

基于滑动 Kriging 插值的 MLPG 法求解结构非耦合热应力问题*

王 峰^{1,2}, 周宜红^{1,2}, 郑保敬², 林 皋³

- (1. 三峡大学 湖北省水电工程施工与管理重点实验室, 湖北 宜昌 443002;
2. 三峡大学 水利与环境学院, 湖北 宜昌 443002;
3. 大连理工大学 水利工程学院, 辽宁 大连 116024)

摘要: 将基于滑动 Kriging 插值的无网格局部 Petrov-Galerkin (MLPG) 法用来求解二维结构非耦合热应力问题, 首先进行瞬态热传导的求解, 然后再通过顺序耦合合法将不同时刻节点温度作为附加体力项施加到应力分析中. 瞬态温度场和非耦合热应力分析通过加权余量法来离散, 同时用 Heaviside 分段函数作为局部弱形式的权函数. 由于滑动 Kriging 插值构造的形函数满足 Kronecker δ 函数的性质, 因此方便了本质边界条件的施加. 刚度矩阵形成过程中只涉及到边界积分而没有涉及到区域积分, 因此可以减少计算工作量, 最后通过两个数值算例来验证本文方法的有效性.

关键词: 热应力; 滑动 Kriging 插值; 无网格局部 Petrov-Galerkin 法; Heaviside 函数; 顺序耦合合法

中图分类号: O343.6 **文献标志码:** A

doi: 10.21656/1000-0887.370189

引 言

当结构内部各点温度发生变化时, 会使结构的体积产生膨胀或收缩, 而这种膨胀或收缩由于受到结构外部或内部约束的限制并不能完全自由的发生, 此时结构将会产生热应力^[1-2]. 热应力分为两类, 一类是非耦合热应力问题, 即首先由初始条件和边界条件, 通过热传导方程求出结构温度场分布, 然后再根据两个时刻温度场之差, 通过热弹性运动方程获得结构热应变和热应力. 工程问题多采用非耦合热应力进行求解, 即认为“单元体体积不变”, 应力场对温度场的影响很小可忽略不计. 另一类是耦合热应力问题, 此时温度场不能独立地求解, 热传导方程与热弹性运动方程必须耦合求解.

传统的热应力分析一般认为作用在结构上的温度变化是缓慢的, 热变形变化也很缓慢, 此时位移和加速度的影响可以略去不计, 即近似地认为是准静态热应力问题. 而当温度或机械荷载变化较快时, 不能忽略惯性项的影响, 必须研究动态热应力问题, 此时解出的应力场是波动的, 会出现一个较平均应力为高的应力波, 这个应力波对材料的危害很大.

* 收稿日期: 2016-06-14; 修订日期: 2016-08-30

基金项目: 国家自然科学基金(51479103); 国家自然科学基金青年科学基金(51109134); 中国博士后科学基金(2013T60283)

作者简介: 王峰(1987—), 男, 讲师, 博士(通讯作者. E-mail: wangfeng@mail.dlut.edu.cn).

近年来,随着数值计算方法的不断发展,对于热应力问题,已经有很多数值方法对其进行求解,如有限元方法^[3-4]、边界元方法^[5-6],但这些数值计算方法都依赖于网格.当网格发生畸变时,对计算精度和效率影响很大,而且形状复杂结构的网格剖分也是一个十分冗长的过程.基于此,一些学者已经开始用无网格法来求解热应力问题,Sladek 等^[7-8]用无网格局部 Petrov-Galerkin 法和局部边界积分方程法(meshless local boundary integral equation, LBIE)分别求解了耦合和非耦合热应力问题,Hosseini 等^[9]用 MLPG 法求解了功能梯度空心圆柱的耦合热应力,Ching 等^[10]用 MLPG 法求解了功能梯度弹性体的非耦合热应力,Bobaru 等^[11]用 element-free Galerkin(EFG)法对线性热弹性体进行形状优化.然而他们都是基于移动最小二乘法(moving least squares, MLS)来构造近似函数的,由于 MLS 构造的形函数缺乏 Kronecker δ 特性,因此在本质边界条件施加时,需要通过 Lagrange 乘子法或罚函数法等方法来进行处理,这无疑增加了计算工作量,使数值方法实施更加复杂.

