文章编号:1000-0887(2019)01-0097-11

一类随机泛函微分方程带随机步长的 EM 逼近的渐近稳定*

马 丽, 马瑞楠

(海南师范大学 数学与统计学院, 海口 571158)

摘要: 研究了一类带有限延迟的随机泛函微分方程的 Euler-Maruyama(EM)逼近,给出了该方程的带随机步长的 EM 算法,得到了随机步长的两个特点:首先,有限个步长求和是停时;其次,可列无限多个步长求和是发散的.最终,由离散形式的非负半鞅收敛定理,得到了在系数满足局部 Lipschitz 条件和单调条件下,带随机步长的 EM 数值解几乎处处收敛到 0.该文拓展了 2017 年毛学荣关于无延迟的随机微分方程带随机步长 EM 数值解的结果.

关 键 词: 随机泛函微分方程; 带随机步长的 EM 逼近; 非负半鞅收敛定理; 几乎处处稳定

中图分类号: O211.62 **文献标志码**: A DOI: 10.21656/1000-0887.390057

引 言

近年来,随机微分方程理论得到了快速发展,该理论被广泛应用于经济、金融、生物、控制、优化等领域.在局部 Lipschitz 和线性增长条件下,随机微分方程存在唯一解,但一般情况下,解无显式表达式.人们通常用数值逼近的方法来给出真实解的一些刻画.在逼近时,要求数值解有一定的稳定性.

许多学者研究了随机微分方程带非随机步长(即步长与 ω 无关)数值解的稳定性.文献[1]给出了 θ- 隐式数值解,并得到了数值解的几乎处处稳定性.文献[2]用经典的 EM 数值解逼近非线性随机延迟微分方程,得到了数值解的几乎处处指数稳定性;在真实解几乎处处稳定的情况下,对漂移项再加一个线性增长的条件,也得到数值解几乎处处稳定.文献[3]研究了随机泛函微分方程,得到了当真实解几乎处处稳定时,经典的 EM 数值解也几乎处处稳定.文献[4]研究了中立随机泛函微分方程的数值解,在局部 Lipschitz 和线性增长条件下,得到了经典的 EM 数值解在均方意义上强收敛到真实解,还得到了收敛的速度.文献[5]研究了在固定时刻延迟的中立随机微分方程的数值解,在多项式增长条件下,得到了经典的 EM 数值解在均方意义上强收敛到真实解且给出了收敛速度.文献[6]研究了在固定时刻延迟的带马氏切换的中立随机微分方程,在真实解稳定于 0 的前提下,得到了经典的 EM 数值解几乎处处稳定于平凡解.文献[7]研究了带 Poisson(泊松)跳的中立延迟随机微分方程,得到了经典的 EM 数值解收

* **收稿日期**: 2018-02-06; **修订日期**: 2018-08-22

基金项目: 国家自然科学基金(11861029);海南省高等学校科学研究项目(重点项目)(Hnky2018ZD-6);海南省自然科学基金(面上项目)(118MS040);海南省自然科学基金(创新研究团队项目)(2018CXTD338)

作者简介: 马丽(1979—),女,副教授,博士,硕士生导师(通讯作者. E-mail: malihnsd@163.com).

敛到真实解.文献[8]研究了中立随机方程,得到了倒项的 EM(BEM)数值解与真实解的几乎处处渐近稳定性.文献[9-13]研究了几类随机微分方程真实解的几乎处处稳定性,为以上不同模型数值解稳定性的证明提供了有用的证明技巧.

当随机微分方程的系数满足全局 Lipschitz 条件时,如果真实解几乎处处稳定,那么经典的显式数值解(比如 EM 数值解)也几乎处处稳定.当系数不满足全局 Lipschitz 条件时,带固定步长的 EM 数值解可能不是几乎处处稳定的(见文献[14]中引理 3.1).隐式数值解可以克服此困难.与显式数值解相比,隐式数值解对步长要求不太严格,而且对很多随机微分方程来说,只要真实解有稳定性,隐式数值解也有稳定性.然而,对非线性方程,隐式数值解在每一步迭代时计算量非常大.

目前提出的带随机步长的 EM 数值方法引起了广泛的关注,文献[15]首次给出了随机微分方程带随机步长 EM 数值解,得到了数值解几乎处处稳定于 0.带随机步长的 EM 数值解在每一步都修正了步长,从而能控制局部误差,使得在计算时可以减少一些迭代,因此减少了计算量.此外,带随机步长的 EM 方法比非随机步长的 EM 方法对漂移项和扩散项的要求条件要弱,不需要全局 Lipschitz 条件,因此应用范围更广.修正每一步步长的技巧已经被广泛用于多阶段方法.

现实生活中,很多系统不可避免地要考虑随机噪声和延迟的影响.状态空间依赖于过去的系统,可以用随机泛函微分方程来描述.本文将研究随机泛函微分方程带随机步长的 EM 数值解,由非负半鞅的收敛定理,得到数值解稳定于平凡解.本文结构如下:第 1 节给出一些数学符号、引理和预备定理;第 2 节介绍带随机步长的 EM 算法;第 3 节给出本文的主要结果即定理 2,首先证明步长选择的合理性,给出停时的证明,得到带随机步长 EM 方法的几乎处处渐近稳定性;第 4 节给出一个例子;第 5 节给出本文的结论.

1 预备知识

令$|\cdot|$表示 R^n 中的欧氏范数.若 $\boldsymbol{A}$ 是一个向量或矩阵, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的转置.$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$ 或 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ 表示$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 在 R^n 上的内积.令 $a\vee b=\max\{a,b\}$ 和 $a\wedge b=\min\{a,b\}$.用$\lceil x\rceil$表示大于 x 的最小整数, $\mathbf{N}$ 代表非负整数集, $\mathbf{Z}$ 代表整数集, $\mathbf{Q}$ 表示有理数集, $\mathbf{R}_+=[0,\infty)$, a.s.表示几乎处处成立,即除了一个零概率集外成立.

