

端部旋转的圆柱形容器内的Stokes流

王尔平, 刘竞慧

Stokes Flow in Cylindrical Containers With Rotating Ends

WANG Gaping and LIU Jinghui

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.21656/1000-0887.430197>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

柔性圆柱形微管道内的电动流动及传热研究

Electrokinetic Flow and Heat Transfer in Soft Microtubes

应用数学和力学. 2019, 40(4): 408–418 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.390155>

矩形容器中黏性流体的横波谐振: 格子Boltzmann浸没边界方法

Transverse Harmonic Oscillation of Rectangular Container With Viscous Fluid: a Lattice Boltzmann Immersed Boundary Approach

应用数学和力学. 2018, 39(4): 371–394 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.390040>

针对壁面旋转变径管内螺旋流的压力应变项研究

Research on Pressure Strain Correlation Terms in the Reynolds Stress Model for Spiral Flow in Reducing Pipes With Rotating Wall

应用数学和力学. 2019, 40(5): 574–582 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.390325>

旋转流动的低模分析及仿真研究

Low-Dimensional Analysis and Numerical Simulation of Rotating Flow

应用数学和力学. 2017, 38(7): 794–806 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.360342>

在一个半无穷柱体上的非标准Stokes流体方程的二择一问题

Phragmén-Lindelöf Type Results for Non-Standard Stokes Flow Equations Around Semi-Infinite Cylinder

应用数学和力学. 2020, 41(4): 406–419 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.400272>

软物质准晶广义流体动力学的一个应用——圆柱绕流的近似解

An Application of the Generalized Hydrodynamics for Soft-Matter Quasicrystals—Flow Past a Cylinder

应用数学和力学. 2017, 38(3): 265–275 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.370251>



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

端部旋转的圆柱形容器内的 Stokes 流*

王尢平, 刘竟慧

(大连交通大学 土木工程学院, 辽宁 大连 116028)

(我刊编委吴锤结推荐)

摘要: 该文以端部旋转的圆柱形容器内的 Stokes 流为研究对象, 根据流动的特点, 将轴向坐标模拟为时间, 则问题归结为 Hamilton 对偶方程的本征值和本征解问题. 利用本征解空间的完备性和本征解之间的共轭辛正交关系, 给出了问题解的展开形式, 并建立了展开系数的数值求解方法. 采用该方法研究了单端旋转、两端以相同或相反角速度旋转时不同外形比(容器的高度与半径之比)时圆柱形容器内流动速度和应力的分布情况, 展示了不同边界条件下流场的一些特点.

关键词: Stokes 流; Hamilton; 旋转端部; 圆柱形容器

中图分类号: O357.1 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.430197

Stokes Flow in Cylindrical Containers With Rotating Ends

WANG Gaping, LIU Jinghui

(School of Civil Engineering, Dalian Jiaotong University, Dalian, Liaoning 116028, P.R. China)

(Recommended by WU Chuijie, M. AMM Editorial Board)

Abstract: The Stokes flow in cylindrical containers with rotating ends was studied. Based on the characteristics of the flow, the problem was reduced to the eigenvalue and eigensolution problem of Hamiltonian dual equations with the axial coordinate simulated as the time scale. By means of the completeness of the symplectic eigensolution space and the adjoint symplectic orthogonality relationship between the eigensolutions, the expansion of the solution to the problem was obtained, and the numerical method for calculating the expansion coefficients was given. In the cases of one-end rotating, two-end rotating at the same or opposite angular velocity, the velocity and stress distributions of the flow in the cylindrical containers with different aspect ratios (of the length to the radius), were investigated. The velocity and stress distributions, and the characteristics of the flows under different boundary conditions were revealed.

Key words: Stokes flow; Hamilton; rotating end; cylindrical container

引 言

端部旋转所引起的容器内的流动问题是流体力学的经典内容之一, 它被关注的原因在于两个方面: 理论上, 它使得能够在有限形状规则的求解域中得到 N-S 方程的精确解, 从而能够解析地研究流场的一些变化规律; 工程上, 它所产生的二次流对于工业过程的实现具有重要的作用, 如涡轮机、化学反应器和磁盘存储工业

* 收稿日期: 2022-06-09; 修订日期: 2022-06-24

基金项目: 国家自然科学基金(11202043)

作者简介: 王尢平(1972—), 女, 副教授, 博士, 硕士生导师(通讯作者. E-mail: gaping99@sina.com).

引用格式: 王尢平, 刘竟慧. 端部旋转的圆柱形容器内的 Stokes 流[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(1): 52-60.

