

Stokes 流动中的 Phragmén-Lindelöf 型及其连续相关性的结果*

J·C·宋

(汉阳大学 应用数学系, 安山 京畿道 426-791, 韩国)

(郭兴明推荐)

摘要: 就三维半无限柱体上的 Stokes 流动, 研究边端效应的渐近性质. 柱体水平面上的速度满足均匀的 Dirichlet 条件时, 发现问题的解, 随柱体有限端的距离, 或呈指数增长, 或呈指数衰减. 最后讨论了方程参数的摄动影响.

关键词: Phragmén-Lindelöf; 连续相关性; 衰减范围; Stokes 流动

中图分类号: O357.1 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.07.008

引 言

Ansorge 的文献[1]中, 在一个三维半无限柱体上, 柱体侧面有均匀的边界条件作用时, 定义并讨论了带模拟时间的 Stokes 流动, 本文考虑该问题的渐近性质. 设 R 为半无限柱体管道的内部, 生成的任一光滑横截面均平行于 x_3 轴. 管道的端面(入口)在 $x_3 = 0$ 处, 用 D_0 表示, 并包括 R 的部分边界 ∂R . 令

$$R_z = \{ (x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in D, x_3 > z \geq 0 \}$$

表示 $x_3 > z$ 时 R 的子区域, 令

$$D_z = \{ (x_1, x_2) \in D, x_3 = z \}$$

表示平面 $x_3 = z \geq 0$ 中 ∂R_z 的部分.

采用 Ansorge 在文献[1]118 的无量纲速度场 $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ ($i = 1, 2, 3$) 和无量纲压力 $p(x_1, x_2, x_3, t)$, 将其归结为如下形式的初始-边界值问题:

$$u_{i,t} = -p_{,i} + \Delta u_i + \alpha u_{j,ji}, \quad \text{在 } R \times \{t > 0\} \text{ 中,} \quad (1)$$

$$p_{,t} = -\beta^2 u_{i,i}, \quad \text{在 } R \times \{t > 0\} \text{ 中,} \quad (2)$$

$$u_i = 0, \quad \text{在 } R \times \{t = 0\} \text{ 中,} \quad (3)$$

$$p = 0, \quad \text{在 } R \times \{t = 0\} \text{ 中,} \quad (4)$$

$$u_i = 0, \quad \text{在 } \partial D \times \{t \geq 0\} \text{ 上,} \quad (5)$$

$$u_i = f_i(x_1, x_2, t), \quad \text{在 } D_0 \times \{t > 0\} \text{ 上,} \quad (6)$$

* 收稿日期: 2009-10-12; 修订日期: 2010-04-01

作者简介: J. C. Song (E-mail: jcsong@hanyang.ac.kr).

本文原文为英文, 黄雅意译, 张禄坤校.

其中 $\alpha (> 0)$ 和 β^2 为常数. 符号 Δ 为 Laplace 算子, 下角的逗号“,”表示对相应坐标的偏导数. 此外, 我们采用了求和约定: 重复的拉丁字母下角表示从 1 ~ 3 求和; 重复的希腊字母下角表示从 1 ~ 2 求和. 我们假定, 规定的矢量函数 f_i 是可微的, 且在 ∂D 上趋于 0.

我们看到, 方程(1) ~ (6) 解 (u_i, p) 的 L_2 积分, 必定随柱体有限端的距离增长或衰减. 关于 Phragmén-Lindelöf 型结果, 已有很多相关文献涉及 (如 Lin 和 Payne^[2-4], Flavin 等^[5], Horgan 和 Payne^[6], Payne 和 Song^[7] 的研究). 这些结果与 Saint-Venant 原理 (Horgan^[8-9], Horgan 和 Knowles^[10] 作了深入的研究) 密切相关, 同时在文献 [11-13] 中也涉及半无限通道中 Stokes 流动的相关结果.

