L_{22}^{(5)} \cos(2\theta)) \cos(4\phi), \\ g_{12}^{(1)} &= [(L_{12}^{(1)} + L_{12}^{(2)} \cos(2\theta)) \sin(2\phi) + (L_{12}^{(3)} + L_{12}^{(4)} \cos(2\theta)) \sin(4\phi)] \cos \theta. \end{aligned}$$

定义

$$\beta_1 = (1 + \alpha_0)^2 + (1 - \nu\alpha_0)^2, \beta_2 = (1 + \alpha_0)^2 - (1 - \nu\alpha_0)^2, \alpha^{\text{iso}} = \frac{(1 - 2\nu)\alpha_0}{3},$$

则体波摄动近似解的系数  $L_{\text{pp}}^{(i)}, L_{\text{sip}}^{(i)}, L_{\text{s2p}}^{(i)}, L_{11}^{(i)}, L_{22}^{(i)}, L_{12}^{(i)}$  的具体表达式如下:

$$\begin{aligned} L_{\text{pp}}^{(0)} &= \frac{1}{64}(\lambda + 2\mu)(16\beta_1^2 - 16\beta_1\beta_2 + 13\beta_2^2) + \frac{1}{8}(3\lambda + 2\mu)\beta_1^2 - \frac{1}{16}(5\lambda + 4\mu)\beta_1\beta_2 + \frac{1}{8}\mu\beta_2^2 - \\ &\quad \left(\frac{5}{2}\lambda + 3\mu\right)(\alpha^{\text{iso}} + 1)^4 + \left(\mu + \frac{3}{2}\lambda\right)(\alpha^{\text{iso}} + 1)^2 - \frac{1}{8}(3\lambda + 2\mu)(2\beta_1 - \beta_2), \\ L_{\text{pp}}^{(1)} &= \frac{1}{16}(\lambda + 2\mu)(6\beta_1\beta_2 - \beta_2^2) + \frac{1}{16}\lambda(\beta_1\beta_2 - \beta_2^2) - \frac{1}{8}(3\lambda + 2\mu)\beta_2, \\ L_{\text{pp}}^{(2)} &= -\frac{1}{16}(\lambda + 2\mu)(6\beta_1\beta_2 - \beta_2^2) - \frac{1}{16}\lambda(\beta_1\beta_2 - \beta_2^2) + \frac{1}{8}(3\lambda + 2\mu)\beta_2, \\ L_{\text{pp}}^{(3)} &= -\frac{3}{8}(\lambda + 2\mu)\beta_1\beta_2 - \frac{1}{16}\lambda(\beta_1\beta_2 - \beta_2^2) + \frac{1}{8}(3\lambda + 2\mu)\beta_2, \\ L_{\text{pp}}^{(4)} &= \frac{3}{64}(\lambda + 2\mu)\beta_2^2, L_{\text{pp}}^{(5)} = \frac{1}{16}(\lambda + 2\mu)\beta_2^2, L_{\text{pp}}^{(6)} = \frac{1}{64}(\lambda + 2\mu)\beta_2^2, \\ L_{\text{sip}}^{(1)} &= -\frac{1}{32}(\lambda + 2\mu)(4\beta_1\beta_2 - \beta_2^2), L_{\text{sip}}^{(2)} = -\frac{1}{8}(\lambda + 2\mu)\beta_1\beta_2, \\ L_{\text{sip}}^{(3)} &= \frac{3}{64}(\lambda + 2\mu)\beta_2^2, L_{\text{sip}}^{(4)} = \frac{1}{16}(\lambda + 2\mu)\beta_2^2, L_{\text{sip}}^{(5)} = \frac{1}{64}(\lambda + 2\mu)\beta_2^2, \\ L_{\text{s2p}}^{(1)} &= \frac{1}{8}(\lambda + 2\mu)(2\beta_1\beta_2 - \beta_2^2), L_{\text{s2p}}^{(2)} = -\frac{1}{8}(\lambda + 2\mu)\beta_2^2, L_{\text{s2p}}^{(3)} = \frac{1}{16}(\lambda + 2\mu)\beta_2^2, \\ L_{11}^{(0)} &= \frac{1}{64}(\lambda + 2\mu)(16\beta_1^2 - 16\beta_1\beta_2 + 11\beta_2^2) + \frac{1}{16}\lambda(2\beta_1^2 - \beta_1\beta_2 - \beta_2^2) - \frac{1}{8}(3\lambda + 2\mu)(2\beta_1 - \beta_2) + \\ &\quad \left[\left(-\frac{3}{2}\lambda - 2\mu\right)(\alpha^{\text{iso}} + 1)^2 + \frac{3}{2}\lambda + \mu\right](\alpha^{\text{iso}} + 1)^2, \\ L_{11}^{(1)} &= L_{11}^{(3)} = -\frac{1}{8}(\lambda + 2\mu)\beta_1\beta_2 - \frac{1}{16}\lambda(\beta_1\beta_2 - \beta_2^2) + \frac{1}{8}(3\lambda + 2\mu)\beta_2, \\ L_{11}^{(2)} &= \frac{1}{16}(\lambda + 2\mu)(4\beta_1\beta_2 - \beta_2^2) - \frac{1}{16}\lambda(\beta_1\beta_2 - \beta_2^2) - \frac{1}{8}(3\lambda + 2\mu)\beta_2, L_{11}^{(4)} = -\frac{3}{64}(\lambda + 2\mu)\beta_2^2, \\ L_{11}^{(5)} &= \frac{1}{64}(\lambda + 2\mu)\beta_2^2, L_{11}^{(6)} = -\frac{1}{16}(\lambda + 2\mu)\beta_2^2, L_{11}^{(7)} = -\frac{1}{64}(\lambda + 2\mu)\beta_2^2, \\ L_{22}^{(0)} &= \frac{1}{8}(\lambda + 2\mu)(2\beta_1^2 - \beta_1\beta_2 + \beta_2^2) - \frac{1}{16}(3\lambda + 2\mu)\beta_1\beta_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} \lambda \beta_1^2 - \frac{1}{8} (3\lambda + 2\mu) (2\beta_1 - \beta_2) + \left[ \left( -\frac{3}{2} \lambda - 2\mu \right) (\alpha^{\text{iso}} + 1)^2 + \mu + \frac{3}{2} \lambda \right] (\alpha^{\text{iso}} + 1)^2, \\ L_{22}^{(1)} &= -\frac{3}{16} (\lambda + 2\mu) \beta_1 \beta_2 + \frac{1}{8} (3\lambda + 2\mu) \beta_2, \\ L_{22}^{(2)} &= \frac{1}{16} (3\lambda + 2\mu) \beta_1 \beta_2 + \frac{1}{16} (\lambda + 2\mu) \beta_2^2 - \frac{1}{8} \lambda \beta_2^2 - \frac{1}{8} (3\lambda + 2\mu) \beta_2, \quad L_{22}^{(4)} = -\frac{1}{16} (\lambda + 2\mu) \beta_2^2, \\ L_{22}^{(3)} &= -\frac{1}{16} (\lambda + 2\mu) (3\beta_1 \beta_2 - \beta_2^2) + \frac{1}{8} (3\lambda + 2\mu) \beta_2, \quad L_{22}^{(5)} = \frac{1}{16} (\lambda + 2\mu) \beta_2^2, \\ L_{12}^{(1)} &= -\frac{1}{8} (\lambda + 2\mu) \beta_1 \beta_2 + \frac{1}{8} \lambda (\beta_1 \beta_2 - \beta_2^2), \\ L_{12}^{(2)} &= \frac{1}{8} (\lambda + 2\mu) \beta_2^2, \quad L_{12}^{(3)} = -\frac{1}{16} (\lambda + 2\mu) \beta_2^2, \quad L_{12}^{(4)} = \frac{1}{16} (\lambda + 2\mu) \beta_2^2. \end{aligned}$$