$(\Omega,F,\{F_t\},P)$ 是满足一般条件的带流 $\{F_t\}_{t\geqslant 0}$ 的完备概率空间,即 $\{F_t\}_{t\geqslant 0}$ 右连续递增且 F_0 包括所有的 P- 零测集.设 $\tau>0$, $C([-\tau,0],R^n)$ 表示从 $[-\tau,0]$ 到 R^n 上的连续函数族,若 $\boldsymbol{\varphi}\in C([-\tau,0],R^n)$, 定义 $\|\boldsymbol{\varphi}\|=\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}|\boldsymbol{\varphi}(\theta)|$.$C_{F_0}^b([-\tau,0],R^n)$ 表示一族在$[-\tau,0]$ 上连续有界、关于 F_0 可测的 R^n 值的随机过程.$\boldsymbol{\omega}(t)$ 是定义在概率空间上的 m 维 Brown(布朗)运动.

设$f:C([-\tau,0];R^n)\to R^n$, $g:C([-\tau,0];R^n)\to R^{n\times m}$ 都是 Borel-可测泛函,考虑如下定义的随机泛函微分方程:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_t)\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(t),\qquad t\geqslant 0,\tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{x}_t=\{\boldsymbol{x}(t+\theta):-\tau\leqslant\theta\leqslant 0\}$ 为一个 $C([-\tau,0],R^n)$- 值的随机过程.显然,当 $\theta=0$ 时, $\boldsymbol{x}_t(\theta)=\boldsymbol{x}(t+\theta)=\boldsymbol{x}(t)$.式(1)的初始值为 $\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{\xi}\in C_{F_0}^b([-\tau,0];R^n)$.为了保证式(1)的解的存在唯一性,对系数加以下条件.

假设 1(局部 Lipschitz 条件) 对于每个 $k\geqslant 1$, 存在一个正的常数 C_k, 对任意的 $\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}\in$

$C([-\tau,0];R^n)$, 且 $\|\boldsymbol{\varphi}\| \vee \|\boldsymbol{\psi}\| \leqslant k$, 有

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\psi})\|^2 \vee \|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\varphi})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\psi})\|^2 \leqslant C_k\|\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\psi}\|^2. \tag{2}$$

假设 2(单调条件) 对任意的 $\boldsymbol{\varphi} \in C([-\tau,0];R^n)$, 有

$$-z(\boldsymbol{\varphi}) := \langle 2\boldsymbol{\varphi}(0), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi})\rangle + |\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\varphi})|^2 \leqslant 0. \tag{3}$$

易知当假设 1、2 成立时,对任意给定的初始值 $\boldsymbol{x}_i$, 方程(1)存在唯一解.若 $z(\boldsymbol{\varphi})=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{\varphi}\equiv\boldsymbol{0}$ 成立,则 $-z(\boldsymbol{0}):=|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{0})|^2 \leqslant 0$, 从而 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$; 此外,若 $\boldsymbol{\varphi}$ 不恒等于 $\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{\varphi}(0)\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi})=\boldsymbol{0}$, 则 $-z(\boldsymbol{\varphi}):=|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\varphi})|^2 \leqslant 0$, 从而 $z(\boldsymbol{\varphi})=0$, 这与 $z(\boldsymbol{\varphi})=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{\varphi}\equiv\boldsymbol{0}$ 成立矛盾,因此,若 $\boldsymbol{\varphi}$ 不恒等于 $\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{\varphi}(0)\neq\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi})\neq\boldsymbol{0}$.为了保证初值为 $\boldsymbol{0}$ 时,方程(1)存在平凡解,还须假定 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$.

定理 1(见文献[10]的定理2.2) 若假设 1、2 成立,且 $z(\boldsymbol{\varphi})=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{\varphi}\equiv\boldsymbol{0}$, 那么对任意有界的初始值 $\boldsymbol{\xi} \in C([-\tau,0];R^n)$, 有 $\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{0}$, a.s..

在介绍 EM 数值解之前,首先给出以下离散半鞅收敛定理.

引理 1 让 $\{A_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ 和 $\{U_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ 是两列非负的 F_k- 可测的随机序列, $k=0,1,2,\cdots,A_0=U_0=0$, a.s., M_k 是一个实值局部鞅且 $M_0=0$, a.s., ζ 是一个非负 F_0- 可测的随机变量.假设一个非负随机过程 X_k 可分解为如下形式:

$$X_k=\zeta+A_k-U_k+M_k,$$

若 $\lim_{k\to\infty}A_k<\infty$ 几乎处处成立,那么对所有的 $\omega\in\Omega$, 几乎处处地有 $\lim_{k\to\infty}X_k<\infty$, $\lim_{k\to\infty}U_k<\infty$, 即 X_k 和 U_k 几乎处处收敛到有限的随机变量.

2 带随机步长的 EM 数值解

设 $M\in\mathbf{N}, M>\tau$.令 $\Delta=\tau/M\in(0,1)$ 为固定步长, $t_0=0, t_{-1}=-\Delta, t_{-2}=-2\Delta,\cdots,t_{-M}=-M\Delta=-\tau$.定义

$$\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{\xi}(t_k), \qquad -M\leqslant k\leqslant 0, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{y}_0:=\boldsymbol{y}_0(\theta)=\boldsymbol{x}_i+\frac{\theta-t_i}{\Delta}(\boldsymbol{x}_{i+1}-\boldsymbol{x}_i), \qquad t_i\leqslant\theta\leqslant t_{i+1},\ i=-M,-M+1,\cdots,-1,$$

易知

$$\boldsymbol{y}_0(\theta)=\begin{cases}\boldsymbol{x}_{-M}+\dfrac{\theta-t_{-M}}{\Delta}(\boldsymbol{x}_{1-M}-\boldsymbol{x}_{-M}), & t_{-M}\leqslant\theta\leqslant t_{1-M},\\ \boldsymbol{x}_{1-M}+\dfrac{\theta-t_{1-M}}{\Delta}(\boldsymbol{x}_{2-M}-\boldsymbol{x}_{1-M}), & t_{1-M}<\theta\leqslant t_{2-M},\\ \vdots & \\ \boldsymbol{x}_{-1}+\dfrac{\theta-t_{-1}}{\Delta}(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}_{-1}), & t_{-1}<\theta\leqslant t_0.\end{cases}$$

若 $\|\boldsymbol{y}_0\|\neq 0$, 则取

$$\Delta t_0=2^{-n_0},\ n_0=\left\lceil 1-\log_2\left(\frac{z(\boldsymbol{y}_0)}{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_0)|^2}\right)\right\rceil;$$