本文的概要如下: 第 1 节, 导出能量不等式, 并由此导出, L_2 积分或呈 z 指数增长, 或呈 z 指数衰减; 第 2 节, 导出总能量数据的范围; 第 3 节, 改进了 Payne 和 Song^[7] 所作的分析, 导出总能量与参数 α 的显式连续相关性. 特别在确定数据范围时, 我们宁愿利用积分-微分不等式, 而不愿采用文献 [7] 中的微分不等式 (5.23).

1 Phragmén-Lindelöf 型二者取一的选择

本节将指出方程(1) ~ (6) 的解, 要么呈指数增长, 要么呈指数衰减. 为此, 按 Horgan 和 Payne^[2,6-7] 研究, 引入横截面能量函数 $F(z, t)$:

$$F(z, t) = - \int_0^t \int_{D_z} (u_i u_{i,3} + \alpha u_3 u_{j,j} - u_3 p) dA d\eta, \quad (7)$$

其中 dA 为横截面面积元. 由散度定理、方程(1)、(2) 和(5), 可将 $F(z, t)$ 表达为

$$F(z, t) = F(0, t) - \int_0^t \int_{R/R_z} (u_{i,j} u_{i,j} + \alpha u_{i,i}^2) dx d\eta - \frac{1}{2} \int_{R/R_z} (u_i u_i + \beta^{-2} p^2) dx, \quad (8)$$

其中 dx 为体积元, 等号右边最后的积分, 是时间 t 可估的. 注意到, 当

$$\frac{\partial F}{\partial z} = - \int_0^t \int_{D_z} (u_{i,j} u_{i,j} + \alpha u_{i,i}^2) dA d\eta - \frac{1}{2} \int_{D_z} (u_i u_i + \beta^{-2} p^2) dA \quad (9)$$

为非正时, $F(z, t)$ 是不定的.

后续部分将用到以下的 Poincaré 不等式. 设 $\psi(x_1, x_2)$ 在 D 中可微, 并在 ∂D 上趋于 0. 那么,

$$\lambda \int_D \psi^2 dA \leq \int_D \psi_{,\alpha} \psi_{,\alpha} dA, \quad (10)$$

其中 λ 为

$$\begin{cases} \phi_{,\alpha\alpha} + \hat{\lambda} \phi = 0, & \text{在 } D \text{ 中,} \\ \phi = 0, & \text{在 } \partial D \text{ 上} \end{cases}$$

的最小特征值.

首先要导出 $F(z, t)$ 的微分不等式, 意味着随 $z \rightarrow \infty$, $F(z, t)$ 或呈 z 指数增长, 或呈 z 指数衰减. 先记

$$F(z, t) = I_1(z, t) + I_2(z, t), \quad (11)$$

其中

$$I_1(z, t) = - \int_0^t \int_{D_z} (u_i u_{i,3} + \alpha u_3 u_{j,j}) dA d\eta, \quad I_2(z, t) = \int_0^t \int_{D_z} u_3 p dA d\eta.$$

由 Schwarz 不等式、算术-几何平均不等式和不等式(10), 有

$$|I_1| \leq \int_0^t \int_{D_z} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}(1 + \alpha)u_{i,j}u_{i,j} + \frac{\alpha}{2\sqrt{\lambda}}u_{j,j}^2 \right\} dAd\eta \leq -\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}(1 + \alpha) \frac{\partial F}{\partial z}. \quad (12)$$

对 I_2 , 由 Schwarz 不等式, 有

$$|I_2| \leq \left(\int_0^t \int_{D_z} u_3^2 dAd\eta \int_0^t \int_{D_z} p^2 dAd\eta \right)^{1/2}. \quad (13)$$

由于 p 在 $t = 0$ 时趋于 0, 可得

$$\int_0^t p^2 d\eta \leq \frac{4t^2}{\pi^2} \int_0^t p_{,\eta}^2 d\eta = \frac{4t^2\beta^4}{\pi^2} \int_0^t u_{j,j}^2 d\eta. \quad (14)$$