等. 许多学者在中等 Reynolds 数范围内研究了这个问题. Pao^[1]、Bertelà 和 Gori^[2]、Duck^[3] 采用有限差分法研究了单端、两端部旋转的圆柱形容器内的流线、速度场、压强场等随 Reynolds 数 $Re = \Omega R^2/\nu$ 、外形比 $A = h/R$ (R 为端部半径, Ω 为端部旋转的角速度, h 为圆柱容器的高度, ν 为流体的运动黏性系数) 的变化规律. Dijkstra 和 Van Heijst^[4] 从数值和实验两方面研究了小外形比条件下端部反向旋转的容器内流场的漩涡结构和驻点随两端部速度比的变化规律. Vogel^[5] 采用系统的实验研究了单端旋转圆柱容器内的涡破裂现象. Escudier^[6] 验证并发展了 Vogel 的实验, 在其基础上研究了容器外形比和 Reynolds 数对涡破裂的影响规律. Valentine 和 Jahnke^[7] 研究了两端部以相同角速度旋转时容器内涡破裂与单端旋转的不同规律. Gelfgat 等^[8] 研究了被限制的旋转流中的漩涡分离流的触发机理, 他们认为局部离心力的最大值是流场中循环区域形成的主要原因. 此外, Kahouadji 和 Witkowski^[9] 通过数值和实验探讨了底部旋转、上部为自由液面的圆柱形容器内流动的稳定性和流场中二次漩涡产生和消失的机理. Mukherjee 和 Steinberg^[10] 通过实验研究了上部转盘驱动的圆柱形容器中的流场结构和转盘上的摩擦因数随 Reynolds 数的变化规律.

以上研究揭示了中等 Reynolds 数范围内端部旋转容器中的一些流动规律, 关于 Stokes 流的研究却较少见. 近年来, 对偶方法在力学领域得到了许多应用, 如弹性力学、结构力学、动力学、最优控制、流体力学等^[11-16], 展示了该方法的广泛适用性, 同时也得到了许多有意义的成果. 本文将 z 坐标模拟为时间, 将对偶方法引入到端部旋转的圆柱形容器内的流动问题, 并对容器内的流动进行了研究. 研究结果展示了不同外形比和不同端部旋转条件下, 流场的速度分布、应力分布, 揭示了 Stokes 流的一些特点.

1 对偶方法

1.1 柱坐标系下 Stokes 流问题的基本描述和对偶方程

当流动的特征尺度和特征速度很小或者运动黏度很大时, 相应的 Reynolds 数很小 (即 $Re \ll 1$), 此时流体的惯性力与黏性力相比可以忽略不计, 这种流动称为 Stokes 流.

端部旋转驱动的圆柱形容器内流体的流动可视为空间柱坐标系 (r, θ, z) 下的轴对称 ($\partial/\partial\theta = 0$) 问题. u_r , u_θ 和 u_z 分别表示径向速度分量、环向速度分量和轴向速度分量. 根据流动的特点, 径向和轴向流动速度均为零, 则速度可表示为 $\mathbf{u} = \{0, u_\theta, 0\}^T$. 流动区域如图 1 所示, 圆柱形容器的半径为 a , 高度为 h , 原点 O 位于圆柱形容器的左端圆心处, 容器的侧边固定, 则有

$$u_r|_{r=a} = 0, \quad u_\theta|_{r=a} = 0, \quad u_z|_{r=a} = 0. \quad (1)$$

当容器的单端或两端部旋转时, 将驱动容器内的流体运动. 图 1 所示为圆柱形容器的左端部以角速度 Ω 旋转. 若容器的左端和右端均旋转, 则为两端旋转的容器内的流动问题.

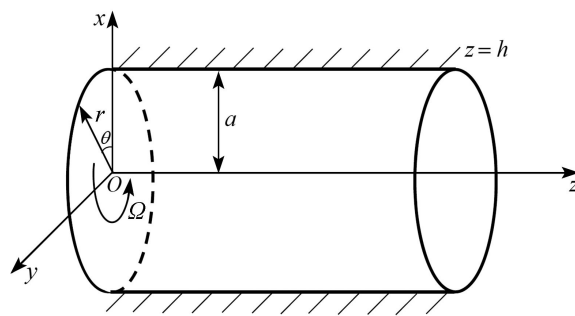


图 1 圆柱形容器的几何示意图
Fig. 1 The geometry of the cylindrical container

流体的本构方程为

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = -p_{\text{res}}, \quad \tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \quad \tau_{z\theta} = \mu \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \quad \tau_{zr} = 0, \quad (2)$$

式中 μ 为动力黏性系数, p_{res} 为压强. 由于该流动的特殊性, 不可压流体的连续方程自动满足, 流体的控制方程为

$$\frac{\partial(r\tau_{\theta r})}{\partial r} + \frac{\partial(r\tau_{\theta z})}{\partial z} + \tau_{r\theta} = 0. \quad (3)$$

将 z 坐标模拟为时间,并引入记号 $\dot{\ } = \partial()/\partial z$,则相应的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{\mu r}{2} \left[\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)^2 + (\dot{u}_\theta)^2 + \left(\frac{u_\theta}{r} \right)^2 - 2 \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right]. \quad (4)$$

引入对偶变量

$$p = \frac{\delta L}{\delta \dot{u}_\theta} = r\mu \dot{u}_\theta = r\tau_{z\theta}. \quad (5)$$

由上式可以看出对偶变量是同应力相关的物理量,称其为广义应力.记速度和其对偶变量的矢量形式为 $\mathbf{q} = \{u_\theta\}$, $\mathbf{p} = \{p\}$,则可引入 Hamilton 函数:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \quad (6)$$

对上式应用变分,有

$$\delta \int \int \int_{\Omega} [\mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p})] dr d\theta dz = 0, \quad (7)$$

则可得到 Hamilton 对偶方程

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\delta H}{\delta \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\delta H}{\delta \mathbf{q}} \quad (8)$$

和齐次侧边界条件(1),方程(8)的具体形式为

$$\begin{Bmatrix} \dot{u}_\theta \\ \dot{p} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{r} \\ -\mu r D_r^2 - \mu D_r + \frac{\mu}{r} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_\theta \\ p \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

式中微分算子 $D_r = \partial/\partial r$, $D_\theta = \partial/\partial \theta$.可以看出,方程(9)由柱坐标系下流体的本构方程和控制方程组成.