### 附录 B2 单轴初始应力作用下考虑物理非线性时体波摄动近似解相关系数

考虑单轴的初始应力与物理非线性耦合作用时,体波相速度的一阶及二阶摄动近似项分别可以表示为如下形式:

$$\begin{aligned} g_{\text{PP}} &= L_{\text{PP}}^{(0)} + L_{\text{PP}}^{(1)} \cos(2\phi) + (L_{\text{PP}}^{(2)} + L_{\text{PP}}^{(3)} \cos(2\phi)) \cos(2\theta) + (L_{\text{PP}}^{(4)} + L_{\text{PP}}^{(5)} \cos(2\phi)) \cos(4\theta) + \\ & \quad L_{\text{PP}}^{(6)} (3 - 4\cos(2\theta) + \cos(4\theta)) \cos(4\phi), \\ g_{\text{SIP}} &= (L_{\text{SIP}}^{(1)} + L_{\text{SIP}}^{(2)} \cos(2\phi)) \sin(2\theta) + (L_{\text{SIP}}^{(3)} + L_{\text{SIP}}^{(4)} \cos(2\phi)) \sin(4\theta) + L_{\text{SIP}}^{(5)} (-2\sin(2\theta) + \sin(4\theta)) \cos(4\phi), \\ g_{\text{S2P}} &= (L_{\text{S2P}}^{(1)} + L_{\text{S2P}}^{(2)} \cos(2\theta)) \sin(2\phi) \sin \theta + L_{\text{S2P}}^{(3)} (1 - \cos(2\theta)) \sin(4\phi) \sin \theta, \\ g_{11}^{(1)} &= L_{11}^{(0)} + L_{11}^{(1)} \cos(2\theta) + (L_{11}^{(2)} + L_{11}^{(3)} \cos(2\theta) + L_{11}^{(6)} \cos(4\theta)) \cos(2\phi) + \\ & \quad L_{11}^{(4)} \cos(4\theta) + (L_{11}^{(5)} + L_{11}^{(7)} \cos(4\theta)) \cos(4\phi), \\ g_{22}^{(1)} &= L_{22}^{(0)} + L_{22}^{(1)} \cos(2\theta) + (L_{22}^{(2)} + L_{22}^{(3)} \cos(2\theta)) \cos(2\phi) + (L_{22}^{(4)} + L_{22}^{(5)} \cos(2\theta)) \cos(4\phi), \\ g_{12}^{(1)} &= [(L_{12}^{(1)} + L_{12}^{(2)} \cos(2\theta)) \sin(2\phi) + (L_{12}^{(3)} + L_{12}^{(4)} \cos(2\theta)) \sin(4\phi)] \cos \theta. \end{aligned}$$

定义

$$\gamma_1 = \alpha_1 - \alpha_2 = (1 + \nu) \alpha_0, \quad \gamma_2 = \alpha_1 + \alpha_2 = (1 - \nu) \alpha_0, \quad \alpha^{\text{iso}} = \frac{(1 - 2\nu) \alpha_0}{3},$$

则体波摄动近似解的系数  $L_{\text{PP}}^{(i)}, L_{\text{SIP}}^{(i)}, L_{\text{S2P}}^{(i)}, L_{11}^{(i)}, L_{22}^{(i)}, L_{12}^{(i)}$  的具体表达式如下:

$$\begin{aligned} L_{\text{PP}}^{(0)} &= \frac{1}{2} [A + 2B + 3(3D + 4F) \alpha^{\text{iso}}] (-\gamma_1 + 2\gamma_2) + G \left( \frac{17}{8} \gamma_1^2 - 2\gamma_1 \gamma_2 + 3\gamma_2^2 \right) + \frac{1}{2} F (3\gamma_1^2 - 2\gamma_1 \gamma_2 + 3\gamma_2^2) + \\ & \quad (3D/2 + 2G) (\gamma_1^2 - \gamma_1 \gamma_2 + \gamma_2^2) - [2A + 4B + \alpha^{\text{iso}} (24D + 30F + 20G)] \alpha^{\text{iso}}, \\ L_{\text{PP}}^{(1)} &= (3D/2 + 2G) \gamma_1 \gamma_2 - \frac{1}{2} G \gamma_1^2 + [A + 2B + 3(3D + 4F) \alpha^{\text{iso}}] \gamma_1 / 2, \quad L_{\text{PP}}^{(4)} = \frac{3}{8} G \gamma_1^2, \\ L_{\text{PP}}^{(2)} &= - (3D/2 + 2G) \gamma_1 \gamma_2 - [A + 2B + 3(3D + 4F) \alpha^{\text{iso}}] \gamma_1 / 2 + \frac{1}{2} G \gamma_1^2, \\ L_{\text{PP}}^{(3)} &= - (3D/2 + 2G) \gamma_1 \gamma_2 - [A + 2B + 3(3D + 4F) \alpha^{\text{iso}}] \gamma_1 / 2, \quad L_{\text{PP}}^{(5)} = \frac{1}{2} G \gamma_1^2, \quad L_{\text{PP}}^{(6)} = \frac{1}{8} G \gamma_1^2, \\ L_{\text{SIP}}^{(1)} &= - (3D/2 + 2G) \gamma_1 \gamma_2 / 2 - [A + 2B + 3(3D + 4F) \alpha^{\text{iso}}] \gamma_1 / 4 + \frac{1}{4} G \gamma_1^2, \quad L_{\text{SIP}}^{(3)} = \frac{3}{8} G \gamma_1^2, \\ L_{\text{SIP}}^{(2)} &= - (3D/2 + 2G) \gamma_1 \gamma_2 / 2 - [A + 2B + 3(3D + 4F) \alpha^{\text{iso}}] \gamma_1 / 4, \quad L_{\text{SIP}}^{(4)} = \frac{1}{2} G \gamma_1^2, \quad L_{\text{SIP}}^{(5)} = \frac{1}{8} G \gamma_1^2, \\ L_{\text{S2P}}^{(1)} &= (3D/2 + 2G) \gamma_1 \gamma_2 - G \gamma_1^2 + [A + 2B + 3(3D + 4F) \alpha^{\text{iso}}] \gamma_1 / 2, \quad L_{\text{S2P}}^{(2)} = - G \gamma_1^2, \quad L_{\text{S2P}}^{(3)} = \frac{1}{2} G \gamma_1^2, \\ L_{11}^{(0)} &= G \left( \frac{15}{8} \gamma_1^2 - \gamma_1 \gamma_2 + \frac{3}{2} \gamma_2^2 \right) + (A + 9D \alpha^{\text{iso}}) (-\gamma_1 + 2\gamma_2) / 4 - [A + (9D + 6G) \alpha^{\text{iso}}] \alpha^{\text{iso}}, \\ L_{11}^{(1)} &= L_{11}^{(3)} = 0, \quad L_{11}^{(2)} = \frac{1}{2} G \gamma_1^2 + (A + 9D \alpha^{\text{iso}}) \gamma_1 / 4, \\ L_{11}^{(4)} &= -\frac{3}{8} G \gamma_1^2, \quad L_{11}^{(5)} = \frac{1}{8} G \gamma_1^2, \quad L_{11}^{(6)} = -\frac{1}{2} G \gamma_1^2, \quad L_{11}^{(7)} = -\frac{1}{8} G \gamma_1^2, \end{aligned}$$