利用该不等式、算术-几何平均不等式和不等式 (10), 有

$$|I_2| \leq -\frac{t\beta^2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\alpha\lambda}} \frac{\partial F}{\partial z}. \quad (15)$$

将式 (12) 和 (15) 代入式 (11), 得到不等式

$$|F(z, t)| \leq -\frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left(1 + \alpha + \frac{2t\beta^2}{\pi\sqrt{\alpha}} \right) \frac{\partial F}{\partial z}. \quad (16)$$

根据 Flavin 等^[2], Horgan 和 Payne^[6]所采用的步骤, 对该不等式进行处理. 将式 (16) 写成以下 2 个不等式:

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \gamma(t)F \leq 0 \quad (17)$$

和

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \gamma(t)F \leq 0, \quad (18)$$

其中

$$\gamma(t) = \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left(1 + \alpha + \frac{2t\beta^2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) \right\}^{-1}. \quad (19)$$

注意到, 如果对固定的 t 值或某一 z 值, 如 $z = z_1$, F 总是负的, 那么对这个 t 值, 由于 $\partial F/\partial z$ 为非正的, 对于所有的 $z \geq z_1$, F 必定保持负值. 于是, 由式 (18), 有

$$-F(z, t) \geq -F(z_1, t)e^{\gamma(t)(z-z_1)}. \quad (20)$$

这样, $-F(z, t)$ 必定呈指数增长, 或者, 对于所有的 z 和 t , $F(z, t) \geq 0$. 现在, 如果对于所有的 z 和 t , $F(z, t) \geq 0$, 那么由式 (17), 有

$$F(z, t) \leq F(0, t)e^{-\gamma(t)z}. \quad (21)$$

显然, 如果 $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z, t) = 0$, 那么由式 (8), 有

$$F(z, t) := E(z, t) = \int_0^t \int_{R_z} (u_{i,j}u_{i,j} + \alpha u_{i,i}^2) dx d\eta + \frac{1}{2} \int_{R_z} (u_i u_i + \beta^{-2} p^2) dx. \quad (22)$$

从而我们可以建立以下的定理.

定理 令 (u_i, p) 为式 (1) ~ (6) 在 R 中的一个解, 则对于固定的 t 值, 有下列两种可能:

$$1) \lim_{z \rightarrow \infty} \left[e^{-\gamma(t)z} \left\{ \int_0^t \int_{R/R_z} (u_{i,j}u_{i,j} + \alpha u_{i,i}^2) dx d\eta \right\} + \frac{1}{2} \int_{R/R_z} (u_i u_i + \beta^{-2} p^2) dx \right] \geq M(t), \quad (23)$$

其中 $M(t)$ 为 t 的正函数; 或

$$2) \int_0^t \int_{R_z} (u_{i,j}u_{i,j} + \alpha u_{i,i}^2) dx d\eta + \frac{1}{2} \int_{R_z} (u_i u_i + \beta^{-2} p^2) dx \leq E(0, t)e^{-\gamma(t)z}, \quad (24)$$

其中 $\gamma(t)$ 由式 (19) 给出.

显然,对于任一有限能量解,不等式(23)不成立,从而不等式(24)成立.式(24)将在有限能量弱得多的假设下成立.实际上,如果

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \left[\left\{ \int_0^t \int_{D_z} (u_{i,j} u_{i,j} + \alpha u_{i,i}^2) dA d\eta + \frac{1}{2} \int_{D_z} (u_i u_i + \beta^{-2} p^2) dA \right\} e^{-\gamma(t)z} \right] = 0, \quad (25)$$

应用 L' Hopital 法则,因为

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow -\infty} \left[\left\{ \int_0^t \int_{R/R_z} (u_{i,j} u_{i,j} + \alpha u_{i,i}^2) dx d\eta + \frac{1}{2} \int_{R/R_z} (u_i u_i + \beta^{-2} p^2) dx \right\} e^{-\gamma(t)z} \right] = \\ \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{1}{\gamma(t)} \left[\left\{ \int_0^t \int_{D_z} (u_{i,j} u_{i,j} + \alpha u_{i,i}^2) dA d\eta + \frac{1}{2} \int_{D_z} (u_i u_i + \beta^{-2} p^2) dA \right\} e^{-\gamma(t)z} \right], \end{aligned}$$

所以不等式(23)不成立,不等式(24)成立.因此,在推断不等式(24)时,不采用有限能量假设,利用假设(25)代之就足够了.