1.2 共轭辛正交归一关系

定义 $\mathbf{w} = \{\mathbf{q}, \mathbf{p}\}^T$ 为全状态向量,则对偶方程(9)可以写为

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{H}\mathbf{w}, \quad (10)$$

式中 \mathbf{H} 为 Hamilton 算子阵.分离变量,方程(10)的解可写成如下形式:

$$\mathbf{w}(\theta, z) = \boldsymbol{\psi}(\theta) e^{\lambda z}, \quad (11)$$

式中 λ 和 $\boldsymbol{\psi}$ 分别为本征值及其对应的本征解,且 $\boldsymbol{\psi} = \{\psi_{u_\theta}, \psi_p\}^T$ 满足方程

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\psi} = \lambda\boldsymbol{\psi}. \quad (12)$$

定义辛内积:

$$\langle \boldsymbol{\psi}_n, \boldsymbol{\psi}_m \rangle = \int_{\Omega_r} \boldsymbol{\psi}_n^T \mathbf{J} \boldsymbol{\psi}_m dr, \quad (13)$$

式中 $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ 是单位辛矩阵, \mathbf{I} 是单位矩阵.可以证明^[12]:如果 λ_n 是本征值,则 $-\lambda_n$ 和复共轭 $\bar{\lambda}_n$ 也都是本征值,因此 Hamilton 算子阵 \mathbf{H} 的本征解可以被划分成两个集合,即

$$\begin{cases} (\alpha) \lambda_n^{(\alpha)} : \text{Re}(\lambda_n) < 0, \text{Re}(\lambda_n) = 0 \cap \text{Im}(\lambda_n) > 0, \\ (\beta) \lambda_n^{(\beta)} : \lambda_n^{(\beta)} = -\lambda_n^{(\alpha)}, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots. \quad (14)$$

并且本征解之间存在着共轭辛正交归一关系:

$$\begin{cases} \langle \boldsymbol{\psi}_n^{(\alpha)}, \boldsymbol{\psi}_m^{(\beta)} \rangle = \delta_{nm}, \\ \langle \boldsymbol{\psi}_n^{(\beta)}, \boldsymbol{\psi}_m^{(\alpha)} \rangle = -\delta_{nm}, \\ \langle \boldsymbol{\psi}_n^{(\alpha)}, \boldsymbol{\psi}_m^{(\alpha)} \rangle = \langle \boldsymbol{\psi}_n^{(\beta)}, \boldsymbol{\psi}_m^{(\beta)} \rangle = 0, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots. \quad (15)$$

由于解空间的完备性^[17],任意空间状态向量 \mathbf{w} 总是可以展开成本征解的线性组合:

$$\mathbf{w} = \sum_{n=1}^l c_n \mathbf{w}_n^0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \boldsymbol{\psi}_m^{(\alpha)} e^{\lambda_m^{(\alpha)} z} + b_m \boldsymbol{\psi}_m^{(\beta)} e^{\lambda_m^{(\beta)} z}), \quad (16)$$

式中 \mathbf{w}_n^0 为零本征解, c_n , a_m 和 b_m 为待定系数, l 为零本征解的个数.

1.3 零本征解

如果本征解 $\lambda = 0$, 则方程 (12) 为

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}. \quad (17)$$

方程 (17) 的具体形式为

$$\begin{cases} \frac{1}{\mu r} \psi_p = 0, \\ -r\mu \frac{\partial^2 \psi_{u_\theta}}{\partial r^2} - \mu \frac{\partial \psi_{u_\theta}}{\partial r} + \frac{\mu}{r} \psi_{u_\theta} = 0. \end{cases} \quad (18)$$

在边界条件 (1) 下求解上式, 可得到零本征解:

$$\mathbf{w}_1^0 = \boldsymbol{\psi}_1^{(0)} = \left\{ -\frac{C}{r} a^2 + Cr, 0 \right\}^T. \quad (19)$$

然而, 当 $r = 0$ 时, 容器轴线上流体的速度应为有限值, 因此上式中的常数 $C = 0$, 即式 (19) 是零解. 并且由此可知, 不存在一阶约当形式的本征解 $\boldsymbol{\psi}_2^{(0)}$ 满足 $\mathbf{H}\boldsymbol{\psi}_2^{(0)} = \boldsymbol{\psi}_1^{(0)}$. 因此问题不存在零本征解.

1.4 非零本征解及问题解的形式

本征值 $\lambda \neq 0$ 时,

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\psi} = \lambda \boldsymbol{\psi}. \quad (20)$$

上式展开为

$$\begin{cases} \frac{1}{\mu r} \psi_p = \lambda \psi_{u_\theta}, \\ -\mu r \frac{\partial^2 \psi_{u_\theta}}{\partial r^2} - \mu \frac{\partial \psi_{u_\theta}}{\partial r} + \frac{\mu}{r} \psi_{u_\theta} = \lambda \psi_p. \end{cases} \quad (21)$$

其对应的非零本征解为

$$\boldsymbol{\psi}_m(r) = \begin{Bmatrix} \psi_{u_\theta} \\ \psi_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 J_1(\lambda_m r) \\ C_1 \mu r \lambda_m J_1(\lambda_m r) \end{Bmatrix}. \quad (22)$$

将上式代入边界条件 (1), 则可得到

$$C_1 J_1(\lambda_m a) = 0. \quad (23)$$

由上式可解得 λ_m .