若 $\|\boldsymbol{y}_0\|=0$, 则取 $\Delta t_0=2^{-2}$.对任意的 $k=-M,-M+1,\cdots,-1,0,\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{\xi}(t_k)$ 关于 F_0 可测,由 $\boldsymbol{y}_0$ 的表达式可知, $\boldsymbol{y}_0$ 关于 F_0 可测,从而 Δt_0 关于 F_0 可测,又 $t_0=0$, 令 $t_1=t_0+\Delta t_0$, 则 t_1 关于 F_{t_0} 可测.定义

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_0)\Delta t_0 + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_0)(\boldsymbol{\omega}_{t_1} - \boldsymbol{\omega}_{t_0}),$$

$$\boldsymbol{y}_1 := \boldsymbol{y}_1(\theta) = \boldsymbol{x}_{1+i} + \frac{\theta - t_i}{\Delta}(\boldsymbol{x}_{i+2} - \boldsymbol{x}_{1+i}), \qquad t_i \leqslant \theta \leqslant t_{i+1},\ i = -M, -M+1, \cdots, -1,$$

易知

$$\boldsymbol{y}_1(\theta) = \begin{cases} \boldsymbol{x}_{1-M} + \dfrac{\theta - t_{-M}}{\Delta}(\boldsymbol{x}_{2-M} - \boldsymbol{x}_{1-M}), & t_{-M} \leqslant \theta \leqslant t_{1-M}, \\ \boldsymbol{x}_{2-M} + \dfrac{\theta - t_{1-M}}{\Delta}(\boldsymbol{x}_{3-M} - \boldsymbol{x}_{2-M}), & t_{1-M} < \theta \leqslant t_{2-M}, \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_0 + \dfrac{\theta - t_{-1}}{\Delta}(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0), & t_{-1} < \theta \leqslant t_0. \end{cases}$$

若 $\|\boldsymbol{y}_1\| \neq 0$, 则取

$$\Delta t_1 = 2^{-n_1},\ n_1 = \left\lceil 1 - \log_2\left(\frac{z(\boldsymbol{y}_1)}{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_1)|^2}\right)\right\rceil;$$

若 $\|\boldsymbol{y}_1\| = 0$, 则取 $\Delta t_1 = 2^{-2}$. $t_2 = t_1 + \Delta t_1$, 由于 $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_0)\Delta t_0$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_0)\boldsymbol{\omega}_{t_0}$ 关于 F_0 可测, $\boldsymbol{\omega}_{t_1}$ 关于 F_{t_1} 可测,故 $\boldsymbol{x}_1$ 关于 F_{t_1} 可测.又 $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_{-1}, \cdots, \boldsymbol{x}_{1-M}$ 关于 F_0 可测,从而 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0, \cdots, \boldsymbol{x}_{1-M}$ 关于 F_{t_1} 可测.因此,由 $\boldsymbol{y}_1$ 的表达式可知, $\boldsymbol{y}_1$ 关于 F_{t_1} 可测,从而 Δt_1 关于 F_{t_1} 可测.令 $t_2 = t_1 + \Delta t_1$, 定义

$$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_1)\Delta t_1 + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_1)(\boldsymbol{\omega}_{t_2} - \boldsymbol{\omega}_{t_1}).$$

一般地,当 $k \geqslant 0$ 时,定义

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_k)\Delta t_k + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_k)\Delta\boldsymbol{\omega}_{t_k}, \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{y}_k$ 是用线性插值定义的随机过程:

$$\boldsymbol{y}_k := \boldsymbol{y}_k(\theta) = \boldsymbol{x}_{k+i} + \frac{\theta - t_i}{\Delta}(\boldsymbol{x}_{k+i+1} - \boldsymbol{x}_{k+i}), \tag{6}$$

$t_i \leqslant \theta \leqslant t_{i+1}$, $i = -M, -M+1, \cdots, -1$. $\Delta\boldsymbol{\omega}_{t_k} = \boldsymbol{\omega}_{t_{k+1}} - \boldsymbol{\omega}_{t_k}$ 是 Brown 运动在 $[t_k, t_{k+1}]$ 上的增量.若 $\|\boldsymbol{y}_k\| \neq 0$, 则取

$$\Delta t_k = 2^{-n_k},\ n_k = \left\lceil 1 - \log_2\left(\frac{z(\boldsymbol{y}_k)}{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_k)|^2}\right)\right\rceil;$$

若 $\|\boldsymbol{y}_k\| = 0$, 则取 $\Delta t_k = 2^{-2}$. Δt_k 依赖于 $\boldsymbol{y}_k$, $\boldsymbol{y}_k$ 依赖于 $\boldsymbol{x}_{k+i+1}$, $i = -M, -M+1, \cdots, -1$, 类似于前面的推导可知 $\boldsymbol{x}_{k+i+1}$ 关于 $F_{t_{k+i+1}}$ 可测,从而关于 F_{t_k} 可测,故 $\boldsymbol{y}_k$ 关于 F_{t_k} 可测,从而随机步长 Δt_k 关于 F_{t_k} 可测.称由式(4)和(5)定义的 $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=-M}^{\infty}$ 为带随机步长的 EM 数值解.令 $t_{k+1} = \sum_{i=0}^{k}\Delta t_i + t_0$.

3 主要定理

首先强调两个关于随机步长的重要性质.第一,有限个步长求和是停时,停时主要用于定理 2 中局部鞅的证明;第二,可列无限多个步长求和是发散的,发散可以保证时间趋于无穷.本文主要结果如下.

定理 2 在假设 1、2 成立条件下,若 $z(\boldsymbol{\varphi}) = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{\varphi} \equiv \boldsymbol{0}$, 且

$$\liminf_{\|\boldsymbol{\varphi}\| \to 0} \frac{z(\boldsymbol{\varphi})}{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi})|^2} > 0 \tag{7}$$

成立,则 $t_k=\sum_{i=0}^{k-1}\Delta t_i$ 是 $\{F_t\}$ 停时, $\sum_{i=0}^{\infty}\Delta t_i=\infty$, a.s.,且对任意有界的初值 $\boldsymbol{\xi}\in C([-\tau,0];R^n)$ 有

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{0},\qquad \text{a.s.}.$$

证明 由式(5)可得

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{x}_{k+1}|^2=&\langle\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_k)\Delta t_k+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_k)\Delta\boldsymbol{\omega}_k,\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_k)\Delta t_k+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_k)\Delta\boldsymbol{\omega}_k\rangle=\\&|\boldsymbol{x}_k|^2+2\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_k)\Delta t_k+|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_k)\Delta t_k|^2+|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_k)\Delta\boldsymbol{\omega}_k|^2+\\&2\langle\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_k)\Delta t_k,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_k)\Delta\boldsymbol{\omega}_k\rangle=\\&|\boldsymbol{x}_k|^2+\Delta t_k[2\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_k)+|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_k)|^2\Delta t_k+|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_k)|^2]+\Delta m_k,\end{aligned}\tag{8}$$

这里 $\Delta m_k=2\langle\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_k)\Delta t_k,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_k)\Delta\boldsymbol{\omega}_k\rangle+|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_k)|^2(|\Delta\boldsymbol{\omega}_k|^2-\Delta t_k)$.