为了克服这一困难,许多学者应用滑动 Kriging(moving Kriging, MK)插值法来构造无网格法中的形函数,与 MLS 形函数相比,MK 形函数构造过程是通过最小均方差理论来实现的,这保证了函数拟合的准确性.由于 MK 插值方法所构造的形函数满足 Kronecker δ 特性,因此能直接准确施加本质边界条件,其计算代价明显低于移动最小二乘法无网格方法.Gu^[12]将 MK 插值与 EFG 法相结合来求解稳态热传导问题,陈莘莘等^[13]将 MK 插值法与 EFG 法相结合来求解中厚板弯曲问题,Bui 等^[14]将 MK 插值法与 EFG 法相结合求解了结构的动力学问题,Li 等^[15]将 MK 插值法与无网格边界积分方程相结合来求解二维位势问题,Chen 等^[16]将 MK 插值法与比例边界方程相结合来求解二维断裂问题.为了避免使用上述全局背景网格,一些学者将 MK 插值法与 MLPG 法相结合.本文作者之一 Zheng(郑保敬)等^[17-19]将 MK 插值法与 MLPG 法相结合用来求解弹性力学问题、位势问题和耦合热应力问题,王峰等^[20-22]求解了结构动力学问题、非线性热传导问题和带源参数热传导问题,Chen 等^[23]求解了瞬态传热问题.

本文基于滑动 Kriging 插值的无网格 MLPG 法用来求解结构的非耦合热应力问题,选取 Heaviside 分段函数作为局部弱形式的权函数,详细推导了非耦合热应力问题的 MLPG 公式,最后通过两个数值算例来验证基于滑动 Kriging 插值的无网格 MLPG 法的有效性.

1 滑动 Kriging 插值

Kriging 插值是以南非矿业工程师 D·G·Kriging 名字命名的一种最优内插法,它以变分函数理论和结构分析为基础,在有限区域内对区域化变量进行无偏最优估计.本文将 Kriging 插值扩展到无网格法中,跟 MLS 类似,这里我们称作滑动 Kriging 插值法.由于 MK 插值所构造的形函数具备 Kronecker δ 特性,因此用其构造近似函数具有很大的优势.考虑定义在问题域 Ω 及其边界 Γ 上的场函数 $u(\mathbf{x})$,设问题域通过 N 个场节点离散,在任意点 \mathbf{x} 的支持域内有 n 个场节点,若已知节点的场函数值为 $u(\mathbf{x}_1), u(\mathbf{x}_2), \dots, u(\mathbf{x}_n)$,则点 \mathbf{x} 处的近似场函数可以通过 MK 插值来逼近

$$u^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^n \phi_k(\mathbf{x}) u_k(t) = \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{u}(t). \quad (1)$$

$\Phi(\mathbf{x}) = \{\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \dots, \phi_n(\mathbf{x})\}$ 表达式如下:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x})\mathbf{A} + \mathbf{r}^T(\mathbf{x})\mathbf{B}, \quad (2)$$

$$\phi_k(\mathbf{x}) = \sum_j^m p_j(\mathbf{x})A_{jk} + \sum_i^n r_i(\mathbf{x})B_{ik}, \tag{3}$$

式中矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 分别表示如下:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{P}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{R}^{-1}, \tag{4}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{P}\mathbf{A}), \tag{5}$$

式中, \mathbf{I} 为 $n \times n$ 的单位矩阵. $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots, p_m(\mathbf{x})\}$ 是一组完备多项式基, 对于线性基

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1, x, y\}, \quad m = 3; \tag{6}$$

二次基

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1, x, y, x^2, xy, y^2\}, \quad m = 6. \tag{7}$$

本文在这里选用线性基, 节点处基函数值所形成的矩阵 \mathbf{P} 表示为

$$\mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_m(\mathbf{x}_1) & p_m(\mathbf{x}_2) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}_{m \times n}, \tag{8}$$

矩阵 \mathbf{R} 和矢量 $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ 为

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & \cdots & R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n) \\ R(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) & 1 & \cdots & R(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1) & R(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_2) & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}, \tag{9}$$

$$\mathbf{r}^T(\mathbf{x}) = \{R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}) \quad R(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}) \quad \cdots \quad R(\mathbf{x}_n, \mathbf{x})\}, \tag{10}$$

其中 \mathbf{R} 为对角线为 1 的对称相关矩阵, $R(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ 为节点 \mathbf{x}_i 和 \mathbf{x}_j 之间的相关函数, 这里取 Gauss 型函数

$$R(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = e^{-\theta r_{ij}^2}, \tag{11}$$

其中 $\theta > 0$ 为模型相关参数, 按照文献[17]所示方法选取 $\theta = 0.1, r_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$.

式(3)所构造的形函数最重要的一条性质就是满足 Kronecker δ 函数性质, 即

$$\phi_k(\mathbf{x}_j) = \begin{cases} 1 & (k = j; k, j = 1, 2, \dots, n), \\ 0 & (k \neq j; k, j = 1, 2, \dots, n). \end{cases} \tag{12}$$

2 非耦合热应力问题

2.1 非耦合热应力问题的位移法

求解热应力最关键的问题是求出结构每一时刻的温度场分布, 从而求得变温, 基于 MK 插值的 MLPG 法求解瞬态热传导方程可以参考文献[23].