假定 $F(z, t)$ 在无穷远处不呈指数增长,则不等式(24)成立,但是,为了给出该不等式的显式表示,需要求出总能量 $E(0, t)$ 的范围.这将在下一节中阐述.

2 总能量 $E(0, t)$ 的范围

本节假定不等式(24)成立,阐述如何求出总能量的范围.引入函数 w_i , 满足作用在 u_i 上的条件(3)、(5)和(6),并当 $x_3 \rightarrow \infty$ 时趋于0.于是,由式(7)分部积分,并利用式(1)~(6),有

$$\begin{aligned} E(0, t) = \int_0^t \int_{\partial R} (w_i u_{i,j} n_j + \alpha w_i u_{j,j} n_i - w_i p n_i) ds d\eta = \\ \int_0^t \int_R (w_{i,j} u_{i,j} + \alpha w_{i,i} u_{j,j} - w_{i,i} p - w_{i,\eta} u_i) dx d\eta + \int_R w_i u_i dx, \end{aligned} \quad (26)$$

其中, n_j 为 ∂R 上单位法向矢量的第 j 个分量, ds 为 ∂R 上的表面面积元.

利用 Schwarz 不等式、算术-几何平均不等式和不等式(14),对于任意正常数 ϵ_i , 得到

$$\begin{aligned} E(0, t) \leq \int_0^t \int_R \left\{ \left(\frac{\epsilon_1}{2} + \frac{\epsilon_4}{2\lambda} \right) u_{i,j} u_{i,j} + \left(\frac{\alpha \epsilon_2}{2} + \frac{2\epsilon_3 \beta^4 t^2}{\pi^2} \right) u_{i,i}^2 \right\} dx d\eta + \\ \frac{\epsilon_5}{2} \int_R u_i u_i dx + Q(w_i), \end{aligned} \quad (27)$$

其中

$$\begin{aligned} Q(w_i) = \int_0^t \int_R \left\{ \frac{1}{2\epsilon_1} w_{i,j} w_{i,j} + \left(\frac{\alpha}{2\epsilon_2} + \frac{1}{2\epsilon_3} \right) w_{j,j}^2 + \frac{1}{2\epsilon_4} w_{i,\eta} w_{i,\eta} \right\} dx d\eta + \\ \frac{1}{2\epsilon_5} \int_R w_i w_i dx, \end{aligned} \quad (28)$$

下角 η 无须求和.取

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{1}{2}, \quad \epsilon_3 = \frac{\alpha \pi^2}{8t^2 \beta^4}, \quad \epsilon_4 = \frac{\lambda}{2}, \quad \epsilon_5 = \frac{1}{2},$$

可知

$$E(0, t) \leq 2Q(w_i). \quad (29)$$

特别选择 w_i 满足式(3)、(5)和(6)为

$$w_i(x_1, x_2, x_3, t) = f_i(x_1, x_2, t) e^{-kx_3},$$

其中 k 为一正常数,后面将对其进行定义.还需要计算 $E(0, t)$ 的上限.计算式(28),得到

$$Q(w_i) = \frac{C_1}{k} + C_2 + C_3 k, \quad (30)$$

其中

$$C_1 = \frac{1}{2} \left[\int_0^t \int_{D_0} \left\{ f_{i,\beta} f_{i,\beta} + \left(\alpha + \frac{4t^2\beta^4}{\alpha\pi^2} \right) f_{\alpha,\alpha}^2 + \frac{1}{\lambda} f_{i,\eta} f_{i,\eta} \right\} dAd\eta \right] + \frac{1}{2} \int_{D_0} f_i f_i dA,$$

$$C_2 = - \left(\alpha + \frac{4t^2\beta^4}{\alpha\pi^2} \right) \int_0^t \int_{D_0} f_{\alpha,\alpha} f_3 dAd\eta,$$

$$C_3 = \frac{1}{2} \left[\int_0^t \int_{D_0} \left\{ f_i f_i + \left(\alpha + \frac{4t^2\beta^4}{\alpha\pi^2} \right) f_3^2 \right\} dAd\eta \right].$$