下面分 3 步证明该定理,第一步证明随机步长选择的合理性以及 t_k 是 $\{F_t\}$ 停时.第二步证明对任意的 k, $m_k=\sum_{i=0}^{k}\Delta m_i$ 是局部鞅.第三步给出随机步长序列的发散性,从而得到 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 几乎处处稳定于平凡解.

步骤 1 由式(3)可知,在每一步都可以选择充分小的有理步长 Δt_k, 使其满足

$$-U(\boldsymbol{y}_k,\Delta t_k):=-z(\boldsymbol{y}_k)+|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_k)|^2\Delta t_k\leqslant 0.\tag{9}$$

事实上,当 $\|\boldsymbol{y}_k\|\neq 0$ 时,选择 $\Delta t_k=2^{-n_k}$, $n_k=\lceil 1-\log_2(z(\boldsymbol{y}_k)/|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_k)|^2)\rceil$, 注意到 $n_k>1-\log_2(z(\boldsymbol{y}_k)/|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_k)|^2)$, 因此 $\Delta t_k=2^{-n_k}\leqslant(1/2)(z(\boldsymbol{y}_k)/|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_k)|^2)$, 由单调条件知 $-U(\boldsymbol{y}_k,\Delta t_k)\leqslant-(1/2)z(\boldsymbol{y}_k)\leqslant 0$, 从而式(9)成立;当 $\|\boldsymbol{y}_k\|=0$ 时, $\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{0}$, 由条件知 $z(\boldsymbol{y}_k)=z(\boldsymbol{0})=0$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_k)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$, $\Delta t_k=2^{-2}$, 因此, $-U(\boldsymbol{y}_k,\Delta t_k)=0$, 从而式(9)成立.

下面由归纳法证 t_k 是 $\{F_t\}$ 停时.当 $k=0$ 时, $t_k=t_0=0$, 结论显然成立.假设 t_k 关于 $\{F_t\}$ 为停时,即对任意 $t\geqslant 0$, 有 $\{t_k\leqslant t\}\in F_t$, 对任意 $s\in\mathbf{Z}$, $j\in\mathbf{N}$, $2^sj\in[0,t]$, 有 $\{t_k\leqslant 2^sj\}\in F_{2^sj}\subseteq F_t$, 由第 2 节的分析知 Δt_k 关于 F_{t_k} 可测,从而 $\{\Delta t_k\leqslant t-2^sj\}\in F_{t_k}\subseteq F$, 因此有 $\{t_k\leqslant 2^sj\}\cap\{\Delta t_k\leqslant t-2^sj\}\in F_t$.因为 $\mathbf{Z},\mathbf{N}$ 是可数集,所以有对任意的 $t\geqslant 0$,

$$\{t_{k+1}\leqslant t\}=\{t_k+\Delta t_k\leqslant t\}=\bigcup_{\{0\leqslant 2^sj\leqslant t,s\in\mathbf{Z},\,j\in\mathbf{N}\}}(\{t_k\leqslant 2^sj\}\cap\{\Delta t_k\leqslant t-2^sj\})\in F_t,$$

即 t_{k+1} 是 $\{F_t\}$ 停时.由数学归纳法可得对任意 $k\geqslant 0$, t_k 是 $\{F_t\}$ 停时.

将式(9)代入式(8),有

$$|\boldsymbol{x}_{k+1}|^2-|\boldsymbol{x}_k|^2=-U(\boldsymbol{y}_k,\Delta t_k)\Delta t_k+\Delta m_k,$$

对 k 求和,

$$|\boldsymbol{x}_{k+1}|^2=|\boldsymbol{\xi}(0)|^2-\sum_{i=0}^{k}U(\boldsymbol{y}_i,\Delta t_i)\Delta t_i+m_k,\tag{10}$$

这里 $m_k=\sum_{i=0}^{k}\Delta m_i$.

步骤 2 注意到 $\boldsymbol{y}_k$, Δt_k 关于 F_{t_k} 可测, $\Delta\boldsymbol{\omega}_{t_k}$ 关于 $F_{t_{k+1}}$ 可测, 由式(5)知, $\boldsymbol{x}_{k+1}$ 关于 $F_{t_{k+1}}$ 可测.定义一个新的流 $\{G_k\}$, $G_k=F_{t_{k+1}}$, $k=-1,0,1,\cdots$, 则 $\boldsymbol{x}_{k+1}$ 关于 G_k 可测,由式(10)可知 m_k 关于 G_k 可测.

下面证明 $\{m_k\}_{k\geqslant 0}$ 是关于流 $\{G_k\}$ 的局部鞅.注意到 $\boldsymbol{\xi}$ 有界,不妨令 $R>0$, $|\boldsymbol{\xi}|\leqslant R$, 定义停时

$$\rho_R=\inf\{k\geqslant 0,|\boldsymbol{x}_k|>R\},$$

由 $\boldsymbol{x}_k$ 关于 F_{t_k} 可测知, ρ_R 为 $\{F_{t_k}\}$ 的停时,因此, ρ_R 是 $\{G_{k-1}\}$ 的停时,即 $\{\rho_R \leqslant k\} \in G_{k-1}$. 由 ρ_R 的定义知,对所有的 $k \geqslant 0$, 有 $|\boldsymbol{x}_{k\wedge\rho_R}| \leqslant R$, a.s..