对于热应力问题, 在问题域 Ω 内的基本方程为

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i, \tag{13}$$

其中, σ_{ij} 为相对于位移场 u_i 的应力张量, b_i 是体力分量, ρ 是质量密度, \ddot{u}_i 为位移 u_i 对时间 t 的二阶导数.

几何方程为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}); \quad (14)$$

物理方程为

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^* - \beta T \delta_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - \beta T \delta_{ij}, \quad (15)$$

式中, ε_{ij} 是应变张量, λ 和 μ 为 Lamé(拉梅)常数, β 为热应力系数, 这里 λ , μ 和 β 可表示如下:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \\ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \\ \beta = \frac{E\alpha}{1-2\nu} = (3\lambda + 2\mu)\alpha, \end{cases} \quad (16)$$

式中, E 为弹性模量, ν 为 Poisson(泊松)比, α 为热膨胀系数.

相应的边界条件为

$$u_i = \bar{u}_i, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad (17)$$

$$t_i = \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_t, \quad (18)$$

其中 \bar{u}_i 是位移边界 Γ_u 上的已知位移分量, \bar{t}_i 是面力边界 Γ_t 上的已知面力分量, 且 $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$, n_j 是边界 Γ 的外法线方向余弦. 初始条件为

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (19)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (20)$$

其中 \mathbf{u}_0 和 \mathbf{v}_0 为初始时刻 t_0 相对应的初始位移和初始速度.

2.2 非耦合热应力控制方程的弱形式及其离散

将问题域 Ω 及边界 Γ 用 N 个节点离散, 在任意节点 I 对应的子域 Ω_s 内采用加权余量法, 式(13)离散为

$$\int_{\Omega_s} w_i (\sigma_{ij,j} + b_i - \rho \ddot{u}_i) d\Omega = 0, \quad (21)$$

式中, w_i 是与节点 I 对应的权函数. 对式(21)采用分部积分和 Gauss 散度定理, 并施加自然边界条件(18)可得

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_s} (w_i \rho \ddot{u}_i + w_{i,j} \sigma_{ij}^* - w_i \beta T_{,i}) d\Omega - \int_{\Gamma_{st}} w_i (t_i - \beta T n_i) d\Gamma - \int_{\Gamma_{su}} w_i (t_i - \beta T n_i) d\Gamma = \\ & \int_{\Gamma_{st}} w_i \bar{t}_i d\Gamma + \int_{\Omega_s} w_i b_i d\Omega. \end{aligned} \quad (22)$$

当局部积分子域边界 Γ_s 与问题域边界 Γ 相交的时候, Γ_s 由三部分组成: 内边界 Γ_{st} 、位移边界 Γ_{su} 和面力边界 Γ_{st} . 如果没有相交, 则 $\Gamma_{st} = \Gamma_s$. 选取 Heaviside 分段函数作为权函数简化式(22), 可得

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_s} (\rho \ddot{u}_i - \beta T_{,i}) d\Omega - \int_{\Gamma_{st}} (t_i - \beta T n_i) d\Gamma - \int_{\Gamma_{su}} (t_i - \beta T n_i) d\Gamma = \\ & \int_{\Gamma_{st}} \bar{t}_i d\Gamma + \int_{\Omega_s} b_i d\Omega. \end{aligned} \quad (23)$$

位移场近似函数可表示为空间坐标和时间的函数, 即

$$u^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^n \phi_k(\mathbf{x}) u_k(t) = \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{u}(t), \quad (24)$$

温度场近似函数可表示为

$$T^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^n \phi_k(\mathbf{x}) T_k(t) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \mathbf{T}(t). \quad (25)$$

将式(24)、(25)代入式(23)可得如下代数方程:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}\mathbf{T}(t) = \mathbf{F}(t), \quad (26)$$

其中 \mathbf{M} , \mathbf{K} , \mathbf{H} 和 \mathbf{F} 分别为质量矩阵、刚度矩阵、温度荷载矩阵和节点荷载向量,它们分别表示如下:

$$\mathbf{M}_{ij} = \int_{\Omega_s} \rho \mathbf{\Phi}_j(\mathbf{x}) d\Omega, \quad (27)$$

$$\mathbf{K}_{ij} = - \int_{\Gamma_{sl}} \mathbf{NDB}_j d\Gamma - \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{NDB}_j d\Gamma, \quad (28)$$

$$\mathbf{H}_{ij} = \int_{\Gamma_{sl}} \mathbf{n}\beta\mathbf{\Phi}_j(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{n}\beta\mathbf{\Phi}_j(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Omega_s} \beta\mathbf{\Psi}_j(\mathbf{x}) d\Omega, \quad (29)$$