由于 λ_m 为实数, 且非零本征解总是以辛共轭的形式出现, 因此由非零本征解的线性组合表示的非零本征解的具体形式为

$$\mathbf{w}_{nz} = \sum_{m=1}^{\infty} (a_m e^{\lambda_m z} \boldsymbol{\psi}_m^{(\alpha)} + b_m e^{-\lambda_m z} \boldsymbol{\psi}_m^{(\beta)}). \quad (24)$$

1.5 端部条件和展开系数

取容器的半径 a 为特征长度, μ 为特征动力黏度, $\sqrt{b/g}$ 为特征时间, 将各物理量无量纲化. 以 R, Z 分别表示 r, z 方向的无量纲坐标; U_θ 表示 θ 方向的无量纲速度; $\bar{\tau}_{z\theta}$ 表示无量纲切应力. 容器的外形比 $A = h/a$ 也是容器的无量纲高度, 无量纲非零本征值为 $\eta_m = a\lambda_m$. 为了方便, 做如下约定: 下文中以 λ_m 表示无量纲非零本征值.

端部旋转问题的解应满足容器两端 ($Z = 0, Z = A$) 的两个端部速度条件:

$$\mathbf{q}_0(R) = \mathbf{q}(R)|_{Z=0}, \quad \mathbf{q}_A(R) = \mathbf{q}(R)|_{Z=A}. \quad (25)$$

将方程 (24) 代入边界条件 (25) 中得

$$\begin{cases} \mathbf{q}_0 = \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \mathbf{q}_m^{(\alpha)} + b_m \mathbf{q}_m^{(\beta)}), \\ \mathbf{q}_A = \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \mathbf{q}_m^{(\alpha)} e^{\lambda_m^{(\alpha)} A} + b_m \mathbf{q}_m^{(\beta)} e^{\lambda_m^{(\beta)} A}), \end{cases} \quad (26)$$

式中 $\mathbf{q}_m^{(\alpha)}, \mathbf{q}_m^{(\beta)}$ 分别为 $\boldsymbol{\psi}_m^{(\alpha)}, \boldsymbol{\psi}_m^{(\beta)}$ 中的速度对应项. 为了求解展开系数 a_m, b_m , 对上式运用式 (15) 中的辛正交共轭关系. 可以得到一个由无限多个方程构成的线性方程组, 求解此方程组, 可得到展开系数 $a_m, b_m (m=0, 1, 2, \dots)$, 即

$$\sum_m A_{mj}^{(k)} a_m + \sum_m B_{mj}^{(k)} b_m = Q_j^{(k)}, \quad k = 1, 2; j = 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots \quad (27)$$

式 (27) 中的系数表达式为

$$\begin{aligned} A_{mj}^{(1)} &= \int_0^1 \mathbf{p}_j^{(\alpha)} \cdot \mathbf{q}_m^{(\alpha)} dr, \quad A_{mj}^{(2)} = \int_0^1 \mathbf{p}_j^{(\beta)} \cdot \mathbf{q}_m^{(\alpha)} e^{\lambda_m^{(\alpha)} A} dr, \quad B_{mj}^{(1)} = \int_0^1 \mathbf{p}_j^{(\alpha)} \cdot \mathbf{q}_m^{(\beta)} dr, \quad B_{mj}^{(2)} = \int_0^1 \mathbf{p}_j^{(\beta)} \cdot \mathbf{q}_m^{(\beta)} e^{\lambda_m^{(\beta)} A} dr, \\ Q_j^{(1)} &= \int_0^1 \mathbf{p}_j^{(\alpha)} \cdot \mathbf{q}_0 dr, \quad Q_j^{(2)} = \int_0^1 \mathbf{p}_j^{(\beta)} \cdot \mathbf{q}_A dr. \end{aligned}$$

将展开式 (26) 在 N 项后截断, 得到一个由 $2N$ 个方程组成的方程组 (27). 求解该方程组, 可解出 $2N$ 个展开系数 $a_m, b_m (m = 1, 2, \dots, N)$, 从而得到问题的近似解. 在实际计算中, N 越大, 所得近似解的精度越高. 定义平均误差为 $e = \left(\sum_{k=1}^M |U_{\theta}(R_k)|_{Z=0} - U_{\theta}|_{Z=0} \right) / M$, 式中 $U_{\theta}(R_k)|_{Z=0}$ 表示计算得到的速度, $U_{\theta}|_{Z=0}$ 表示给定的边界速度. 取 $M = 100$, 这表示在 $R \in [0, 1)$ 区间上取 100 个等分点 ($R=1$ 点除外是因为该点速度自动为零). 当 $N = 50$ 时, 本文中所给算例的平均误差均小于 0.02, 因此在计算中取 $N = 50$.