首先,证明对任意 $t \geqslant 0$, $t_{k\wedge\rho_R}$ 和 $t_{(k+1)\wedge\rho_R}$ 都是 $\{F_t\}$ 停时.对 $t_{k\wedge\rho_R}$ 有

$$\{t_{k\wedge\rho_R} \leqslant t\} = (\{t_k \leqslant t\} \cap \{\rho_R \geqslant k\}) \cup (\{t_{\rho_R} \leqslant t\} \cap \{\rho_R < k\}),$$

其中 $\{\rho_R \geqslant k\} = \{\rho_R \leqslant k-1\}^c \in G_{k-2} \subseteq G_{k-1} = F_{t_k}$.由 F_{t_k} 的定义可得 $\{t_k \leqslant t\} \cap \{\rho_R \geqslant k\} \in F_t$, 又 $\{t_{\rho_R} \leqslant t\} \cap \{\rho_R < k\} = \cup_{j=0}^{k-1}(\{t_j \leqslant t\} \cap \{\rho_R = j\})$, 注意到对 $j = 0,1,\cdots,k-1$, $\{\rho_R = j\} = \{\rho_R \leqslant j\} - \{\rho_R \leqslant j-1\} \in G_{j-1} = F_{t_j}$.由 F_{t_j} 的定义可知, $\{t_j \leqslant t\} \cap \{\rho_R = j\} \in F_t$, 所以 $\{t_{\rho_R} \leqslant t\} \cap \{\rho_R < k\} \in F_t$, 因此 $\{t_{k\wedge\rho_R} \leqslant t\} \in F_t$.同理可得 $t_{(k+1)\wedge\rho_R}$ 是 $\{F_t\}$ 停时.

对任意的 $k \geqslant \rho_R$, 有 $|\boldsymbol{x}_{k\wedge\rho_R}| = |\boldsymbol{x}_{\rho_R}|$. 定义带停时的 Brown 运动的增量 $\Delta\boldsymbol{\omega}_{k\wedge\rho_R} = \boldsymbol{\omega}(t_{(k+1)\wedge\rho_R}) - \boldsymbol{\omega}(t_{k\wedge\rho_R})$, 以及带停时的时间步长 $\Delta t_{k\wedge\rho_R} = t_{(k+1)\wedge\rho_R} - t_{k\wedge\rho_R}$, 由 $R \to \infty$ 时, $\rho_R \to \infty$, a.s.,可得到 $\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_k)\Delta t_k + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_k)\Delta\boldsymbol{\omega}_{t_k}$.因此,这样的定义是有效的.此外,

$$m_{k\wedge\rho_R} = \sum_{i=0}^{k\wedge\rho_R} \Delta m_i = \sum_{i=0}^{k} \Delta m_{i\wedge\rho_R}$$

和

$$m_{k\wedge\rho_R} = m_{(k-1)\wedge\rho_R} + \Delta m_{k\wedge\rho_R}.$$

注意到,当 $t_i \leqslant \theta < t_{i+1}$, $i = -M,\cdots,-1$ 时,有

$$|\boldsymbol{y}_{i\wedge\rho_R}(\theta)| = \left|\boldsymbol{x}_{(k+i)\wedge\rho_R} + \frac{\theta - t_i}{\Delta}(\boldsymbol{x}_{(k+i+1)\wedge\rho_R} - \boldsymbol{x}_{(k+i)\wedge\rho_R})\right| \leqslant$$
$$\frac{\Delta - (\theta - t_i)}{\Delta}|\boldsymbol{x}_{(k+i)\wedge\rho_R}| + \frac{\theta - t_i}{\Delta}|\boldsymbol{x}_{(k+i+1)\wedge\rho_R}|.$$

由 ρ_R 的定义可知 $\|\boldsymbol{y}_{i\wedge\rho_R}\| \leqslant R$.故由假设 1 及基本不等式可得

$$|m_{k\wedge\rho_R}| = \left|\sum_{i=0}^{k\wedge\rho_R}\Delta m_i\right| \leqslant$$
$$\sum_{i=0}^{k}|\Delta m_{i\wedge\rho_R}| \leqslant$$
$$\sum_{i=0}^{k}[2|\boldsymbol{x}_{i\wedge\rho_R}| \cdot \|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_{i\wedge\rho_R})\| \cdot |\Delta\boldsymbol{\omega}_{i\wedge\rho_R}| +$$
$$2\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_{i\wedge\rho_R})\| \cdot \|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_{i\wedge\rho_R})\| \cdot |\Delta t_{i\wedge\rho_R}| \cdot |\Delta\boldsymbol{\omega}_{i\wedge\rho_R}| +$$
$$\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_{i\wedge\rho_R})\|^2 \cdot (|\Delta\boldsymbol{\omega}_{i\wedge\rho_R}|^2 + \Delta t_{i\wedge\rho_R})] \leqslant$$
$$\sum_{i=0}^{k}(2RC_R|\Delta\boldsymbol{\omega}_{i\wedge\rho_R}| + 2C_R^2|\Delta\boldsymbol{\omega}_{i\wedge\rho_R}|^2 + C_R^2\Delta t_{i\wedge\rho_R}^2 + C_R^2\Delta t_{i\wedge\rho_R}),$$

因此

$$E|m_{k\wedge\rho_R}| \leqslant \sum_{i=0}^{k}(2RC_RE|\Delta\boldsymbol{\omega}_{i\wedge\rho_R}| + 2C_R^2E|\Delta\boldsymbol{\omega}_{i\wedge\rho_R}|^2 +$$
$$C_R^2E\Delta t_{i\wedge\rho_R}^2 + C_R^2E\Delta t_{i\wedge\rho_R}) < \infty.$$