式中

$$\mathbf{\Phi}_j = \begin{bmatrix} \phi_j & 0 \\ 0 & \phi_j \end{bmatrix}, \quad (30)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}, \quad (31)$$

$$\mathbf{B}_j = \begin{bmatrix} \phi_{j,x} & 0 \\ 0 & \phi_{j,y} \\ \phi_{j,y} & \phi_{j,x} \end{bmatrix}, \quad (32)$$

$$\mathbf{n} = (n_x \quad n_y)^T, \quad (33)$$

$$\mathbf{\Psi}_j = \begin{bmatrix} \phi_{j,x} & 0 \\ 0 & \phi_{j,y} \end{bmatrix}, \quad (34)$$

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{plane stress}), \quad (35)$$

对于平面应变问题,需把 E 换成 $E/(1 - \nu^2)$, ν 换成 $\nu/(1 - \nu)$, 式(26)可采用 Newmark- β 逐步积分法求解^[24].

3 数值算例

3.1 方形板的热应力问题

为了验证本文方法的有效性,首先考虑一个单位面积的方形板,如图 1 所示,其解析解已知.节点分布如图 2 所示,板在初始时刻的温度和位移均为 0,板的上端受到一突加的热荷载,板的另外其他 3 条边均绝热,且法向位移为 0,这里假设只考虑平面应变.在不考虑内热源和体力的情况下,其解析解如下:

$$T(y, t) = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + 1} \exp\left[-\frac{(2n + 1)^2 \pi^2 t}{4}\right] \cos\left[\frac{(2n + 1) \pi y}{2}\right], \quad (36)$$

$$u_y(y, t) = \frac{(1 + \mu)\alpha}{1 - \mu} \int_0^y T dy, \quad (37)$$

$$\sigma_x(y, t) = -\frac{\alpha E}{1 - \mu} T, \quad (38)$$

这里, $\alpha = 0.02$ 为热膨胀系数, 热传导系数 $k = 1$, 密度 $\rho = 1$, 比热容 $c = 1$, 弹性模量 $E = 1$, Poisson 比 $\nu = 0.3$. 把方形板用 11×11 个节点进行离散, 时间步取为 2×10^{-3} . 在数值积分过程中节点支持域半径取 2.0, 局部积分分子域半径取 0.5, 采用 2 个 Gauss 积分点. 图 3 给出了方板最左端中点和底点温度随时间变化的曲线图, 图 4 给出了方板最左端中点和顶点竖向位移随时间变化的曲线图, 图 5 给出了方板最左端中点 x 方向热应力随时间变化的曲线图. 从这些图可以看出, 基于 MK 插值的无网格 MLPG 法计算得到的结果与解析解非常吻合.