2 计算结果及分析

2.1 单端旋转的无限长容器内的流动

考虑单端旋转的无限长圆柱形容器内的流动, 容器左端旋转, 则端部条件为

$$\mathbf{q}_{Z=0}(R) = \{0, R, 0\}^T, \quad \mathbf{q}_{Z=\infty}(R) = \{0, 0, 0\}^T. \quad (28)$$

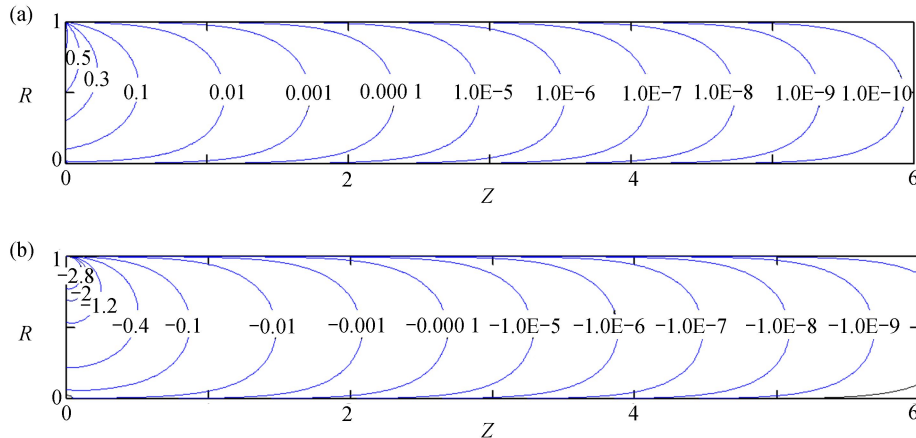


图2 无限长容器内的流动: (a) 速度 U_{θ} 等高线; (b) 应力 $\bar{\tau}_{z\theta}$ 等高线

Fig. 2 The flow in the semi-infinite cylindrical container: (a) the contours of velocity U_{θ} ; (b) the contours of stress $\bar{\tau}_{z\theta}$

图2给出了距离旋转端 $Z = 6$ 的距离范围内, 容器内流体的速度、应力等高线. 从图中可以看出, 在旋转端与容器壁面交界处附近区域, 流体的速度较大, 而在远离旋转端区域, 流体的速度迅速减小, 这说明了 Stokes 流问题中边界的影响不能及远的特点. 端部旋转时, 虽然端部的速度 $U_{\theta}(U_{\theta} = R)$ 随着 R 的增加而增大, 但在 $R = 0$ 处速度为零, 且由于圆柱形容器的壁面是静止的, 因此在容器内, 横截面上流体速度的最大值在 $0 < R < 1$ 区域中的某一位置. 从图2可以看出, 横截面上流体速度最大值的位置随着距离旋转端距离的增大而逐渐向容器内部移动, 在 $Z = 1$ 位置, 流体速度的最大值移动到 $R \approx 1/2$ 位置, 并且在 $Z > 1$ 区域, 一直稳定在此位置. 事实上, 由式 (24) 可以看出, 容器内远离端部边界处, 流动是由低阶项决定的, 即 $a_1 e^{\lambda_1 \tau} \boldsymbol{\psi}_1^{(\alpha)}$ 的最大值位置位

于 $R \approx 1/2$ 处. 应力 $\bar{\tau}_{z\theta}$ 的整体分布与速度类似, 最大值位于旋转端部与容器壁面交界处, 在远离旋转端部区域, 横截面上最大应力位于 $R \approx 1/2$ 附近. 这是因为在交界处, 旋转端部的速度为 $U_{\theta|_{R=1}} = 1$, 静容器的壁面速度为零, 流体的速度由 $U_{\theta|_{R=1}} = 1$ 快速降为零, 从而使交界处的速度梯度最大; 随着距离交界处的距离增大, 流体的速度梯度越来越小, 应力 $\bar{\tau}_{z\theta}$ 也随之减小, 并且横截面上应力的最大值也稳定在固定位置.

2.2 两端部同向同速旋转的容器内的流动

考虑两端部同向旋转的圆柱形容器内的流动, 两端部旋转的角速度为 $\Omega_{Z=0} = \Omega_{Z=A} = 1$, 则端部条件为

$$\mathbf{q}_{Z=0}(R) = \{0, R, 0\}^T, \mathbf{q}_{Z=A}(R) = \{0, R, 0\}^T. \tag{29}$$

分别取容器的外形比(无量纲高度) $A = 1, 2, 6$, 计算流场的速度分布情况. 图 3 给出了不同外形比 A 时, 流场速度 U_{θ} 的等高线图. 从图中可以看出, 与一端旋转的无限长圆柱形容器内的流动相似, 速度 U_{θ} 随着距离端部距离的增加而迅速减小, 当容器外形比 A 增加时, 旋转端部对距离端部较远处的流动影响较小, 并且在距离端部单位距离内, 速度 U_{θ} 均衰减到 2% 左右. 值得注意的是: 虽然流场中的流动是由于两端部同步同速旋转而引起的, 但是, 流场内的流动并不是与端部边界的运动相一致的, 而是沿着轴向衰减, 远离端部处, 速度沿着径向呈类似于抛物线分布; 在流场内部, 速度均不为零; 在半径 $R \approx 0.5$ 的环形面附近位置, 流体的速度最大. 此外, 容器两端部同向旋转时, 容器内流体的速度分布关于 $Z = A/2$ 对称分布.