同时

$$E(m_{k\wedge\rho_R} \mid G_{k-1}) = E(m_{(k-1)\wedge\rho_R} + \Delta m_{k\wedge\rho_R} \mid G_{k-1}) =$$

$$m_{(k-1)\wedge\rho_R} + E(\Delta m_{k\wedge\rho_R} \mid G_{k-1}). \tag{11}$$

因为 $\{\rho_R > k\} = \{\rho_R \leqslant k\}^c \in G_{k-1}$，$\Delta\boldsymbol{\omega}_k$ 关于 F_{t_k} 独立，故关于 G_{k-1} 独立，

$$\begin{aligned}
&E(\Delta\boldsymbol{\omega}_{k\wedge\rho_R} \mid G_{k-1}) = \\
&\quad E[(\boldsymbol{\omega}(t_{k+1}) - \boldsymbol{\omega}(t_k))1_{\{\rho_R>k\}} \mid G_{k-1}] + \\
&\quad E[(\boldsymbol{\omega}(t_{\rho_R}) - \boldsymbol{\omega}(t_{\rho_R}))1_{\{\rho_R\leqslant k\}} \mid G_{k-1}] = \\
&\quad 1_{\{\rho_R>k\}} E[\boldsymbol{\omega}(t_{k+1}) - \boldsymbol{\omega}(t_k)] = 0,
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
&E(|\Delta\boldsymbol{\omega}_{k\wedge\rho_R}|^2 \mid G_{k-1}) = \\
&\quad E[|\boldsymbol{\omega}(t_{k+1}) - \boldsymbol{\omega}(t_k)|^2 1_{\{\rho_R>k\}} \mid G_{k-1}] + \\
&\quad E[|\boldsymbol{\omega}(t_{\rho_R}) - \boldsymbol{\omega}(t_{\rho_R})| 1_{\{\rho_R\leqslant k\}} \mid G_{k-1}] = \\
&\quad 1_{\{\rho_R>k\}} E|\boldsymbol{\omega}(t_{k+1}) - \boldsymbol{\omega}(t_k)|^2 = \\
&\quad 1_{\{\rho_R>k\}} (t_{k+1} - t_k).
\end{aligned} \tag{13}$$

由 Δt_{k+1} 关于 $F_{k+1} = G_k$ 可测及 ρ_R 为 G_{k-1} 停时，可得

$$\begin{aligned}
&E(\Delta t_{k\wedge\rho_R} \mid G_{k-1}) = E[1_{\{\rho_R>k\}}(t_{k+1} - t_k) + 1_{\{\rho_R\leqslant k\}}(t_{\rho_R} - t_{\rho_R}) \mid G_{k-1}] = \\
&\quad 1_{\{\rho_R>k\}}(t_{k+1} - t_k).
\end{aligned} \tag{14}$$

因此，结合式(12)~(14)可得

$$\begin{aligned}
&E(\Delta m_{k\wedge\rho_R} \mid G_{k-1}) = \\
&\quad E[2\langle \boldsymbol{x}_{k\wedge\rho_R}, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_{k\wedge\rho_R})\Delta\boldsymbol{\omega}_{k\wedge\rho_R}\rangle + 2\langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_{k\wedge\rho_R})\Delta t_{k\wedge\rho_R}, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_{k\wedge\rho_R})\Delta\boldsymbol{\omega}_{k\wedge\rho_R}\rangle + \\
&\quad |\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_{k\wedge\rho_R})|^2(|\Delta\boldsymbol{\omega}_{k\wedge\rho_R}|^2 - \Delta t_{k\wedge\rho_R}) \mid G_{k-1}] = \\
&\quad 2\langle \boldsymbol{x}_{k\wedge\rho_R}, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_{k\wedge\rho_R})\rangle E(\Delta\boldsymbol{\omega}_{k\wedge\rho_R} \mid G_{k-1}) + \\
&\quad 2\langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_{k\wedge\rho_R}), \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_{k\wedge\rho_R})\rangle \Delta t_{k\wedge\rho_R} E(\Delta\boldsymbol{\omega}_{k\wedge\rho_R} \mid G_{k-1}) + \\
&\quad |\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_{k\wedge\rho_R})|^2[E(|\Delta\boldsymbol{\omega}_{k\wedge\rho_R}|^2 \mid G_{k-1}) - E(\Delta t_{k\wedge\rho_R} \mid G_{k-1})] = 0.
\end{aligned}$$

代入式(11)，有

$$E(m_{k\wedge\rho_R} \mid G_{k-1}) = m_{(k-1)\wedge\rho_R},$$

从而得到 $\{m_{k\wedge\rho_R}\}_{k\geqslant 0}$ 是关于 $\{G_k\}$ 的鞅，当 $R\to\infty$ 时，有 $\rho_R\to\infty$. 所以 $\{m_k\}_{k\geqslant 0}$ 是关于 $\{G_k\}$ 的局部鞅.

步骤 3　由式(10)及引理 1 可得

$$\lim_{k\to\infty} |\boldsymbol{x}_k|^2 < \infty, \quad \text{a.s.} \tag{15}$$

和

$$\sum_{i=0}^{\infty} U(\boldsymbol{y}_i, \Delta t_i)\Delta t_i < \infty, \quad \text{a.s.}. \tag{16}$$

由式(16)可得 $\lim_{i\to\infty} U(\boldsymbol{y}_i, \Delta t_i)\Delta t_i = 0$, a.s.. 下面证明当 $i\to\infty$ 时，随机步长 Δt_i 不会趋于 0，即 $\liminf_{i\to\infty} \Delta t_i > 0$, a.s..

由式(15)知，对所有 $\omega \in \Omega$, 存在 $C(\omega) \in \mathbf{R}_+$, 满足 $\lim_{k\to\infty} |\boldsymbol{x}_k(\omega)| = C(\omega)$. 固定 ω, 记 $C(\omega) = C$. 由式(6)知，对任意的 $\theta \in [-\tau, 0]$ 有 $\lim_{k\to\infty} |\boldsymbol{y}_k(\theta)| = C$. 以下分两种情形讨论：

1) 当 $C \neq 0$ 时，对任意的 $\theta \in [-\tau, 0]$ 存在一个充分大的整数 i_1^*, 使得对所有的 $k > i_1^*$, $0.5C < |\boldsymbol{y}_k(\theta)| < 1.5C$. 因为 $z(\boldsymbol{\varphi}) = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{\varphi}(0) = \mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{\varphi} \equiv \mathbf{0}$, 又若 $\boldsymbol{\varphi} \neq \mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}) \neq \mathbf{0}$, 所以在这两个区间上 $z(\boldsymbol{y}_k) \neq 0$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_k) \neq \mathbf{0}$. 再由 $z(\boldsymbol{y}_k)$ 和 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_k)$ 的连续性可得

$$\min_{0.5C<y_k(\theta)<1.5C}\frac{z(\boldsymbol{y}_k)}{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_k)|^2}=\eta>0,$$

所以对任意的 $k>i_1^*$，

$$\frac{z(\boldsymbol{y}_k)}{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_k)|^2}\geqslant\eta>0,$$

即

$$1-\log_2\left(\frac{z(\boldsymbol{y}_k)}{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_k)|^2}\right)\leqslant 1-\log_2(\eta).$$

由步长的选择可得

$$n_k=\left\lceil 1-\log_2\left(\frac{z(\boldsymbol{y}_k)}{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_k)|^2}\right)\right\rceil\leqslant\lceil 1-\log_2(\eta)\rceil.$$

因此，

$$\Delta t_k=2^{-n_k}\geqslant 2^{-\lceil 1-\log_2(\eta)\rceil}>0.$$

综上，存在 i_1^* 充分大，使得对所有的 $k>i_1^*$，有 $\Delta t_k>0$，即 Δt_k 永远不会趋于0.

