

基于非局部理论的黏弹性纳米杆 轴向振动与波传播研究*

唐光泽, 姚林泉, 李成, 季长剑

(苏州大学 轨道交通学院, 江苏 苏州 215131)

(我刊编委苟晓凡推荐)

摘要: 根据非局部理论和 Kelvin 黏弹性理论, 针对黏弹性纳米杆自由振动和波传播的轴向动力学问题进行研究. 首先, 推导了黏弹性纳米杆的轴向动力学微分控制方程. 然后, 通过无量纲化讨论了 3 种典型边界纳米杆的前三阶振动特性. 最后, 研究黏弹性纳米杆波的传播问题, 导出了圆频率、波速与波数之间的关系. 数值结果表明, 非局部效应使第一、二阶固有频率持续减小, 第三阶频率先增大再减小, 出现结构刚度削弱和增强两种趋势. 特别地, 对于自由端存在集中质量的情形, 第二阶频率随着黏性系数增大出现了多值情况, 易导致杆件失稳. 数值算例还说明了非局部效应的增强可有效降低黏性材料的阻尼效应, 产生逃逸频率, 使得纵波能够在高波数段传播. 另外, 黏性系数在低波数段对阻尼比影响可忽略不计, 而在高波数段下, 黏性系数越大则阻尼比越大.

关键词: 轴向振动; 波传播; 小尺度效应; 纳米杆; 黏弹性

中图分类号: O346

文献标志码: A

DOI: 10.21656/1000-0887.390166

引 言

自 Iijima^[1]发现碳纳米管以来, 其特殊的力学性能及其在纳米器件领域的潜在应用, 引起了国内外众多科研工作者的兴趣. 其中, 有关纳米结构的动力学问题也是近年来的重点研究课题. 大量的实验结果表明^[2-3], 纳米结构展现出了一些与宏观尺度下的理论预测完全不同的力学行为, 经典力学已无法直接应用于纳米结构中. 因此, 许多学者致力于对连续介质力学进行改进以适用于纳米结构, 非局部理论应运而生.

由 Eringen 等^[4-5]提出的非局部理论将分子间作用力是长程力的思想, 通过非局部核函数, 直接引入到传统连续介质力学的本构方程. 该理论认为, 连续体内某一点的应力不只是该点应变的函数, 而是连续体内所有点的应变及变形历史的函数. 已有大量文献^[6-22]报道, 非局部理论在碳纳米管、石墨烯等纳米材料的力学性能研究中扮演重要角色. 对于碳纳米管, 研究者将其考虑为纳米杆、纳米梁及壳体等多种模型, 进行了大量的研究工作. 杨武等^[6]基于经典弹性理论和非局部弹性理论分析了锥形纳米管纵向振动的固有频率; 黄伟国等^[7]研究了非局部效应下的压杆稳定性问题, 小尺度效应使压杆更易失稳及引起低频共振; Li 等^[8]讨论了传

* 收稿日期: 2018-06-14; 修订日期: 2018-07-21

基金项目: 国家自然科学基金(11572210); 江苏省研究生科研与实践创新计划项目(KYCX17_1983)

作者简介: 唐光泽(1994—), 男, 硕士生(E-mail: 20164246007@stu.suda.edu.cn);

姚林泉(1961—), 男, 教授, 博士, 博士生导师(通讯作者. E-mail: lqyao@suda.edu.cn).

统非局部纳米杆模型与等效非局部纳米杆模型的差异并解释了二者结论相反的原因;Narendar 等^[9]分析了非局部效应下纳米管纵波传播的特性及与经典力学的差别等。

最近, Xu 等^[23-24]发现在 $-196 \sim 1\ 000\ ^\circ\text{C}$ 范围下碳纳米管存在黏弹性. Pang 等^[10]研究了在非局部效应和表面效应的作用下, 黏弹性碳纳米管弯曲波的传播特性. 此外, 利用非局部理论研究纳米梁、纳米板及压电纳米板力学特性的文献也很多^[16-22]. 目前, 在众多碳纳米管的文献中, 考虑材料黏弹性的文章较为少见, 其中关于黏弹性纳米管的轴向动力学问题还没有被详细讨论. 本文考虑纳米杆模型, 研究碳纳米管的轴向动力学问题, 基于非局部理论和 Kelvin 黏弹性理论, 分别讨论了黏弹性纳米杆的轴向自由振动和波传播行为, 通过数值算例重点考察非局部效应和材料的黏性系数对固有频率、纵波的波速及阻尼比的影响规律.

1 模型及控制方程

根据 Eringen 非局部弹性理论, 在不计体力、线弹性、均匀和各向同性材料情况下非局部弹性问题的基本方程为^[4-5]

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (1a)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \int \chi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \Gamma) C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}') dV(\mathbf{x}'), \quad (1b)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (1c)$$

其中, σ_{ij} , ε_{ij} , u_i 和 C_{ijkl} 分别表示非局部应力、应变、位移和四阶弹性张量. 根据方程 (1b), $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x} 处的值不仅取决于该点的应变, 还取决于整个区域中所有点的应变的加权平均. 其权重系数由非局部模量 $\chi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \Gamma)$ 决定, $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ 是欧氏距离, Γ 是非局部核函数. 由方程 (1a) 和 (1c) 知, 非局部理论下平衡方程和几何方程与经典理论是一致的, 而方程 (1b) 能够表达成如下微分形式^[4]:

$$[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}', \quad (2a)$$

其中, $\boldsymbol{\sigma}$ 是非局部应力张量, $\boldsymbol{\sigma}'$ 是经典的应力张量, ∇^2 是 Laplace (拉普拉斯) 算子, e_0 是非局部的材料常数, a 是内特征长度, 比如晶格常数、碳碳单键键长等.