在如式(30)的所有函数中,选择 k 值,使 $Q(w_i)$ 最小,即取 $k = \sqrt{C_1/C_3}$ 时,最优,得到

$$Q(w_i) = 2\sqrt{C_1 C_3} + C_2. \quad (31)$$

将式(31)代入式(29),再将结果代入式(24),得到总能量的数据范围,并给出了它们之间的几何关系.

3 参数 α 的连续相关性

本节研究参数 α 的微小扰动对解衰减的影响.当然,研究另一个参数 β^2 的扰动影响也是可以的,得到的结论是类似的.本文采用积分-微分不等式,而不是文献[7]中的微分不等式.前者提供了对参数 α 的显式连续相关性,而后者得到的连续相关性结果仍是数据形式的范围(文献[7]中的方程(5.23)).

用常数 $\bar{\alpha}$ 替代 α ,记 $v_i(x,t)$ 和 $q(x,t)$ 为式(1)~(6)的解.可使 u_i 和 v_i 满足 $x_3 = 0$ 上的不同条件,但因问题是线性的,故可分解,并分开讨论两个影响.数据扰动对问题的影响已在第1节中讨论,因此,我们将注意力集中在 $x_3 = 0$ 时, $u_i = v_i$. 如果令

$$\bar{w}_i = u_i - v_i, \quad \theta = p - q, \quad (32)$$

那么,注意到 \bar{w}_i 和 θ 满足以下的初始-边界值问题:

$$\bar{w}_{i,t} = -\theta_{,i} + \Delta\bar{w}_i + \alpha\bar{w}_{j,j} + \bar{\alpha}v_{j,j}, \quad \text{在 } R \times \{t > 0\} \text{ 中, } \bar{\alpha} = \alpha - \bar{\alpha}, \quad (33)$$

$$\theta_{,t} = -\beta^2\bar{w}_{i,i}, \quad \text{在 } R \times \{t > 0\} \text{ 中,} \quad (34)$$

$$\bar{w}_i = 0, \quad \text{在 } R \times \{t = 0\} \text{ 中,} \quad (35)$$

$$\theta = 0, \quad \text{在 } R \times \{t = 0\} \text{ 中,} \quad (36)$$

$$\bar{w}_i = 0, \quad \text{在 } \partial D \times \{t \geq 0\} \text{ 上,} \quad (37)$$

$$\bar{w}_i = 0, \quad \text{在 } D_0 \times \{t > 0\} \text{ 上,} \quad (38)$$

进一步假设 $(u_i, p), (v_i, q)$ 满足式(24).引入 z 和 t 的非负函数 $\Phi(z, t)$:

$$\Phi(z, t) = \int_0^t \int_{R_z} (\bar{w}_{i,j}\bar{w}_{i,j} + \alpha\bar{w}_{j,j}^2) dx d\eta + \frac{1}{2} \int_{R_z} (\bar{w}_i\bar{w}_i + \beta^{-2}\theta^2) dx. \quad (39)$$

显然

$$\Psi(z, t) := \int_z^\infty \Phi(\xi, t) d\xi = \int_0^t \int_{R_z} (\xi - z) (\bar{w}_{i,j}\bar{w}_{i,j} + \alpha\bar{w}_{j,j}^2) dx d\eta + \frac{1}{2} \int_{R_z} (\xi - z) (\bar{w}_i\bar{w}_i + \beta^{-2}\theta^2) dx, \quad (40)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = - \int_0^t \int_{D_z} (\bar{w}_{i,j}\bar{w}_{i,j} + \alpha\bar{w}_{j,j}^2) dAd\eta - \frac{1}{2} \int_{D_z} (\bar{w}_i\bar{w}_i + \beta^{-2}\theta^2) dA. \quad (41)$$