2）当 $C=0$ 时，设式(7)的极限是 $D,D>0$.存在一个常数 $\delta=\delta(D)>0$ 使得对所有的 $\|\boldsymbol{\varphi}\|\in(0,\delta)$，有 $|z(\boldsymbol{\varphi})/|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi})|^2-D|<0.5D$.注意到，对任意的 $\theta\in[-\tau,0]$ 有

$$\lim_{k\to\infty}|\boldsymbol{y}_k(\theta)|=C=0,$$

从而可以找到一个充分大的整数 i_2^*，使得对任意的 $i>i_2^*$，有

$$\left|\frac{z(\boldsymbol{y}_i)}{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_i)|^2}-D\right|<0.5D,$$

即

$$1-\log_2(1.5D)<1-\log_2\left(\frac{z(\boldsymbol{y}_i)}{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_i)|^2}\right)<1-\log_2(0.5D).$$

由 $n_i=\left\lceil 1-\log_2\left(\frac{z(\boldsymbol{y}_i)}{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_i)|^2}\right)\right\rceil<1-\log_2\left(\frac{z(\boldsymbol{y}_i)}{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_i)|^2}\right)+1<2-\log_2(0.5D)$ 知

$$\Delta t_i=2^{-n_i}>2^{\log_2(0.5D)-2}=\frac{0.5D}{4}>0.$$

因此当 $i\to\infty$，Δt_i 永远不会趋于0.

综上可得 $\sum_{i=0}^{\infty}\Delta t_i=\infty$，a.s.和 $\lim_{k\to\infty}U(\boldsymbol{y}_k,\Delta t_k)=0$，a.s..

对充分大的 k，若 $\|\boldsymbol{y}_k\|\neq 0$，则由步长 Δt_k 的定义可知 $\Delta t_k\leqslant z(\boldsymbol{y}_k)/(2|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_k)|^2)$，故由假设2知

$$U(\boldsymbol{y}_k,\Delta t_k)=z(\boldsymbol{y}_k)-|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_k)|^2\Delta t_k\geqslant 0.5z(\boldsymbol{y}_k)\geqslant 0,$$

所以 $\lim_{k\to\infty}z(\boldsymbol{y}_k)=0$，a.s..由于 $z(\boldsymbol{\varphi})=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{\varphi}\equiv\boldsymbol{0}$，注意到 z 连续，因此，$\boldsymbol{y}_k(0)=\boldsymbol{0}$ 或者 $\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{0}$，a.s..当 $\boldsymbol{y}_k(0)=\boldsymbol{0}$ 时，由 $t_0=0$ 及表达式

$$\boldsymbol{y}_k:=\boldsymbol{y}_k(\theta)=\boldsymbol{x}_{k+i}+\frac{\theta-t_i}{\Delta}(\boldsymbol{x}_{k+i+1}-\boldsymbol{x}_{k+i}),$$

$$t_i\leqslant\theta\leqslant t_{i+1},\ i=-M,-M+1,\cdots,-1$$

可知，$\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{0}$，从而 $\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{0}$. 当 $\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{0}$，a.s.时，在上述表达式中取 $\theta=t_i$ 可得

$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_{k+i}=\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{y}_k(t_i)=\boldsymbol{0}$, a.s..所以 $\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{0}$, a.s..

若对充分大的 k, $\|\boldsymbol{y}_k\|=0$, 则显然有 $\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{0}$, a.s..证明完成. □

随机步长的选择不是唯一的,例如,对任意有理数 $\alpha\in(0,1)$, 可以令步长 Δt_k 为 $\Delta t_k=\alpha(z(\boldsymbol{y}_k)/|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_k)|^2)$, 同样可以证明结论成立,因此有以下定理.

定理 3 在假设 1、2 成立的条件下, 若 $z(\boldsymbol{\varphi})=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{\varphi}\equiv\boldsymbol{0}$, z 满足式(7).设有理数 $\alpha\in(0,1)$.若 $\|\boldsymbol{y}_k\|\neq 0$, 取 $\Delta t_k=\alpha(z(\boldsymbol{y}_k)/|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_k)|^2)$;若 $\|\boldsymbol{y}_k\|=0$ 时,取 Δt_k 为任意有理数.则 $t_k=\sum_{i=0}^{k-1}\Delta t_i$ 是 $\{F_t\}$ 停时, $\sum_{i=0}^{\infty}\Delta t_i=\infty$, a.s.,且对任意有界的初值 $\boldsymbol{\xi}\in C([-\tau,0],R^n)$ 有

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{0},\qquad \text{a.s..}$$

4 例 子

考虑如下的一维随机泛函微分方程:

$$\mathrm{d}x(t)=\left[-x^3(t)-\frac{x(t)}{\tau^2}\left(\int_{-\tau}^{0}|x(t+s)|^2\mathrm{d}s\right)^2\right]\mathrm{d}t+\left(\frac{x(t)}{\tau}\int_{-\tau}^{0}|x(t+s)|^2\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\omega(t).$$

由

$$f(\phi)=-\phi^3(0)-\frac{\phi(0)}{\tau^2}\left(\int_{-\tau}^{0}|\phi(s)|^2\mathrm{d}s\right)^2,\ g(\phi)=\frac{\phi(0)}{\tau}\int_{-\tau}^{0}|\phi(s)|^2\mathrm{d}s$$

易知,$f(0)=0$, f,g 连续,从而满足局部 Lipschitz 条件,但不满足全局的 Lipschitz 条件.