本文考虑一个长度为 L , 质量密度为 ρ , 横截面积为 A 的均匀、各向同性的黏弹性纳米杆. 对于直角坐标系下的一维纳米杆模型, Laplace 算子 $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2$, 代入式 (2a) 得

$$\left[1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] \sigma_x = \sigma'_x, \quad (2b)$$

其中, σ_x 是非局部正应力, σ'_x 是经典力学沿 x 方向的正应力.

另一方面, Kelvin-Voigt 经典黏弹性理论的本构关系^[25]为

$$\sigma'_x = E(\varepsilon_x + \tau_d \dot{\varepsilon}_x), \quad (3)$$

其中, E 为材料的弹性模量, τ_d 为黏性系数, $\dot{\varepsilon}_x = \partial \varepsilon_x / \partial t$ 为应变率.

结合式 (2)、(3), 可得一维非局部黏弹性应力应变关系:

$$\left[1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] \sigma_x = E(\varepsilon_x + \tau_d \dot{\varepsilon}_x). \quad (4)$$

仅考虑 x 方向的轴向振动, 由 d'Alembert (达朗贝尔) 原理, 可得长度为 dx 的黏弹性纳米杆微元在 x 方向的平衡方程为

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (5)$$

其中, u 为纳米杆的轴向位移, x 为轴向坐标, t 为时间, N 为轴向力, $N = \int_A \sigma_x dA$.

由方程(1c)可得到纳米杆轴向位移与应变关系为

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (6)$$

将式(6)代入式(4),并在式(4)两边对横截面积 A 积分得

$$\left[1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] N = EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \tau_d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial t} \right). \quad (7)$$

对式(7)中关于 x 求一次偏导数,得

$$\frac{\partial N}{\partial x} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^3 N}{\partial x^3} = EA \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tau_d \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right). \quad (8)$$

由式(5)和式(8)可得黏弹性纳米杆的轴向动力学控制方程为

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho (e_0 a)^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = E \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tau_d \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right). \quad (9)$$

式(9)是以轴向位移为未知量表示的动力学控制方程,涉及到弹性系数、黏性系数、小尺度参数等.下面将通过分离变量法对该方程进行求解,并分析各参数对频率的影响规律.

2 轴向自由振动问题

为研究纳米杆的轴向自由振动问题,引入以下无量纲量:

$$U = \frac{u}{L}, \quad X = \frac{x}{L}, \quad \alpha = \frac{e_0 a}{L}, \quad T = t \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}, \quad \tau = \tau_d \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}. \quad (10)$$

将式(9)控制方程无量纲化,得

$$\frac{\partial^2 U}{\partial T^2} - \alpha^2 \frac{\partial^4 U}{\partial X^2 \partial T^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \tau \frac{\partial^3 U}{\partial X^2 \partial T}. \quad (11)$$

由式(11)知,无量纲位移 U 是时间变量 T 和空间变量 X 的函数,为了方便求解利用分离变量法设其解为

$$U(X, T) = \bar{U}(X) e^{i\bar{\omega}_n T}, \quad (12)$$

其中, $i = \sqrt{-1}$, $\bar{\omega}_n$ 表示纳米杆的第 n 阶无量纲固有频率.

将式(12)代入式(11)得

$$(1 + i\tau\bar{\omega}_n - \alpha^2\bar{\omega}_n^2) \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial X^2} + \bar{\omega}_n^2 \bar{U} = 0. \quad (13)$$

不难求得其解为

$$\bar{U}(X) = c_1 \sin \left(\sqrt{\frac{\bar{\omega}_n^2}{1 + i\tau\bar{\omega}_n - \alpha^2\bar{\omega}_n^2}} X \right) + c_2 \cos \left(\sqrt{\frac{\bar{\omega}_n^2}{1 + i\tau\bar{\omega}_n - \alpha^2\bar{\omega}_n^2}} X \right). \quad (14)$$

则式(11)的解可表达为

$$U(X, T) = \left[c_1 \sin \left(\sqrt{\frac{\bar{\omega}_n^2}{1 + i\tau\bar{\omega}_n - \alpha^2\bar{\omega}_n^2}} X \right) + c_2 \cos \left(\sqrt{\frac{\bar{\omega}_n^2}{1 + i\tau\bar{\omega}_n - \alpha^2\bar{\omega}_n^2}} X \right) \right] e^{i\bar{\omega}_n T}, \quad (15)$$

其中, c_1, c_2 为任意常数,由边界条件确定.

工程中常见的固定、固支、可移简支和自由边界条件,在只考虑轴向位移情况下固定和固

支等同,可移简支和自由等同,因此只有固支和自由两种边界条件.它们可以组成3种类型的杆,分别为两端固支、一端固支一端自由和两端自由杆.本节将分别讨论3种边界类型黏弹性纳米杆的轴向振动情况,考察小尺度参数和黏弹性对轴向振动固有频率的影响.