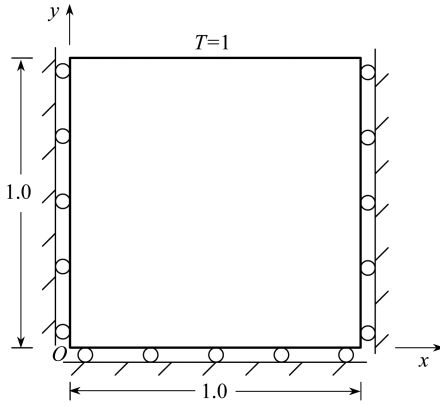


图 1 突加热荷载的方板

Fig. 1 A suddenly heated unit square plate

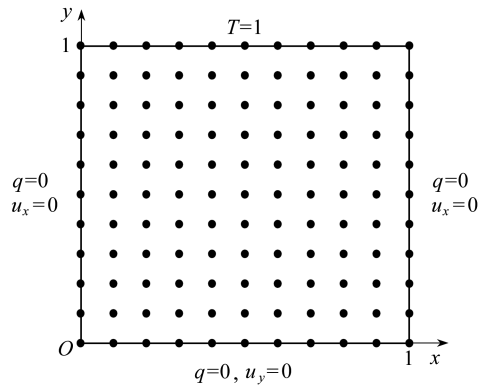


图 2 单位方板节点分布

Fig. 2 Nodes distribution for the unit square plate

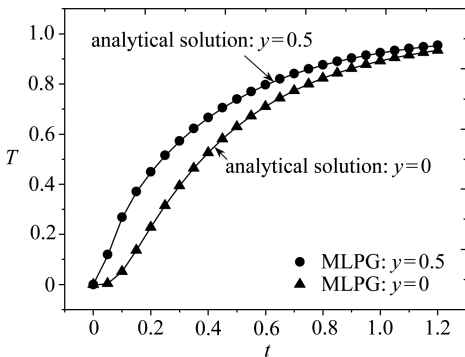


图 3 方板左端温度比较

Fig. 3 Temporal variations of temperatures at 2 different points on the y -axis

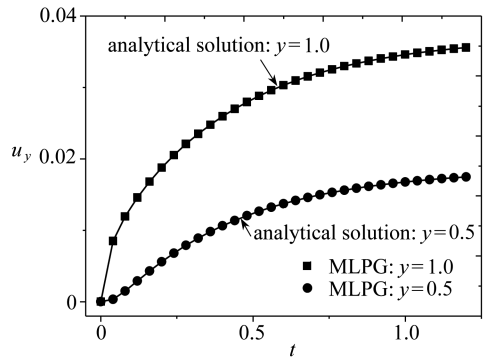


图 4 方板左端竖向位移比较

Fig. 4 Temporal variations of displacements u_y at 2 different points on the y -axis

当考虑惯性项的影响, 此时求解出的应力是波动的, 见图 6. 图 6 给出了方板最左端中点 x 方向热应力随时间变化的曲线图.

3.2 带热源方板的热应力问题

考虑如图 7 所示的方板, 采用如表 1 中设置的参数作为边界条件和热源项, 该温度场的解析解是 $T = t \sin(\pi x) \sin(\pi y)$. 本文均匀选取 11×11 个节点, 见图 8, 时间步取为 2×10^{-3} , 图 9 展

示了时间分别是 $t = 0.4, 0.8, 1.2$ 时的温度场分布, 可以很明显的看出, 随着时间的增加, 温度场的幅值也增加. 图 10 给出了点 $(0.6, 0.6)$ 处温度相对误差随时间变化的曲线图, 可见基于 MK 插值的 MLPG 法可以获得很好的计算结果.

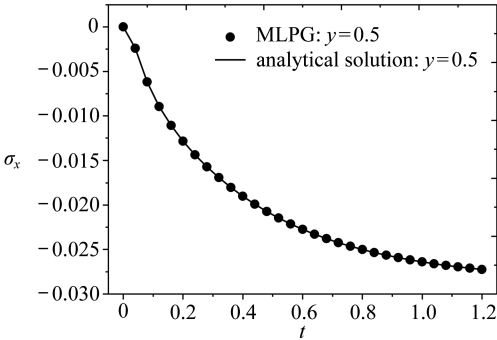


图 5 方板左端中点水平向热应力比较
Fig. 5 Temporal variation of stress σ_x at the mid-point of the y-axis

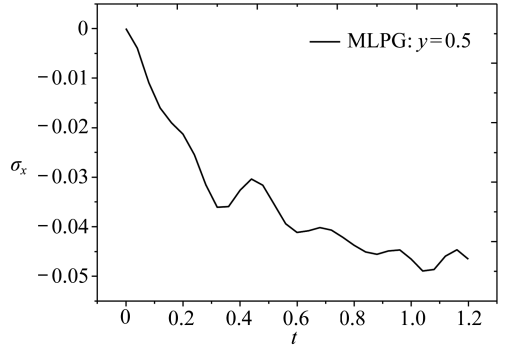


图 6 方板左端中点水平向动态热应力
Fig. 6 Temporal variation of dynamic stress σ_x at the mid-point of the y-axis