另一方面,对式(40)反复进行分部积分,得到

$$\Psi(z, t) = - \int_0^t \int_{R_z} (\bar{w}_i\bar{w}_{i,3} + \alpha\bar{w}_3\bar{w}_{j,j} - \bar{w}_3\theta) dx d\eta + \bar{\alpha} \int_0^t \int_{R_z} (\xi - z) \bar{w}_i v_{j,j} dx d\eta =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^t \int_{D_2} \bar{\omega}_i \bar{\omega}_i dA d\eta - \int_0^t \int_{R_2} (\alpha \bar{\omega}_3 \bar{\omega}_{j,j} - \bar{\omega}_3 \theta) dx d\eta - \\ & \bar{\alpha} \int_0^t \int_{R_2} \bar{\omega}_3 v_{j,j} dx d\eta - \bar{\alpha} \int_0^t \int_{R_2} (\xi - z) \bar{\omega}_{i,i} v_{j,j} dx d\eta. \end{aligned} \quad (42)$$

利用算术-几何平均不等式、式(10)和式(14),对于任意正常数 δ_1 和 δ_2 , 得到

$$\begin{aligned} \Psi(z, t) & \leq \frac{1}{2\lambda} \int_0^t \int_{D_2} \bar{\omega}_{i,\alpha} \bar{\omega}_{i,\alpha} dA d\eta + \\ & \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^t \int_{R_2} \left\{ (\alpha + 1 + \bar{\alpha}\delta_1) \bar{\omega}_{i,j} \bar{\omega}_{i,j} + \left(1 + \frac{4t^2\beta^4}{\pi^2\alpha} \right) \bar{\alpha} \bar{\omega}_{j,j}^2 \right\} dx d\eta + \\ & \frac{\bar{\alpha}}{2\sqrt{\lambda}\delta_1} \int_0^t \int_{R_2} v_{j,j}^2 dx d\eta + \frac{\bar{\alpha}\delta_2}{2} \int_0^t \int_{R_2} (\xi - z) \bar{\omega}_{i,i}^2 dx d\eta + \frac{\bar{\alpha}}{2\delta_2} \int_0^t \int_{R_2} (\xi - z) v_{j,j}^2 dx d\eta. \end{aligned} \quad (43)$$

而由式(24)

$$\int_0^t \int_{R_2} v_{j,j}^2 dx d\eta \leq \frac{1}{\alpha} E(z, t) \leq \frac{1}{\alpha} E(0, t) e^{-\gamma z}, \quad (44)$$

$$\int_0^t \int_{R_2} (\xi - z) v_{j,j}^2 dx d\eta \leq \frac{1}{\alpha} \int_z^\infty E(\xi, t) d\xi \leq \frac{1}{\alpha\gamma} E(0, t) e^{-\gamma z}, \quad (45)$$

于是,可将式(43)写为

$$\Psi(z, t) \leq -\frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + K\Phi(z, t) + \frac{\bar{\alpha}\delta_2}{2\alpha} \Psi(z, t) + \frac{\bar{\alpha}}{2\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}\delta_1} + \frac{1}{\delta_2\gamma} \right) E(0, t) e^{-\gamma z}, \quad (46)$$

其中

$$K = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \max \left(\alpha + 1 + \bar{\alpha}\delta_1, 1 + \frac{4t^2\beta^4}{\pi^2\alpha} \right). \quad (47)$$

可将式(46)改写为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + a \int_z^\infty \Phi(\xi, t) d\xi \leq b\Phi(z, t) + \bar{\alpha}cE(0, t) e^{-\gamma z}, \quad (48)$$