2.1 两端固支

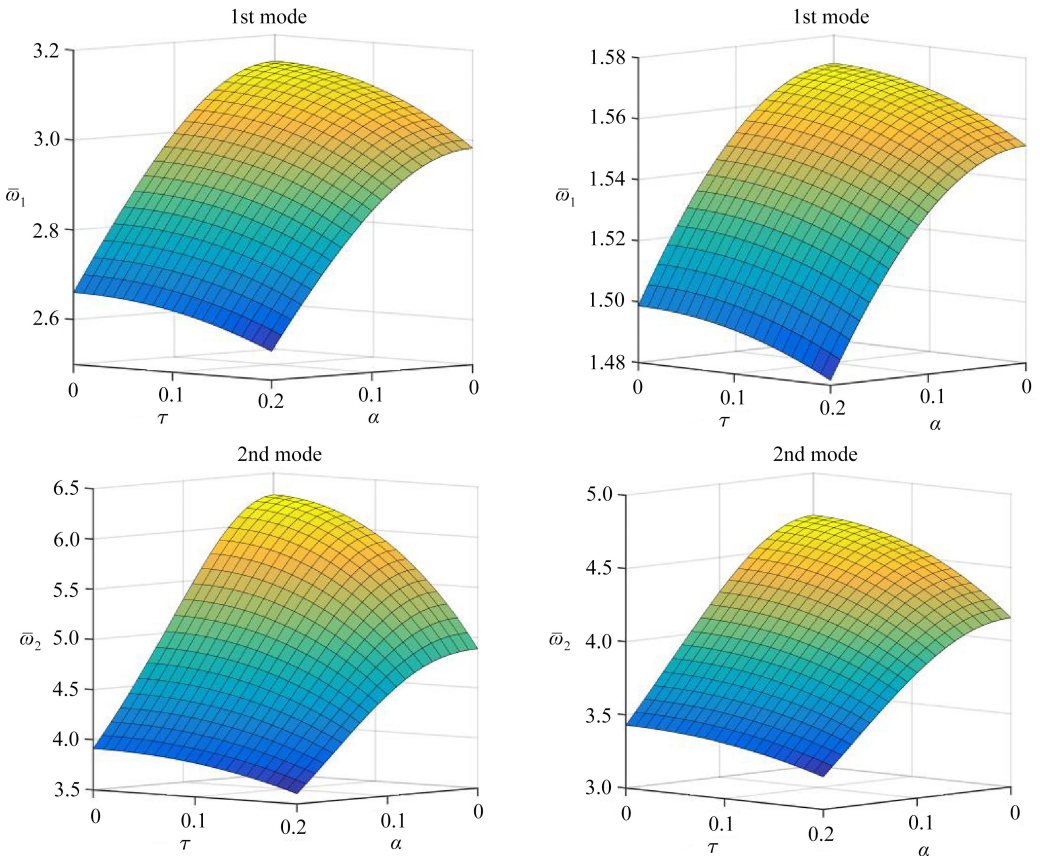
考虑两端固支黏弹性纳米杆,此时杆两端没有轴向位移,即^[26]

$$U(0, T) = 0, U(1, T) = 0. \quad (16)$$

将式(15)代入式(16),根据要求得到非平凡解可求解得频率为

$$\bar{\omega}_n = \frac{\sqrt{-\tau^2 n^4 \pi^4 + 4(1 + n^2 \pi^2 \alpha^2) n^2 \pi^2 + \tau n^2 \pi^2 i}}{2(1 + n^2 \pi^2 \alpha^2)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (17)$$

事实上 $\bar{\omega}_n$ 的实部是黏弹性纳米杆轴向振动的固有频率,虚部是衰减系数.当 $\alpha = 0, \tau = 0$ 时,固有频率表达式回归到经典力学下弹性杆轴向振动的结果.考虑受到无量纲非局部参数 α 、黏性系数 τ 的共同作用下,两端固支黏弹性纳米杆轴向振动的前三阶无量纲固有频率如图1所示.由图1的前两阶模态图可以发现,当非局部参数 α 增大或者黏性系数 τ 增大时,固有频率持续减小,即出现杆件结构的刚度削弱现象;而且一阶频率的减小速度比二阶要小.第三阶模态图中,若黏性系数较大(比如 $\tau = 0.2$ 时),随着非局部效应的增强,固有频率先增大后减小(在大约 $\alpha = 0.1$ 处达到峰值),且最小值仍大于经典理论($\alpha = 0$)下的频率值,即表现出刚度增强现象.这就表明,随着非局部效应的增强,黏弹性纳米结构可能会出现刚度增强和削弱两种趋势.这个现象与 Li 等^[8]对纳米材料和结构的非局部力学性能的研究结论一致,验证了文献[8]工作的同时,也说明了本文理论模型的有效性.