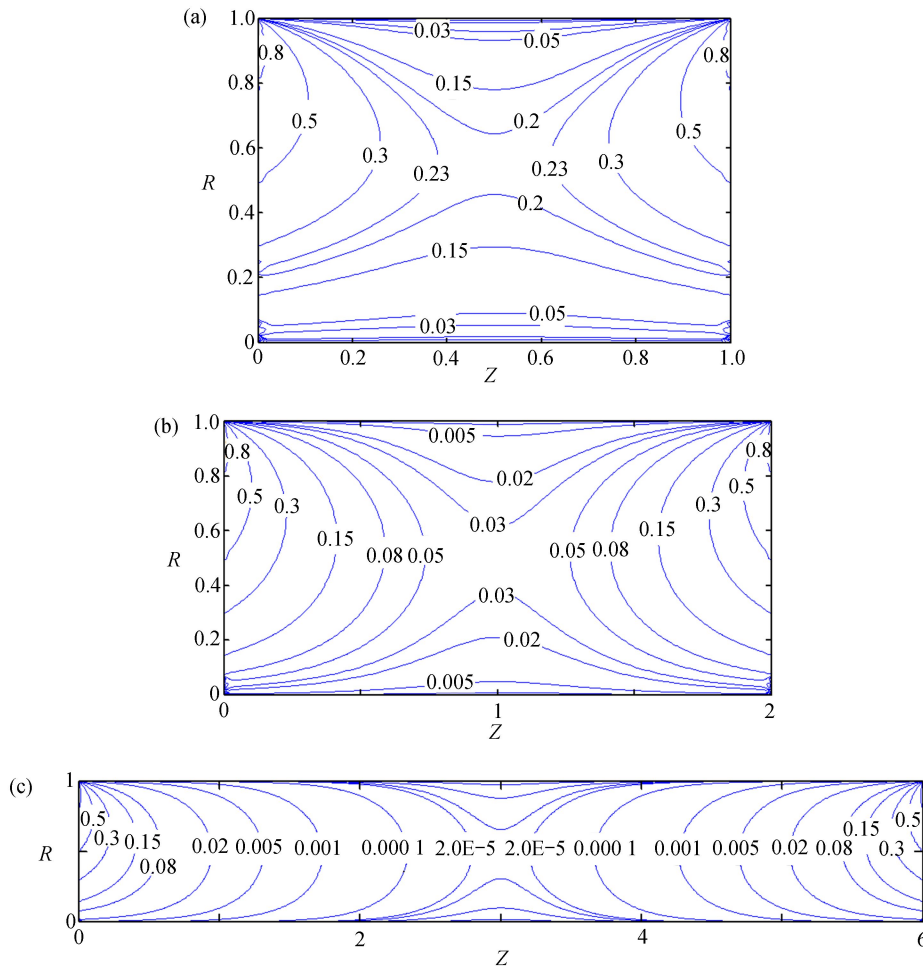


图 3 两端部以角速度 $\Omega = 1$ 同向旋转时, 不同外形比的容器内流动速度 U_{θ} 的等高线: (a) $A=1$; (b) $A=2$; (c) $A=6$
 Fig. 3 The contours of velocity U_{θ} in cylindrical containers with two ends rotating at the same angular velocity $\Omega = 1$ and different geometric aspect ratios: (a) $A=1$; (b) $A=2$; (c) $A=6$

2.3 两端部反向同速旋转的容器内的流动

考虑两端部反向旋转的圆柱形容器内的流动. 两端部旋转角速度 $-\Omega_{Z=0} = \Omega_{Z=A} = 1$, 问题的端部条件为

$$\mathbf{q}_{Z=0}(R) = \{0, -R, 0\}^T, \mathbf{q}_{Z=A}(R) = \{0, R, 0\}^T. \quad (30)$$

与两端部同向同速旋转的容器内的流动问题相同, 分别取容器的外形比(无量纲高度) $A = 1, 2, 6$, 计算流场的速度分布情况. 图4给出了 $A = 1, 2, 6$ 时, 流场中速度 U_θ 的等高线图. 由图3和图4可以看出, 两端部反向旋转与同向旋转两种情况下, 流场的速度分布既有相似之处, 也有明显的不同. 相似之处在于速度 U_θ 随距离边界距离的增加而迅速减小, 并且在远离端部的地方, 流体的速度最大值的位置在半径 $R \approx 0.5$ 环形面位置. 不同之处在于: 首先, 两端部反向旋转问题中, 在 $Z = A/2$ 截面上, 流体速度 $U_\theta = 0$, 此截面也是左右两部分流体运动方向不同的分界面, 而在两端部同向运动问题中, 不存在这样一个截面. 其次, 在两端部反向旋转问题中, 整个流场中的流体运动速度是关于 $Z = A/2$ 截面反对称分布; 而在两端部同向旋转问题中, 整个流场速度关于 $Z = A/2$ 截面对称分布.