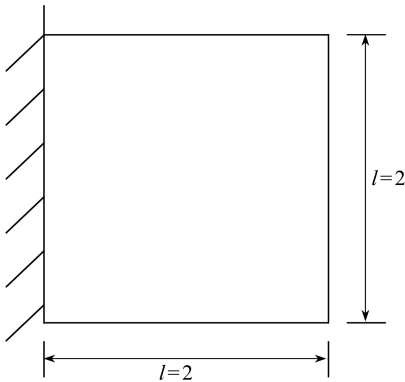


图 7 带热源的方板
Fig. 7 A square plate with a heat source

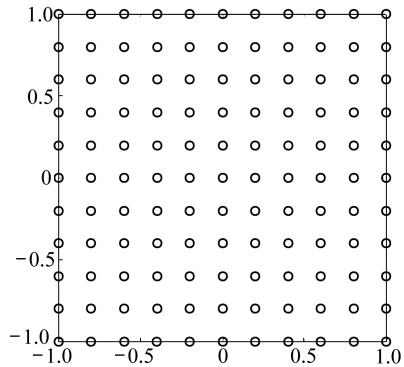


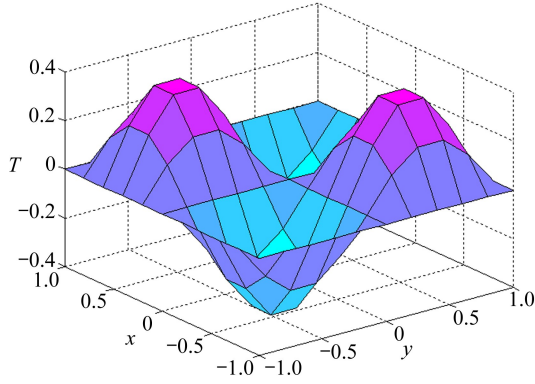
图 8 板的节点分布
Fig. 8 Nodes distribution of the unit square panel

表 1 算例中的物理和边界参数

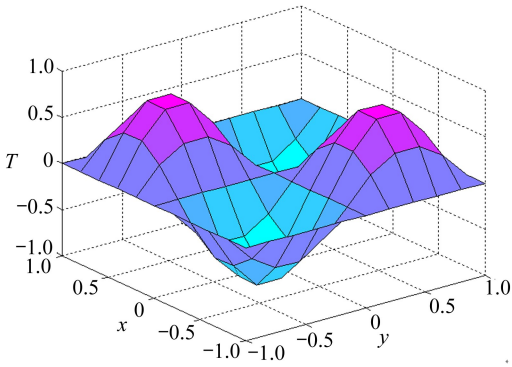
Table 1 Physical and boundary parameters for the numerical example

parameter	value
density ρ	1
specific heat c	1
thermal conductivity k	1
heat generation Q	$(1 + 2t\pi^2) \sin(\pi x) \sin(\pi y)$
temperature boundary condition	$t \sin(\pi x) \sin(\pi y)$
initial temperature	0

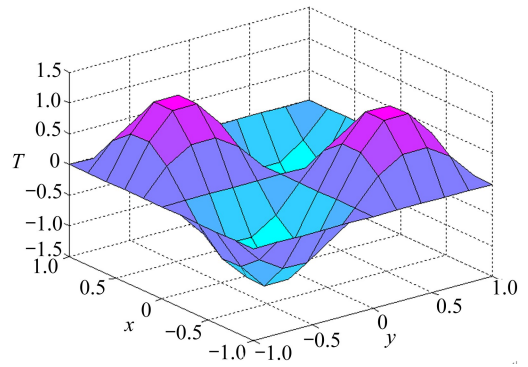
求解热应力时, 最右边受水平向 0.2 的面力, 热膨胀系数 $\alpha = 0.1$, 弹性模量 $E = 1$, Poisson 比 $\nu = 0.3$. 在数值积分过程中节点支持域半径取 2.0, 局部积分分子域半径取 0.5, 采用 2 个 Gauss 积分点. 图 11 给出了用 MLPG 法求解的点 $(0.6, 0.6)$ 处竖向热应力随时间变化的曲线图, 两条曲线之间的差值即为温度场对应力的影响, 可以看出该算例中温度对应力的影响还是很大的.



(a) $t = 0.4$



(b) $t = 0.8$



(c) $t = 1.2$

图9 瞬态温度场分布图

Fig. 9 The distributions of the transient temperature fields

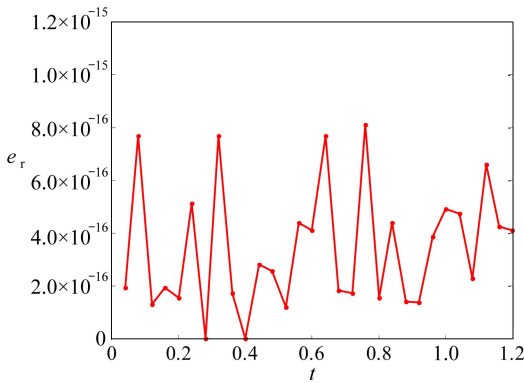


图10 点(0.6,0.6)处温度相对误差随时间变化的曲线图

Fig. 10 The time histories of the relative temperature error at point (0.6,0.6)

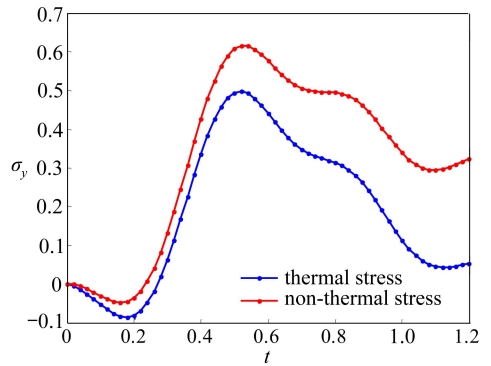


图11 点(0.6,0.6)处竖向应力随时间变化

Fig. 11 Temporal variations of stress σ_y at point (0.6,0.6)