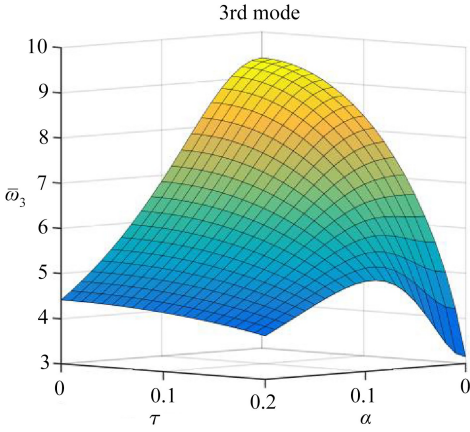


图1 两端固支前三阶无量纲固有频率

Fig. 1 The 1st 3 dimensionless natural frequencies under fixed-fixed supporting condition

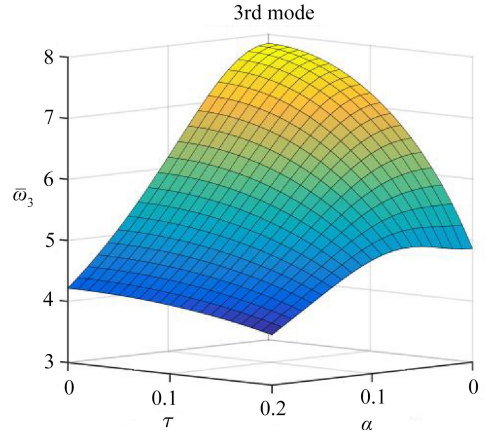


图2 一端固支一端自由前三阶无量纲固有频率

Fig. 2 The 1st 3 dimensionless natural frequencies under fixed-free supporting condition

2.2 一端固支一端自由

考虑一端固支一端自由黏弹性纳米杆,其边界条件为

$$U(0, T) = 0, EA \frac{\partial U(1, T)}{\partial X} = 0. \quad (18)$$

将式(15)代入式(18),同理可得

$$\bar{\omega}_n = \frac{\sqrt{-\tau^2(2n-1)^4\pi^4 + 4[4 + (2n-1)^2\pi^2\alpha^2](2n-1)^2\pi^2 + \tau(2n-1)^2\pi^2i}}{2[4 + (2n-1)^2\pi^2\alpha^2]} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (19)$$

一端固支一端自由边界条件下的前三阶无量纲固有频率如图2所示.对比图1与图2,可以发现,两种边界条件下的频率变化规律基本保持一致;但受边界条件的影响,图2中第三阶固有频率变化趋势没有图1的明显,前3阶模态下均表现出刚度削弱的现象.另外,相同模态下,一端固支一端自由杆件的固有频率略小于两端固支情况.

2.3 两端自由

考虑两端自由黏弹性纳米杆,此时杆的自由端轴向力为0,即

$$EA \frac{\partial U(0, T)}{\partial X} = 0, EA \frac{\partial U(1, T)}{\partial X} = 0. \quad (20)$$

将式(15)代入式(20),可求得频率为

$$\bar{\omega}_n = \frac{\sqrt{-\tau^2 n^4 \pi^4 + 4(1 + n^2 \pi^2 \alpha^2) n^2 \pi^2 + \tau n^2 \pi^2 i}}{2(1 + n^2 \pi^2 \alpha^2)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (21)$$

对比式(21)和式(17)可知,两端自由边界下固有频率表达式与两端固支情形相同,其频率变化规律在此不再赘述.值得说明的是,由于 n 的取值范围不同,两端自由边界下多出零频率情况,这是由没有限制刚体位移引起的.对比上文3种边界条件,可以得到:对于黏弹性纳米杆件,相同条件下,两端自由边界条件下固有频率最低,一端固支一端自由次之,两端固支边界下固有频率最高.这一点也与经典理论3种边界条件下固有频率大小排序一致.

2.4 自由端有集中质量

考虑一端固支一端自由的特例,自由端带有集中质量 m 的情况,这种杆件在微机械系统

中非常常见.此时,要求固定一端轴向位移为0,带有集中质量的自由端满足自由端的轴向力等于集中质量轴向振动的惯性力,即

$$U(0, T) = 0, \quad \frac{\partial U(1, T)}{\partial X} + M \frac{\partial^2 U(1, T)}{\partial T^2} = 0, \quad (22)$$

其中, $M = m/(\rho AL)$. 将式(15)代入式(22), 求解可得

$$M\bar{\omega}_n^2 \tan \sqrt{\frac{\bar{\omega}_n^2}{1 + i\tau\bar{\omega}_n - \alpha^2\bar{\omega}_n^2}} = \sqrt{\frac{\bar{\omega}_n^2}{1 + i\tau\bar{\omega}_n - \alpha^2\bar{\omega}_n^2}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (23)$$

通过数值方法, 可以获得不同集中质量下杆件前两阶无量纲固有频率的变化情况. 对于弹性纳米杆 ($\tau = 0$) 和黏弹性纳米杆 ($\tau = 0.2$), 自由端带有的集中质量越大, 其固有频率越小, 如图3所示. 由图3可以看到, 非局部效应对第一阶固有频率的影响非常小, 对第二阶频率的影响较大. 对比黏性系数 $\tau = 0, 0.2$ 两种情况, 若黏性系数较大(与非局部参数相当), 第二阶固有频率会迅速增大, 并出现多值的情况, 容易造成结构失稳.