$$L_{22}^{(0)} = (A + 9D\alpha^{\text{iso}})(-\gamma_1 + 4\gamma_2)/8 + G\left(2\gamma_1^2 - \gamma_1\gamma_2 + \frac{3}{2}\gamma_2^2\right) - [A + (9D + 6G)\alpha^{\text{iso}}]\alpha^{\text{iso}}, L_{22}^{(4)} = -\frac{1}{2}G\gamma_1^2,$$

$$L_{22}^{(1)} = -(A + 9D\alpha^{\text{iso}})\gamma_1/8 + \frac{1}{2}G\gamma_1^2, L_{22}^{(2)} = L_{22}^{(3)} = -(A + 9D\alpha^{\text{iso}})\gamma_1/8, L_{22}^{(5)} = \frac{1}{2}G\gamma_1^2,$$

$$L_{12}^{(1)} = -(A + 9D\alpha^{\text{iso}})\gamma_1/4 - G\gamma_1^2, L_{12}^{(2)} = G\gamma_1^2, L_{12}^{(3)} = -\frac{1}{2}G\gamma_1^2, L_{12}^{(4)} = \frac{1}{2}G\gamma_1^2.$$

## 参考文献(References):

- [1] PAU A, VESTRONI F. The role of material and geometric nonlinearities in acoustoelasticity[J]. *Wave Motion*, 2019, **86**: 79-90.
- [2] CAI J, DENG M. Mathematical framework of nonlinear elastic waves propagating in pre-stressed media[J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2024, **45**(10): 1705-1716.
- [3] ZHAO H, DEBROY T. Weld metal composition change during conduction mode laser welding of aluminum alloy 5182[J]. *Metallurgical and Materials Transactions B*, 2001, **32**(1): 163-172.
- [4] 蔡美峰. 地应力测量原理和技术[M]. 北京: 科学出版社, 1995. (CAI Meifeng. *Principle and Technology of In-Situ Stress Measurement*[M]. Beijing: Science Press, 1995. (in Chinese))
- [5] MURNAGHAN F D. Finite deformations of an elastic solid[J]. *American Journal of Mathematics*, 1937, **59**(2): 235-260.
- [6] BIOT M A. The influence of initial stress on elastic waves[J]. *Journal of Applied Physics*, 1940, **11**(8): 522-530.
- [7] TOUPIN R A, BERNSTEIN B. Sound waves in deformed perfectly elastic materials. acoustoelastic effect[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1961, **33**(2): 216-225.
- [8] THURSTON R N, BRUGGER K. Third-order elastic constants and the velocity of small amplitude elastic waves in homogeneously stressed media[J]. *Physical Review*, 1964, **133**: A1604-A1610.
- [9] TOKUOKA T, SAITO M. Elastic wave propagations and acoustical birefringence in stressed crystals[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1969, **45**(5): 1241-1246.
- [10] THURSTON R N. Effective elastic coefficients for wave propagation in crystals under stress[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1965, **37**(2): 348-356.
- [11] KUBE C M, NORRIS A N. Stress formulation of acoustoelasticity[J]. *Wave Motion*, 2022, **114**: 103002.
- [12] WINKLER K W, LIU X. Measurements of third-order elastic constants in rocks[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1996, **100**(3): 1392-1398.
- [13] LUBARDA V A. New estimates of the third-order elastic constants for isotropic aggregates of cubic crystals [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1997, **45**(4): 471-490.
- [14] ABIZA Z, DESTRADE M, OGDEN R W. Large acoustoelastic effect[J]. *Wave Motion*, 2012, **49**(2): 364-374.
- [15] WU T T, HIRAO M, PAO Y H. Acoustoelastic birefringences in plastically deformed solids, part II: experiment[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1991, **58**(1): 18-23.
- [16] 刘镇清, 华剑南, 梁穗, 等. 螺栓材料应力与声速、温度关系的测定[J]. 应用声学, 1997, **16**(5): 26-31. (LIU Zhenqing, HUA Jiannan, LIANG Sui, et al. Determination of ultrasonic wave velocity-stress-temperature relations in bolt materials inspection[J]. *Journal of Applied Acoustics*, 1997, **16**(5): 26-31. (in Chinese))
- [17] MUKHERJEE S, DESTRADE M, GOWER A L. Representing the stress and strain energy of elastic solids with initial stress and transverse texture anisotropy[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2022, **478**(2266): 20220255.
- [18] PAO Y H, GAMER U. Acoustoelastic waves in orthotropic media[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1985, **77**(3): 806-812.
- [19] ZUO P, YU X, FAN Z. Acoustoelastic guided waves in waveguides with arbitrary prestress[J]. *Journal of*

- Sound and Vibration*, 2020, **469**: 115113.
- [20] LIU Z, LIN B, LIANG X, et al. Investigation of acoustoelastic surface acoustic waves in prestressed media [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2024, **571**: 118034.
- [21] ZHENG H, FU L Y, YANG H, et al. Padé acoustoporoelasticity for 3-D wave propagation in prestressed porous rocks with inelastic deformations[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2024, **62**: 4503813.
- [22] TRAYLOR T K, BURNLEY P C, WHITAKER M L. Initial acoustoelastic measurements in olivine: investigating the effect of stress on P- and S-wave velocities[J]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 2021, **126** (11): 1145-1149.
- [23] MAN C S, PARONI R. On the separation of stress-induced and texture-induced birefringence in acoustoelasticity[J]. *Journal of Elasticity*, 1996, **45**(2): 91-116.
- [24] KHIDAS Y, JIA X. Anisotropic nonlinear elasticity in a spherical-bead pack: influence of the fabric anisotropy [J]. *Physical Review E*, 2010, **81**(2): 021303.
- [25] TANG T, LI J, CHEN J, et al. Investigating acoustoelasticity of plane elastic waves and second harmonics within isotropic solid media: a novel approach[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2024, **574**: 118258.
- [26] ZUO W, AN Z, ZHANG B, et al. Solution of nonlinear Lamb waves in plates with discontinuous thickness[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2024, **155**(3): 2171-2180.
- [27] QU J. Acoustic nonlinearity parameters in hyperelastic solids with quadratic nonlinearity[J]. *Ultrasonics*, 2025, **151**: 107621.
- [28] JONES S M. Velocities and quality factors of sedimentary rocks at low and high effective pressures[J]. *Geophysical Journal International*, 1995, **123**(3): 774-780.
- [29] OSIKA M, ZIAJA-SUJDAK A, RADECKI R, et al. Nonlinear modes in shear horizontal wave propagation: analytical and numerical analysis[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2022, **540**: 117247.
- [30] FU Y B, OGDEN R W. *Nonlinear Elasticity: Theory and Applications*[M]. *London Mathematical Society Lecture Note Series*, Vol **283**. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [31] SARKAR D, BAKULIN A, KRANZ R L. Anisotropic inversion of seismic data for stressed media: theory and a physical modeling study on Berea Sandstone[J]. *Geophysics*, 2003, **68**(2): 690-704.
- [32] 李文强. 应力诱导各向异性介质中震源及地震波传播的理论研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2023. (LI Wen-qiang. Theoretical study on sources and propagation of seismic waves in stress-induced anisotropic media [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2023. (in Chinese))
- [33] KATO T. *Perturbation Theory for Linear Operators*[M]. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1995.