其中

$$a = (2 - \bar{\alpha}\delta_2/\alpha)\lambda, \quad b = 2K\lambda, \quad c = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\delta_1} + \frac{\lambda}{\delta_2\gamma} \right). \quad (49)$$

为了确保是衰减的,需要

$$a > 0 \text{ 或 } \delta_2 < 2\alpha/\bar{\alpha}. \quad (50)$$

这个条件成为流动的约束条件.按文献[11,14-15]中的步骤,若 $\sigma \neq \gamma$, 则对不等式(48)积分,得到

$$\Phi(z, t) \leq \hat{\Phi}(0, t) e^{-\sigma z} + \frac{\bar{\alpha}c}{\sigma - \gamma} E(0, t) e^{-\gamma z}, \quad (51)$$

其中

$$\hat{\Phi}(0, t) \leq \frac{\sigma + \kappa}{\sigma} \left\{ \Phi(0, t) + \frac{\kappa\bar{\alpha}c}{(\sigma - \gamma)(\kappa + \gamma)} E(0, t) \right\}, \quad (52)$$

且

$$\sigma = \frac{1}{2} (\sqrt{b^2 + 4a} - b), \quad \kappa = \frac{1}{2} (\sqrt{b^2 + 4a} + b). \quad (53)$$

若 $\sigma = \gamma$, 则

$$\Phi(z, t) \leq \tilde{\Phi}(0, t)e^{-\gamma z} + \bar{\alpha}cE(0, t)ze^{-\gamma z}, \quad (54)$$

其中

$$\tilde{\Phi}(0, t) \leq \frac{\gamma + \kappa}{\gamma}\Phi(0, t) + \frac{\kappa\bar{\alpha}c}{\gamma(\kappa + \gamma)}E(0, t). \quad (55)$$

为了显式表示不等式(51)和(54),需要确定 $\hat{\Phi}(0, t)$ 和 $\tilde{\Phi}(0, t)$ 或 $\Phi(0, t)$ 的数据范围. 对式(39)分部积分,得

$$\begin{aligned} \Phi(0, t) = & - \int_0^t \int_{D_0} (\bar{\omega}_i \bar{\omega}_{i,3} + \alpha \bar{\omega}_3 \bar{\omega}_{j,j} - \bar{\omega}_3 \theta) dAd\eta + \bar{\alpha} \int_0^t \int_R \bar{\omega}_i v_{j,j} dx d\eta = \\ & - \bar{\alpha} \int_0^t \int_R \bar{\omega}_{i,i} v_{j,j} dx d\eta. \end{aligned} \quad (56)$$

由 Schwarz 不等式,有

$$\Phi(0, t) \leq \frac{\bar{\alpha}}{\sqrt{\alpha\bar{\alpha}}} \{ \Phi(0, t)E(0, t) \}^{1/2} \text{ 或 } \Phi(0, t) \leq \frac{\bar{\alpha}^2}{\alpha\bar{\alpha}} E(0, t). \quad (57)$$

将式(57)代入式(52)和(55),得到 $\hat{\Phi}(0, t)$ 和 $\tilde{\Phi}(0, t)$ 的范围,再将其代入式(51)和(54),得到期望的显式表示,即若 $\sigma \neq \gamma$, 则

$$\Phi(z, t) \leq \bar{\alpha}E(0, t) \left[\frac{\sigma + \kappa}{\sigma} \left\{ \frac{\bar{\alpha}}{\alpha\bar{\alpha}} + \frac{\kappa c}{(\sigma - \gamma)(\sigma + \kappa)} \right\} e^{-\sigma z} + \frac{c}{\sigma - \gamma} e^{-\gamma z} \right], \quad (58)$$

否则

$$\Phi(z, t) \leq \bar{\alpha}E(0, t) \left[\frac{\gamma + \kappa}{\gamma} \frac{\bar{\alpha}}{\alpha\bar{\alpha}} + \frac{\kappa c}{\gamma(\gamma + \kappa)} + cz \right] e^{-\gamma z}. \quad (59)$$

不等式(58)和(59)显示,不仅呈 z 指数衰减,还显示出,当 $\bar{\alpha} \rightarrow \alpha$ 时,不等式(58)和(59)中的幅值项变小.