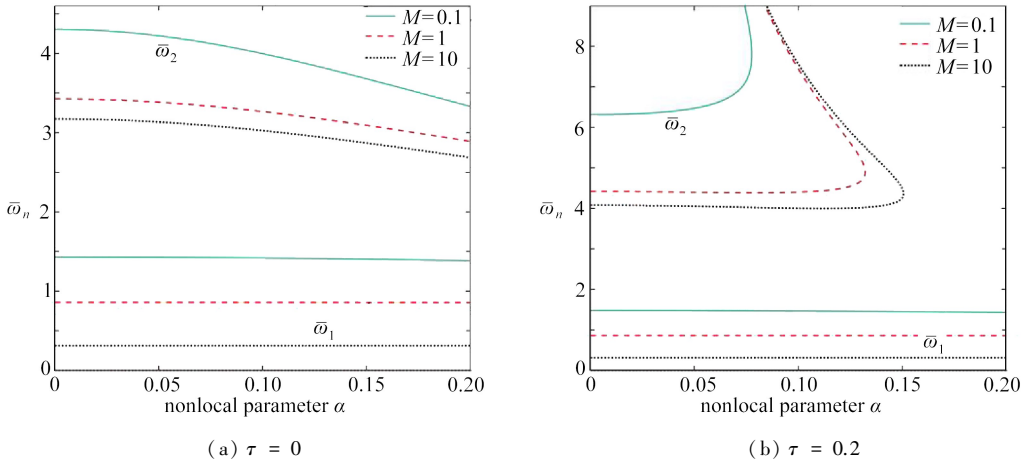


图3 不同黏性系数下自由端带有集中质量纳米杆的固有频率

Fig. 3 The natural frequencies in the case of a free end with a concentrated mass for different viscoelastic coefficients

3 黏弹性纳米杆的波传播

为了研究纳米杆纵向波的传播问题, 轴向动力学控制方程(9)的解可设为^[9]

$$u(x, t) = U_0 e^{-i(kx - \omega t)}, \quad (24)$$

其中, k 为波数, ω 为圆频率, U_0 为波的振幅.

将式(24)代入式(9), 得到色散关系:

$$\frac{1}{c_0^2} [1 + (e_0 a)^2 k^2] \omega^2 - i\tau_d k^2 \omega - k^2 = 0, \quad (25)$$

其中, $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ 为经典理论下杆件纵波传播的波速^[14].

由式(25)可得圆频率 ω 的复数解为

$$\omega_c = \frac{i\tau_d c_0^2 k^2 + \sqrt{4[1 + (e_0 a)^2 k^2] c_0^2 k^2 - \tau_d^2 c_0^4 k^4}}{2[1 + (e_0 a)^2 k^2]}. \quad (26)$$

对于黏弹性纳米杆纵向波传播问题, 圆频率 ω 与波数 k 的关系由式(26)的实部 $\text{Re}(\omega_c)$

得到

$$\omega = \text{Re}(\omega_c) = \frac{\sqrt{4[1 + (e_0 a)^2 k^2] c_0^2 k^2 - \tau_d^2 c_0^4 k^4}}{2[1 + (e_0 a)^2 k^2]}, \quad (27)$$

则纵波传播的波速为

$$c = \frac{\omega}{k} = c_0 \frac{\sqrt{4[1 + (e_0 a)^2 k^2] - \tau_d^2 c_0^2 k^2}}{2[1 + (e_0 a)^2 k^2]}, \quad (28)$$

其虚部由材料的阻尼效应引起,阻尼比 ζ 由圆频率的虚部和实部之比定义:

$$\zeta = \frac{\text{Im}(\omega_c)}{\text{Re}(\omega_c)} = \frac{\tau_d c_0 k}{\sqrt{4[1 + (e_0 a)^2 k^2] - \tau_d^2 c_0^2 k^2}}. \quad (29)$$

4 波传播算例分析及讨论

以下算例中,首先选取扶手椅型单壁碳纳米管(10,10)来检验本文模型,由文献[15]提供其相关参数如下:有效厚度 $h = 0.34 \text{ nm}$, 弹性模量 $E = 0.45 \text{ TPa}$, 密度 $\rho = 2.237 \text{ g/cm}^3$.为验证本文模型的有效性,取黏性系数 $\tau_d = 0$, 图4给出了圆频率 ω 与波数 k 分别在经典弹性理论(CET)和非局部弹性理论下的关系,其中非局部参数 $e_0 a$ 分别取 $0.1, 0.5, 1.0, 2.0 \text{ nm}$.图4显示,在经典弹性理论下,圆频率与波数呈线性关系,其斜率为 c_0 ;在非局部理论下,圆频率随波数的增大而增大,且逐渐趋于稳定值,称为逃逸频率;非局部效应越强,逃逸频率越小,该结论与王碧蓉等^[12]、Narendar 等^[9]的研究结论相符.图5为黏性系数 $\tau_d = 100 \text{ fs}$ (10^{-13} s) 时黏弹性纳米杆的圆频率 ω 与波数 k 之间的关系图.在经典理论下,随着波数增大,圆频率先增大然后迅速减小至0;当非局部参数 $e_0 a$ 取 0.1 nm 和 0.5 nm 时,圆频率变化趋势不变,但衰减速度明显变慢;当 $e_0 a$ 取 1.0 nm 和 2.0 nm 时,随着波数增大,圆频率逐渐增大并趋于稳定值,即再次出现逃逸频率.