4 结 论

本文将基于 MK 插值的无网格局部 Petrov-Galerkin 法用于求解结构的非耦合热应力问题,首先求解了不同时刻结构温度场分布,然后再通过顺序耦合合法将热分析得到的节点温度作

为附加体力项施加到应力计算中.由于 MK 插值构造的形函数具有 Kronecker δ 特性,因此方便了本质边界条件的施加.温度场和应力场计算均采用了 Heaviside 分段函数作为局部弱形式的权函数,由于刚度矩阵计算过程中只涉及边界积分不涉及区域积分,从而明显减少计算工作量.通过两个数值算例表明,基于 MK 插值的无网格 MLPG 法可以很好地处理结构非耦合热应力问题,而且具有稳定性好、易施加边界条件等优点.

致谢 本文作者衷心感谢湖北省水电工程施工与管理重点实验室开放基金(2016KSD12)的资助.

参考文献(References):

- [1] Eslami M R, Hetnarski R B, Ignaczak J, Noda N, Sumi N, Tanigawa Y. *Theory of Elasticity and Thermal Stresses: Explanations, Problems and Solutions*[M]. Berlin: Springer, 2013.
- [2] 严宗达,王洪礼.热应力[M].北京:高等教育出版社,1993.(YAN Zong-da, WANG Hong-li. *Thermal Stress*[M]. Beijing: Higher Education Press, 1993.(in Chinese))
- [3] Keramidis G A. A finite element formulation for thermal stress analysis[D]. PhD Thesis. West Lafayette: Purdue University, 1975.
- [4] 孔祥谦.热应力有限单元法分析[M].上海:上海交通大学出版社,1999.(KONG Xiang-qian. *Finite Element Analysis for Thermal Stress*[M]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University Press, 1999.(in Chinese))
- [5] Yang M T, Park K H, Banerjee P K. 2D and 3D transient heat conduction analysis by BEM via particular integrals[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2002, **191** (15/16): 1701-1722.
- [6] 高效伟,杨恺.功能梯度材料结构的热应力边界元分析[J].力学学报,2011, **43**(1): 136-143. (GAO Xiao-wei, YANG Kai. Thermal stress analysis of functionally graded material structures using boundary element method[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2011, **43**(1): 136-143.(in Chinese))
- [7] Sladek J, Sladek V, Zhang Ch, Tan C L. Meshless local Petrov-Galerkin method for linear coupled thermoelastic analysis[J]. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2006, **16** (1): 57-68.
- [8] Sladek J, Sladek V, Atluri S N. A pure contour formulation for the meshless local boundary integral equation method in thermoelasticity[J]. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2001, **2**(4): 423-433.
- [9] Hosseini S M, Sladek J, Sladek V. Meshless local Petrov-Galerkin method for coupled thermoelasticity analysis of a functionally graded thick hollow cylinder[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2011, **35**(6): 827-835.
- [10] Ching H K, Yen S C. Meshless local Petrov-Galerkin analysis for 2D functionally graded elastic solids under mechanical and thermal loads[J]. *Composites Part B: Engineering*, 2005, **36** (3): 223-240.
- [11] Bobaru F, Mukherjee S. Meshless approach to shape optimization of linear thermoelastic solids[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, **53**(4): 765-796.
- [12] Gu L. Moving Kriging interpolation and element-free Galerkin method[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, **56**(1): 1-11.
- [13] 陈莘莘,李庆华,欧蔓丽.中厚板弯曲问题的 Kriging 插值无网格法[J].计算物理,2013, **30**