致谢 本文得到韩国汉阳大学研究基金(HY-2007-I)的资助,在此深表谢意.

参考文献:

- [1] Ansonge R. *Mathematical Models of Fluid Dynamics*[M]. Weinheim: Wiley-VCH, 2003:118.
- [2] LIN Chang-hao, Payne L E. The influence of domain and diffusivity perturbations on the decay end effects in heat conduction[J]. *SIAM J Math Anal*, 1994, **25**(5): 1241-1258.
- [3] LIN Chang-hao, Payne L E. Phragmén-Lindelöf type results for second order quasilinear parabolic equation in R^2 [J]. *Z Angew Math Phys*, 1994, **45**(2): 294-311.
- [4] LIN Chang-hao, Payne L E. A Phragmén-Lindelöf alternative for a class of quasilinear second order parabolic problems[J]. *Differential and Integral Equations*, 1995, **8**(3): 539-551.
- [5] Flavin J N, Knops R J, Payne L E. Asymptotic behaviour of solutions to semi-linear elliptic equations on the half-cylinder[J]. *Z Angew Math Phys*, 1992, **43**(3): 405-421.
- [6] Horgan C O, Payne L E. Phragmén-Lindelöf type results for harmonic functions with nonlinear boundary conditions[J]. *Arch Rational Mech Anal*, 1993, **122**(2): 123-144.
- [7] Payne L E, Song J C. Phragmén-Lindelöf and continuous dependence type results in generalized heat conduction[J]. *Z Angew Math Phys*, 1996, **47**(4): 527-538.
- [8] Horgan C O. Recent developments concerning Saint-Venant's principle: an update[J]. *Appl Mech Rev*, 1989, **42**: 295-303.
- [9] Horgan C O. Recent developments concerning Saint-Venant's principle: a second update[J]. *Appl Mech Rev*, 1996, **49**: 101-111.

- [10] Horgan C O, Knowles J K. Recent developments concerning Saint-Venant's principle [C]// Hutchinson J W. *Advances in Applied Mechanics*. New York: Academic Press, Vol 23, 1983: 179.
- [11] LIN Chang-hao. Spatial decay estimates and energy bounds for the Stokes flow equation [J]. *SAACM*, 1992, 2(3): 249-262.
- [12] LIN Chang-hao, Payne L E. Spatial decay bounds in the channel flow of an incompressible viscous fluid [J]. *Mathematical Models & Methods in Applied Sciences*, 2004, 14(6): 795-818.
- [13] 宋 J C. 平面 Stokes 流动中改良的空间衰减限 [J]. *应用数学和力学*, 2009, 30(7): 777-782.
- [14] Horgan C O, Wheeler L T. Spatial decay estimates for the Navier-Stokes equations with application to the problem of entry flow [J]. *SIAM J Appl Math*, 1978, 35(1): 97-116.
- [15] Song J C. Decay estimates for steady magnetohydrodynamic pipe flow [J]. *Nonlinear Analysis*, 2003, 54(6): 1029-1044.

Phragmén-Lindelöf and Continuous Dependence Type Results in a Stokes Flow

J. C. Song

(*Department of Applied Mathematics, Hanyang University,
Ansan, Gyeonggido 426-791, Korea*)

Abstract: The asymptotic behavior of end effects for a Stokes flow defined on a three-dimensional semi-infinite cylinder was investigated. With homogeneous Dirichlet conditions of the velocity on the lateral surface of the cylinder, it is shown that solutions either grow exponentially or decay exponentially in the distance from the finite end of the cylinder. In the latter case the effect of perturbing the equation parameters is also investigated.

Key words: Phragmén-Lindelöf; continuous dependence; decay bounds; Stokes flow