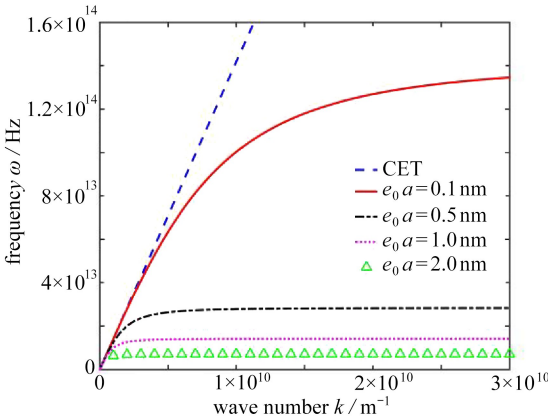


图4 $\tau_d = 0$ 时不同非局部参数下的频率

Fig. 4 Frequencies for different nonlocal parameters, $\tau_d = 0$

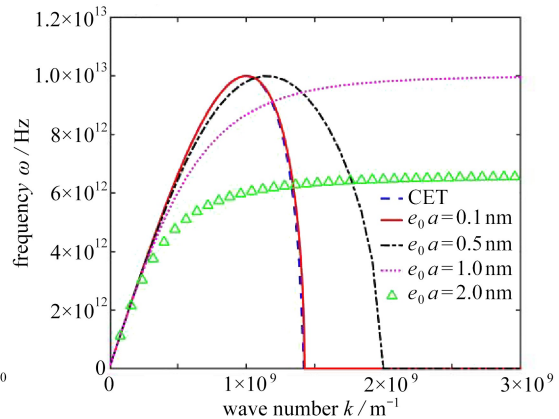


图5 $\tau_d = 100 \text{ fs}$ 时不同非局部参数下的频率

Fig. 5 Frequencies for different nonlocal parameters, $\tau_d = 100 \text{ fs}$

图6和图7给出了纵波传播的波速 c 与波数 k 的关系曲线图,其中图6侧重研究黏性系数 τ_d 的影响,而图7则考虑非局部参数 $e_0 a$ 的影响情况.如图6所示,在经典弹性理论下,纵波波速为常数 c_0 ;非局部弹性理论下,当波数较小时 ($k < 10^8 \text{ m}^{-1}$) 波速约为常数 c_0 ,之后随着波数的增

大而快速减小,渐渐趋于0;在非局部黏弹性理论下,分别取黏性系数 $\tau_d = 100, 200, 300$ fs, 波速快速衰减至0, 衰减速度随黏性系数增大而增大.在图7中,取黏性系数 $\tau_d = 100$ fs, 由于黏性阻尼的作用,经典理论下波速随波数的增加而急剧减小至0;在非局部黏弹性理论下,非局部参数 $e_0 a$ 分别取0.1 nm 和0.5 nm, 波速依旧快速减小至0, 而此时截止的波数明显增大;当 $e_0 a$ 分别取1.0 nm 和2.0 nm 时,波速随波数的增加减小缓慢, 阻尼效应明显减弱, 纵波能够在高波数段传播.对比以上结果可知,非局部效应的增强可弱化材料的阻尼效应, 有利于纵波在黏弹性纳米杆件中的传播.

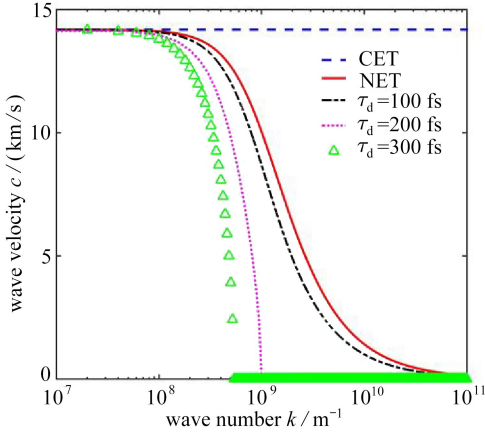


图6 $e_0 a = 1.0$ nm 时不同黏性系数下的波速

Fig. 6 Wave velocities for different viscoelastic coefficients, $e_0 a = 1.0$ nm

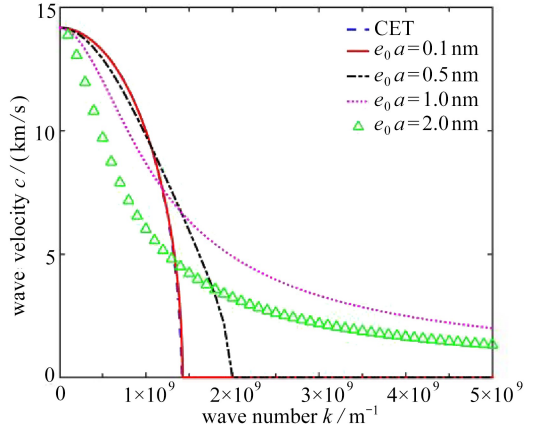


图7 $\tau_d = 100$ fs 时不同非局部参数下的波速

Fig.7 Wave velocities for different nonlocal coefficients, $\tau_d = 100$ fs

图8反映了阻尼比 ζ 随着波数 k 的变化情况.由图8可知,当波数较小时 ($k < 3 \times 10^7$ m^{-1}),对阻尼比影响微弱,可忽略不计.当波数 $k \in [3 \times 10^7, 3 \times 10^9]$ m^{-1} 时,阻尼比随波数的增大而增大,且受其影响显著;若波数继续增大,阻尼比渐趋于定值.另外,在相同条件下,黏性系数越大阻尼比越大,且受波数影响的范围越大.