$$-z(\phi):=\left\langle 2\phi(0),-\phi^3(0)-\frac{\phi(0)}{\tau^2}\left(\int_{-\tau}^{0}|\phi(s)|^2\mathrm{d}s\right)^2\right\rangle+\left|\frac{\phi(0)}{\tau}\int_{-\tau}^{0}|\phi(s)|^2\mathrm{d}s\right|^2=$$

$$-2\phi^4(0)-\frac{\phi^2(0)}{\tau^2}\left(\int_{-\tau}^{0}|\phi(s)|^2\mathrm{d}s\right)^2\leqslant 0,$$

$$z(\phi)=2\phi^4(0)+\frac{\phi^2(0)}{\tau^2}\left(\int_{-\tau}^{0}|\phi(s)|^2\mathrm{d}s\right)^2=\phi^2(0)\left[2\phi^2(0)+\frac{\left(\int_{-\tau}^{0}|\phi(s)|^2\mathrm{d}s\right)^2}{\tau^2}\right],$$

$z(\phi)=0$ 当且仅当 $\phi(0)=0$ 或 $\phi\equiv 0$.此外,

$$\liminf_{\|\phi\|\to 0}\frac{z(\phi)}{|f(\phi)|^2}=\liminf_{\|\phi\|\to 0}\frac{2\phi^2(0)+\dfrac{\left(\int_{-\tau}^{0}|\phi(s)|^2\mathrm{d}s\right)^2}{\tau^2}}{\phi^2(0)+\dfrac{\left(\int_{-\tau}^{0}|\phi(s)|^2\mathrm{d}s\right)^2}{\tau^2}}=2>0.$$

在每一步,选择步长为 $\Delta t_k=0.5z(y_k)/|f(y_k)|^2$, 由定理 2 可得带随机步长的 EM 数值解几乎处处渐进稳定.

5 结 论

本文研究了带有限延迟的随机泛函微分方程

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_t)\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(t).$$

首次给出了该方程的带随机步长的 EM 算法,得到了随机步长的两个特点:有限个步长求和是停时;可列无限多个步长求和是发散的.最终由离散形式的非负半鞅收敛定理,得到了在系数满足局部 Lipschitz 条件和单调条件下,带随机步长的 EM 数值解几乎处处收敛到 0.Liu 和 Mao (毛学荣)在文献[15]中研究了随机微分方程带随机步长的 EM 数值解,在一定条件下,得到了数值解几乎处处收敛到 0.本文的模型比文献[15]中的模型更一般,因此拓展了文献[15]的结果.

参考文献(References):

[1] RODKINA A, SCHURZ H. Almost sure asymptotic stability of drift-implicit θ-methods for bilinear ordinary stochastic differential equations in R^1[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2005, **180**(1): 13-31.

[2] WU F, MAO X R, SZPRUCH L. Almost sure exponential stability of numerical solutions for stochastic delay differential equations[J]. *Numerische Mathematik*, 2010, **115**(4): 681-697.

[3] WU F, MAO X R, KLOEDEN P E. Almost sure exponential stability of the Euler-Maruyama approximations for stochastic functional differential equations[J]. *Random Operators and Stochastic Equations*, 2011, **19**(2): 165-186.

[4] WU F, MAO X R. Numerical solutions of neutral stochastic functional differential equations [J]. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2008, **46**(4): 1821-1841.

[5] JI Y T, BAO J H, YUAN C G. Convergence rate of Euler-Maruyama scheme for SDDEs of neutral type[J/OL]. [2018-02-06]. https://arxiv.org/abs/1511.07703v2.

[6] MAO X R, SHEN Y, YUAN C G. Almost surely asymptotic stability of neutral stochastic dely differential equations with Markovian switching[J]. *Stochastic Processes and Their Applications*, 2008, **118**: 1385-1406.

[7] TIAN J G, WANG H L, GUO Y F, et al. Numerical solutions to neutral stochastic delay differential equations with Poisson jumps under local Lipschitz condition[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, **2014**: 976183.

[8] YU Z H. Almost surely asymptotic stability of exact and numerical solutions for neutral stochastic pantograph equations[J]. *Abstract and Applied Analysis*, 2011, **2011**: 143079.

[9] MAO X R. *Stochastic Differential Equation and Application*[M]. Chichester: Horwood Publising, 2007.

[10] MAO X R. LaSalle-type theorems for stochastic differential delay equations[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1999, **236**(2): 350-369.

[11] MAO X R. A note on the LaSalle-type theorems for stochastic differential delay equations[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2002, **268**(1): 125-142.

[12] MAO X R. The LaSalle-type theorems for stochastic functional differential equations[J]. *Nonlinear Studies*, 2000, **7**(2): 307-328.

[13] MAO X R. Stochastic versions of the LaSalle-type theorems[J]. *Journal of Differential Equations*, 1999, **153**: 175-195.

[14] HIGHAM D J, MAO X R, YUAN C G. Almost sure and moment exponential stability in the nu-

merical simulation of stochastic differential equations[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2007, **45**(2): 592-609.

[15] LIU W, MAO X R. Almost sure stability of the Euler-Maruyama method with random variable stepsize for stochastic differential equations[J]. *Numerical Algorithms*, 2017, **74**(2): 573-592.

Almost Sure Asymptotic Stability of the Euler-Maruyama Method With Random Variable Stepsizes for Stochastic Functional Differential Equations

MA Li, MA Ruinan

(*School of Mathematics and Statistics*, *Hainan Normal University*, *Haikou* 571158, *P.R.China*)

Abstract: The Euler-Maruyama (EM) approximation to a class of stochastic functional differential equations was studied. First, a numerical approximation with the EM method with random variable stepsizes was defined, then two characteristics of the random variable stepsizes were got: the summation of finite stepsizes is a stopping time and the summation of countably infinite stepsizes diverges. Finally, with the theory of non-negative semi-martingale convergence in discrete time, it was proved that the numerical approximation converges to zero almost surely if the coefficients satisfy the local Lipschitz condition and the monotonic condition. The results generalize the corresponding results of MAO Xuerong in a previous literature, where the EM approximation to a class of stochastic differential equations was studied and the numerical solution was proved to converge to zero almost surely.

Key words: stochastic functional differential equations; Euler-Maruyama method with random variable stepsizes; nonnegative semi-martingale convergence theorem; almost sure stability

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11861029)

引用本文/Cite this paper:

马丽, 马瑞楠. 一类随机泛函微分方程带随机步长的 EM 逼近的渐近稳定[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(1): 97-107.

MA Li, MA Ruinan. Almost sure asymptotic stability of the Euler-Maruyama method with random variable stepsizes for stochastic functional differential equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(1): 97-107.