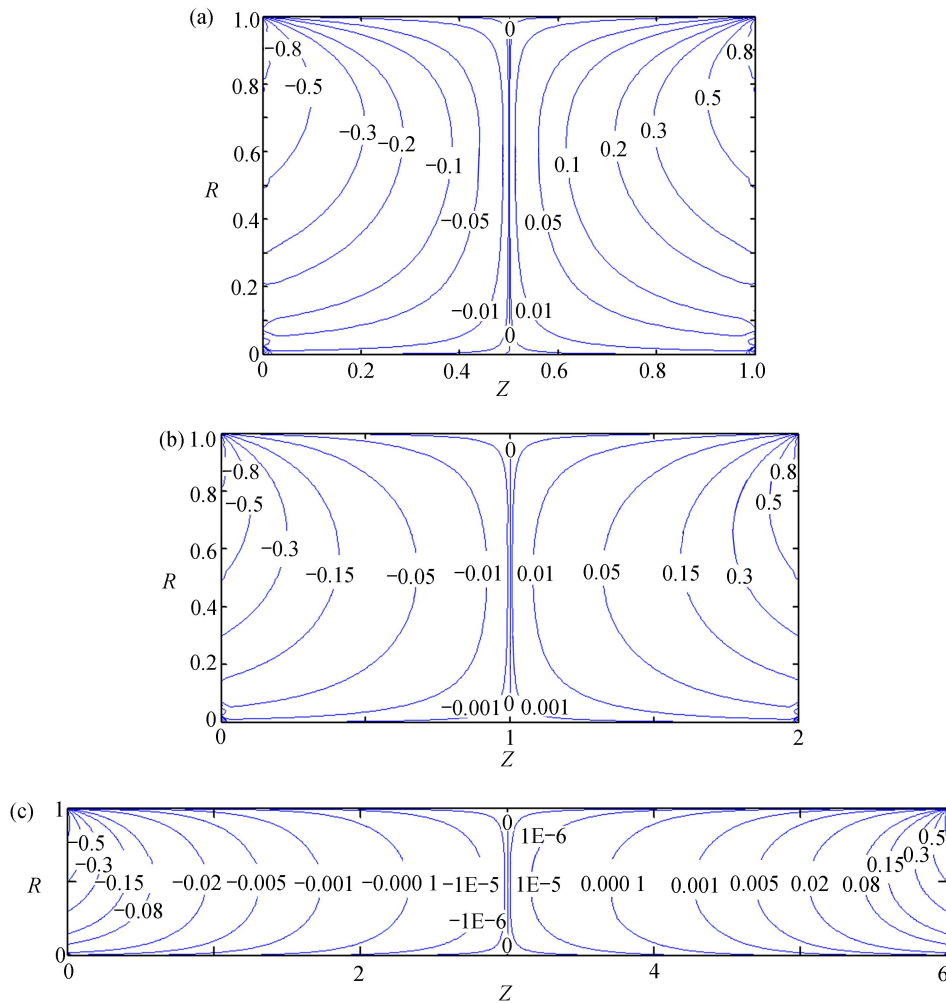


图4 两端部以角速度 $\Omega = 1$ 反向旋转时, 不同外形比的容器内流动速度 U_θ 的等高线: (a) $A=1$; (b) $A=2$; (c) $A=6$
 Fig. 4 The contours of velocity U_θ in cylindrical containers with two ends counter rotating at angular velocity $\Omega = 1$ and different geometric aspect ratios: (a) $A=1$; (b) $A=2$; (c) $A=6$

2.4 端部为应力条件时容器内的流动

考虑一端旋转的无限长圆柱形容器内的流动. 容器左端旋转、右端静止. 问题的端部条件以应力形式给出:

$$\mathbf{p}_{Z=0}(R) = \{0, (-4(R-0.5)^2 + 1)R, 0\}^T, \mathbf{q}_{Z=\infty}(R) = \{0, 0, 0\}^T. \quad (31)$$

图5给出了端部剪切应力以抛物线形式给出时, 流场的速度和应力分布情况. 由图中可以看出, 端部为应力条件时, 流场的速度和应力的衰减特性、远离端部边界处的速度和应力分布特性与端部为速度条件时非常相似. 事实上, 对于容器中的低 Reynolds 数流而言, 无论端部为速度条件还是应力条件, 它们均是为流体的运

动提供动力, 而 Stokes 流本身的特性决定了流场速度和应力的分布特性.

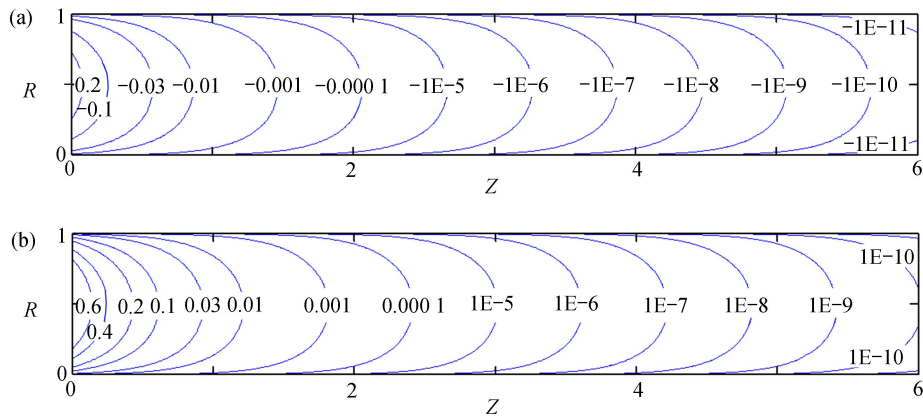


图 5 端部应力条件时, 外形比为 $A = 6$ 的容器内的流动: (a) 速度 U_θ 等高线; (b) 应力 $\bar{\tau}_{z\theta}$ 等高线

Fig. 5 With stress condition at the end, the flow in the cylindrical container for $A = 6$: (a) the contours of velocity U_θ ; (b) the contours of stress $\bar{\tau}_{z\theta}$

3 结 论

本文通过将 z 坐标模拟为时间, 建立 Hamilton 对偶方程. 利用本征解空间的完备性和本征解之间的共轭辛正交关系, 给出了问题解的展开形式, 并求得问题的解. 对不同端部旋转条件下的圆柱形容器内流体的流动情况的研究结果显示:

1) 边界对容器内流体速度和应力的影响随着距离边界距离的增加而减弱. 容器的外形比 A 越大, 旋转端部对容器内部流体的影响就越小, 反之则越大.