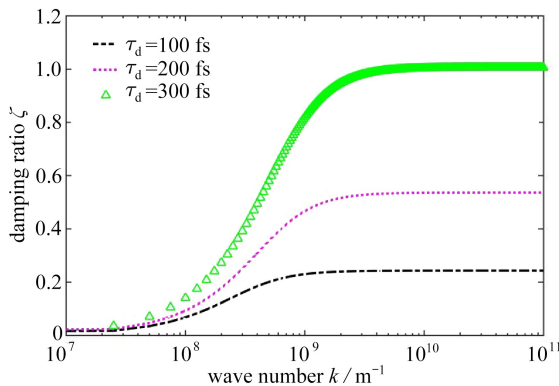


图8 不同黏性系数下的阻尼比

Fig. 8 Damping ratios for different viscoelastic coefficients

5 结 论

本文基于非局部黏弹性理论建立了黏弹性纳米杆的轴向动力学模型,分析了纳米杆轴向

自由振动问题和纵波传播问题,并基于扶手椅型单壁碳纳米管的算例分析,得到如下结论:

- 1) 对于黏弹性纳米杆轴向自由振动问题,固有频率随黏性系数的增大而减小,且频率阶数越高,减小幅度越大。
- 2) 随着非局部参数增大,低阶模态的固有频率持续减小,而高阶频率先增大后减小,出现纳米结构非局部刚度削弱或增强现象。
- 3) 自由端带有集中质量情形,高阶固有频率出现多值情况,易导致杆件失稳。
- 4) 波传播问题中,黏性阻尼效应使圆频率和波速快速衰减为 0。非局部效应增强后,出现逃逸频率,实现纵波在高波数段传播,阻尼比随黏性系数增大而增大,低波数段下其影响可忽略不计。

参考文献(References):

- [1] IJIMA S. Helical microtubules of graphitic carbon[J]. *Nature*, 1991, **354**: 56-58.
- [2] ERINGEN A C, KIM B S. Stress concentration at the tip of the crack[J]. *Mechanics Research Communications*, 1974, **1**(4): 233-237.
- [3] TREACY M M J, EBBESEN T W, GIBSON J M. Exceptionally high Young's modulus observed for individual carbon nanotubes[J]. *Nature*, 1996, **381**: 678-680.
- [4] ERINGEN A C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves[J]. *Journal of Applied Physics*, 1983, **54**(9): 4703-4710.
- [5] ERINGEN A C, EDELEN D G B. On nonlocal elasticity[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1972, **10**(3): 233-248.
- [6] 杨武, 彭旭龙, 李显方. 锥形纳米管纵向振动固有频率[J]. 振动与冲击, 2014, **33**(2): 158-162. (YANG Wu, PENG Xulong, LI Xianfang. Natural frequencies of longitudinal vibration of cone-shaped nanotubes[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2014, **33**(2): 158-162. (in Chinese))
- [7] 黄伟国, 李成, 朱忠奎. 基于非局部理论的压杆稳定性及轴向振动研究[J]. 振动与冲击, 2013, **32**(5): 154-156. (HUANG Weiguo, LI Cheng, ZHU Zhongkui. On the stability and axial vibration of compressive bars based on nonlocal elasticity theory[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2013, **32**(5): 154-156. (in Chinese))
- [8] LI C, LI S, YAO L Q. Nonlocal theoretical approaches and atomistic simulations for longitudinal free vibration of nanorods/nanotubes and verification of different nonlocal models[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2015, **39**(15): 4570-4585.
- [9] NARENDAR S, GOPALAKRISHNAN S. Nonlocal scale effects on ultrasonic wave characteristics of nanorods[J]. *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, 2010, **42**(5): 1601-1604.
- [10] PANG M, ZHANG Y Q, CHEN W Q. Transverse wave propagation in viscoelastic single-walled carbon nanotubes with small scale and surface effects[J]. *Journal of Applied Physics*, 2015, **117**(2): 024305.
- [11] WANG L F, HU H Y. Flexural wave propagation in single-walled carbon nanotubes[J]. *Journal of Computational & Theoretical Nanoscience*, 2008, **5**(4): 581-586.
- [12] 王碧蓉, 邓子辰, 徐晓建. 基于梯度理论的碳纳米管弯曲波传播规律的研究[J]. 西北工业大学学报, 2013, **31**(5): 774-778. (WANG Birong, DENG Zichen, XU Xiaojian. Modified Timoshenko beam models for flexural wave dispersion in carbon nanotubes with shear deformation considered[J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2013, **31**(5): 774-778. (in Chinese))