- (4): 547-553. (CHEN Shen-shen, LI Qing-hua, OU Man-li. Meshless Kriging interpolation method for bending of a moderately thick plate[J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2013, **30**(4): 547-553.(in Chinese))
- [14] Bui T Q, Nguyen M N, Zhang C. A moving Kriging interpolation-based element-free Galerkin method for structural dynamic analysis[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, **200**(13/16): 1354-1366.
- [15] LI Xing-guo, DAI Bao-dong, WANG Ling-hui. A moving Kriging interpolation-based boundary node method for two-dimensional potential problems[J]. *Chinese Physics B*, 2010, **19**(12): 120202.
- [16] CHEN Shen-shen, LI Qing-hua, LIU Ying-hua. A scaled boundary node method applied to two-dimensional crack problems[J]. *Chinese Physics B*, 2012, **21**(11): 110207.
- [17] Zheng B J, Dai B D. A meshless local moving Kriging method for two-dimensional solids[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2011, **218**(2): 563-573.
- [18] 郑保敬, 戴保东. 位势问题改进的无网格局部 Petrov-Galerkin 法[J]. 物理学报, 2010, **59**(8): 5182-5189.(ZHENG Bao-jing, DAI Bao-dong. Improved meshless local Petrov-Galerkin method for two-dimensional potential problems[J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, **59**(8): 5182-5189. (in Chinese))
- [19] Zheng B J, Gao X W, Yang K, Zhang C Z. A novel meshless local Petrov-Galerkin method for dynamic coupled thermoelasticity analysis under thermal and mechanical shock loading[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2015, **60**: 154-161.
- [20] 王峰, 林皋, 郑保敬, 胡志强, 刘俊. 基于滑动 Kriging 插值的无网格 MLPG 法求解结构动力问题[J]. 振动与冲击, 2014, **33**(4): 27-31.(WANG Feng, LIN Gao, ZHENG Bao-jing, HU Zhi-qiang, LIU Jun. MLPG method based on moving Kriging interpolation for structural dynamic analysis[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2014, **33**(4): 27-31.(in Chinese))
- [21] 王峰, 林皋, 郑保敬, 刘俊. 非线性热传导问题的基于滑动 Kriging 插值的无网格局部 Petrov-Galerkin 法[J]. 大连理工大学学报, 2014, **54**(3): 339-344. (WANG Feng, LIN Gao, ZHENG Bao-jing, LIU Jun. MLPG method based on moving Kriging interpolation for solving nonlinear heat conduction problems[J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 2014, **54**(3): 339-344. (in Chinese))
- [22] 王峰, 林皋, 郑保敬, 刘俊, 李建波. 带源参数热传导问题的基于滑动 Kriging 插值的 MLPG 法[J]. 力学季刊, 2013, **34**(2): 175-180. (WANG Feng, LIN Gao, ZHENG Bao-jing, LIU Jun, LI Jian-bo. Meshless local Petrov-Galerkin method with moving Kriging interpolation for solving heat conduction problems with source parameter[J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2013, **34**(2): 175-180.(in Chinese))
- [23] Chen L, Liew K M. A local Petrov-Galerkin approach with moving Kriging interpolation for solving transient heat conduction problems[J]. *Computational Mechanics*, 2011, **47**(4): 455-467.
- [24] 张亚辉, 林家浩. 结构动力学基础[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2007.(ZHANG Ya-hui, LIN Jia-hao. *Fundamentals of Structural Dynamics*[M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2007.(in Chinese))

A Meshless Local Petrov-Galerkin Method Based on the Moving Kriging Interpolation for Structural Uncoupled Thermal Stress Analysis

WANG Feng^{1,2}, ZHOU Yi-hong^{1,2}, ZHENG Bao-jing², LIN Gao³

(1. Hubei Key Laboratory of Construction and Management in Hydropower Engineering, China Three Gorges University, Yichang, Hubei 443002, P.R.China;

2. College of Hydraulic & Environmental Engineering, China Three Gorges University, Yichang, Hubei 443002, P.R.China;

3. School of Hydraulic Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P.R.China)

Abstract: A meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method based on the moving Kriging interpolation was employed for the solution of 2D structural uncoupled thermal stress problems. The transient heat conduction problem was solved firstly and then the thermal solutions were imposed as body loads with the sequential coupled-field method in the stress analysis. The local weak forms were developed with the weighted residual method locally from the partial differential equations of transient heat conduction and structural dynamics, where the Heaviside step function was used as the weighted function in each subdomain. The essential boundary conditions can be implemented directly since the shape functions constructed from the moving Kriging interpolation possess the Kronecker δ property. This method does not involve the subdomain integral during generation of the global stiffness matrix except for the boundary integral, so the computational costs are reduced largely. The results of 2 numerical examples show the effectiveness of this method.

Key words: thermal stress; moving Kriging interpolation; meshless local Petrov-Galerkin method; Heaviside step function; sequential coupled-field method

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(51479103); The National Science Fund for Young Scholars of China(51109134); China Postdoctoral Science Foundation(2013T60283)

引用本文/Cite this paper:

王峰, 周宜红, 郑保敬, 林皋. 基于滑动 Kriging 插值的 MLPG 法求解结构非耦合热应力问题[J]. 应用数学和力学, 2016, 37(11): 1217-1227.

WANG Feng, ZHOU Yi-hong, ZHENG Bao-jing, LIN Gao. A meshless local Petrov-Galerkin method based on the moving Kriging interpolation for structural uncoupled thermal stress analysis[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, 37(11): 1217-1227.