2) 容器两端部同向旋转时, 容器内流体的速度分布关于 $Z = A/2$ 对称分布, 且容器内流体的速度均不为零; 而容器两端部反向旋转时, 流场的速度关于 $Z = A/2$ 反对称分布, 且在横截面 $Z = A/2$ 上, 流体的流动速度为零.

3) 容器端部旋转时, 流场内部的流动并不是与端部边界的运动同步, 流体最大速度在径向的位置随着距离端部距离的增加而逐渐向流场内部移动, 远离端部边界处, 流动速度的最大值位于半径 $R \approx 0.5$ 处.

4) 当端部条件以应力形式给出时, 流场的速度和应力分布与端部为速度条件时相似.

参考文献 (References):

- [1] PAO H P. Numerical solution of the Navier-Stokes equations for flows in the disk-cylinder system[J]. *Physics of Fluids*, 1972, **15**(1): 4-11.
- [2] BERTELÀ M, GORI F. Laminar flow in a cylindrical container with a rotating cover[J]. *Journal of Fluids Engineering-Transactions of the ASME*, 1982, **104**(1): 31-39.
- [3] DUCK P W. On the flow between two rotating shrouded discs[J]. *Computers & Fluids*, 1986, **14**(3): 183-196.
- [4] DIJKSTRA D, VAN HEIJST G J F. The flow between two finite rotating disks enclosed by a cylinder[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1983, **128**: 123-154.
- [5] VOGEL H U. Experimentelle ergebnisse über die laminare strömung in einem zylindrischen gehäuse mit darin rotierender scheinbe[D]. PhD Thesis. Göttingen: Max-Planck-Inst für Strömungsforschung, 1968.
- [6] ESCUDIER M P. Observation of the flow produced in a cylindrical container by a rotating endwall[J]. *Experiments in Fluids*, 1984, **2**: 189-196.
- [7] VALENTINE D T, JAHNKE C C. Flows induced in a cylinder with both end walls rotating[J]. *Physics of Fluids*, 1994, **6**(8): 2702-2710.
- [8] GELFGAT A Y, BAR-YOSEPH P Z, SOLAN A. Stability of combined swirling flow with and without vortex breakdown[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1996, **311**(1): 1-36.
- [9] KAHOUADJI L, WITKOWSKI L M. Free surface due to a flow driven by a rotating disk inside a vertical cyl-

- indrical tank: axisymmetric configuration[J]. *Physics of Fluids*, 2014, **26**: 072105.
- [10] MUKHERJEE A, STEINBERG V. Von Kármán swirling flow between a rotating and a stationary smooth disk: experiment[J]. *Physical Review Fluids*, 2018, **3**: 014102.
- [11] LIM C W, XU X S. Symplectic elasticity: theory and applications[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2010, **63**(5): 050802.
- [12] 钟万勰. 弹性力学求解新体系[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1995. (ZHONG Wanxie. *A New Systematic Methodology for Theory of Elasticity*[M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1995. (in Chinese))
- [13] ZHONG W X. *Duality System in Applied Mechanics and Optimal Control*[M]. New York: Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [14] 胡启平, 陈哲, 周娟. Hamilton力学下框筒结构剪滞翘曲位移模式研究[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(4): 374-381. (HU Qiping, CHEN Zhe, ZHOU Juan. Research on shear lag warping displacement modes of frame-tube structures based on the Hamiltonian mechanics[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(4): 374-381.(in Chinese))
- [15] 满淑敏, 高强, 钟万勰. 非完整约束Hamilton动力系统保结构算法[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(6): 581-590. (MAN Shumin, GAO Qiang, ZHONG Wanxie. A structure-preserving algorithm for Hamiltonian systems with nonholonomic constraints[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(6): 581-590.(in Chinese))
- [16] 张俊霖, 倪一文, 李庆东, 等. 吸湿老化影响下天然纤维增强复合圆柱壳屈曲分析的辛方法[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(12): 1238-1247. (ZHANG Junlin, NI Yiwen, LI Qingdong, et al. A symplectic approach for buckling analysis of natural fiber reinforced composite shells under hygrothermal aging[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(12): 1238-1247.(in Chinese))
- [17] 张鸿庆, 阿拉坦仓, 钟万勰. Hamilton体系与辛正交系的完备性[J]. 应用数学和力学, 1997, **18**(3): 217-221. (ZHANG Hongqing, ALATANCANG, ZHONG Wanxie. The Hamiltonian system and completeness of symplectic orthogonal system[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1997, **18**(3): 217-221.(in Chinese))