- [13] 张宇, 邓子辰, 赵鹏. 辛体系下碳纳米管阵列中大赫兹波传播特性研究[J]. *应用数学和力学*, 2016, **37**(9): 889-900. (ZHANG Yu, DENG Zichen, ZHAO Peng. Study of terahertz wave propagation in carbon nanotube arrays based on the symplectic formulation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(9): 889-900. (in Chinese))
- [14] 尹春松, 杨洋. 考虑非局部剪切效应的碳纳米管弯曲特性研究[J]. *应用数学和力学*, 2015, **36**(6): 600-606. (YIN Chunsong, YANG Yang. Shear deformable bending of carbon nanotubes based on a new analytical nonlocal Timoshenko beam model[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(6): 600-606. (in Chinese))
- [15] 徐晓建, 邓子辰. 非局部因子和表面效应对微纳米材料振动特性的影响[J]. *应用数学和力学*, 2013, **34**(1): 10-17. (XU Xiaojian, DENG Zichen. Surface effects of adsorption-induced resonance analysis of micro/nanobeams via nonlocal elasticity[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(1): 10-17. (in Chinese))
- [16] LI C, LIU J J, CHENG M, et al. Nonlocal vibrations and stabilities in parametric resonance of axially moving viscoelastic piezoelectric nanoplate subjected to thermo-electro-mechanical forces[J]. *Composites Part B: Engineering*, 2017, **116**: 153-169.
- [17] LI C. Nonlocal thermo-electro-mechanical coupling vibrations of axially moving piezoelectric nanobeams[J]. *Mechanics Based Design of Structures & Machines*, 2017, **45**(4): 463-478.
- [18] SHEN J P, LI C, FAN X L, et al. Dynamics of silicon nanobeams with axial motion subjected to transverse and longitudinal loads considering nonlocal and surface effects[J]. *Smart Structures and Systems*, 2017, **19**(1): 105-113.
- [19] LIU J J, LI C, FAN X, et al. Transverse free vibration and stability of axially moving nanoplates based on nonlocal elasticity theory[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2017, **45**: 65-84.
- [20] LIU J J, LI C, YANG C J, et al. Dynamical responses and stabilities of axially moving nanoscale beams with time-dependent velocity using a nonlocal stress gradient theory[J]. *Journal of Vibration and Control*, 2017, **23**(20): 3327-3344.
- [21] KARAMI B, SHAHSAVARI D, LI L. Hygrothermal wave propagation in viscoelastic graphene under in-plane magnetic field based on nonlocal strain gradient theory[J]. *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, 2018, **97**: 317-327.
- [22] EL-BORGI S, RAJENDRAN P, FRISWELL M I, et al. Torsional vibration of size-dependent viscoelastic rods using nonlocal strain and velocity gradient theory[J]. *Composite Structures*, 2018, **186**: 274-292.
- [23] XU M, FUTABA D N, YAMADA T, et al. Carbon nanotubes with temperature-invariant viscoelasticity from $-196\text{ }^{\circ}\text{C}$ to $1\ 000\text{ }^{\circ}\text{C}$ [J]. *Science*, 2010, **330**(6009): 1364-1368.
- [24] XU M, FUTABA D N, YUMURA M, et al. Tailoring temperature invariant viscoelasticity of carbon nanotube material[J]. *Nano Letters*, 2011, **11**(8): 3279-3284.
- [25] 杨挺青. 黏弹性理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004. (YANG Tingqing. *Viscoelastic Theory and Application*[M]. Beijing: Science Press, 2004. (in Chinese))
- [26] 谢官模. 振动力学[M]. 北京: 国防工业出版社, 2007. (XIE Guanmo. *Vibration Mechanics* [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2007. (in Chinese))

Longitudinal Vibration and Wave Propagation of Viscoelastic Nanorods Based on the Nonlocal Theory

TANG Guangze, YAO Linquan, LI Cheng, JI Changjian

(School of Rail Transportation, Soochow University,
Suzhou, Jiangsu 215131, P.R.China)

(Recommended by GOU Xiaofan, M. AMM Editorial Board)

Abstract: The longitudinal dynamics of viscoelastic nanorods was investigated based on the nonlocal theory and the Kelvin viscoelastic theory, including axial free vibration and wave propagation. Firstly, the partial differential governing equations were derived and then the 1st 3 vibration properties were discussed under 3 kinds of typical boundary conditions with the dimensionless method. Finally, the relationships between the circular frequency, the wave speed and the wave number were obtained in the problem of wave propagation. The numerical results show that, the small-scale effect makes the 1st and 2nd frequencies decrease persistently and the 3rd frequency increase first and decrease later, which indicates that the nanostructural stiffness is weakened or strengthened. In particular, for a concentrated mass at the free end of the nanorod, the 2nd frequency has multiple values when the viscoelastic coefficient increases, which may cause instability. The numerical examples also prove that stronger nonlocal effect brings lower damping effect of viscoelastic materials. The longitudinal wave can propagate at high wave numbers due to occurrence of the escape frequency. The effects of viscoelastic coefficients on the damping ratio may be ignored at low wave numbers, however, be significant at high wave numbers.

Key words: axial vibration; wave propagation; small-scale effect; nanorod; viscoelasticity

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11572210)

引用本文/Cite this paper:

唐光泽, 姚林泉, 李成, 季长剑. 基于非局部理论的黏弹性纳米杆轴向振动与波传播研究[J]. 应用数学和力学, 2019, 40(1): 36-46.

TANG Guangze, YAO Linquan, LI Cheng, JI Changjian. Longitudinal vibration and wave propagation of viscoelastic nanorods based on the nonlocal theory[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, 40(1): 36-46.