http://www.applmathmech.cn

基于偶应力弹性梯度理论的饱和孔隙介质中 Rayleigh 波的传播特性*

李国强,　郑　佩,　张克明

(上海理工大学 机械工程学院, 上海 200093)

摘要:　基于偶应力弹性梯度理论,研究了饱和孔隙介质中 Rayleigh 波的传播特性.首先,基于偶应力理论建立了包含材料内禀长度的波动方程,并在频域内通过位移场的势函数分解,将两组耦合的波动方程解耦为 4 个标量的 Helmholtz 方程,分别控制 P_1 波、P_2 波、SV 波和 SH 波的传播.进一步,针对 Rayleigh 波,通过求解 Helmholtz 方程的特征值问题,确定了势函数的具体形式.然后,通过引入边界条件,求解了 Rayleigh 波的传播特性.最后,通过数值算例,研究了材料内禀长度对 Rayleigh 波的传播特性的影响规律.

关　键　词:　孔隙介质;　Rayleigh 波;　偶应力;　弹性梯度理论;　归一化位移

中图分类号:　O347.4$^+$1　　**文献标志码:**　A　　DOI: 10.21656/1000-0887.450259

Propagation Characteristics of Rayleigh Waves in Saturated Porous Media Based on the Couple-Stress Elastic Gradient Theory

LI Guoqiang,　ZHENG Pei,　ZHANG Keming

(*School of Mechanical Engineering*, *University of Shanghai for Science and Technology*, *Shanghai* 200093, *P.R.China*)

Abstract: The propagation characteristics of Rayleigh waves in saturated pore media were investigated based on the couple-stress poroelastic gradient theory. Firstly, the fluctuation equations containing material intrinsic lengths were established based on the couple-stress theory, and the 2 sets of coupled fluctuation equations were decoupled into 4 scalar Helmholtz equations through the potential function decomposition of the displacement field to control the propagation of the P_1, P_2, SV and SH waves, respectively. Further, for Rayleigh waves, the specific form of the potential function was determined through solution of the eigenvalue problem of the Helmholtz equation. Then, the propagation characteristics of Rayleigh waves were solved under introduced boundary conditions. Finally, the influence rule of the material intrinsic length on the propagation characteristics of Rayleigh waves was investigated by numerical examples.

Key words: porous material; Rayleigh wave; couple stress; elastic gradient theory; normalized displacement

* **收稿日期:**　2024-09-25; **修订日期:**　2024-10-25

作者简介:　李国强(1997—),男,硕士生(E-mail: 1767445763@qq.com);
郑佩(1980—),男,副教授,硕士生导师(通讯作者. E-mail: aliaspei@usst.edu.cn);
张克明(1983—),男,副教授,硕士生导师(E-mail: zhangkeming@usst.edu.cn).

引用格式:　李国强, 郑佩, 张克明. 基于偶应力弹性梯度理论的饱和孔隙介质中 Rayleigh 波的传播特性[J]. 应用数学和力学, 2025, **46**(10): 1329-1341.

0 引 言

Rayleigh 波,一种沿半空间表面传播的面波,由 Rayleigh 于 1885 年通过理论预测得出,故被称为 Rayleigh 波[1].由于 Rayleigh 波的能量集中在表面附近,其传递的能量大,且具有低衰减率的特性,因此在地震中对地面建筑物的破坏性比体波更大.正是由于其沿表面传播且衰减率低的特性,Rayleigh 波在地质勘探、地震反演和非接触无损检测等领域具有重要的应用价值[2].

经典的小变形线弹性理论通过引入位移的一阶梯度来度量固体介质的变形,而在小变形的弹性梯度理论中,还需引入位移的高阶梯度才能完全描述固体介质的变形.作为弹性梯度理论的一种,偶应力弹性梯度理论是通过引入位移梯度的旋度来刻画固体介质的变形.偶应力弹性梯度理论起源于二十世纪初,Voigt[3] 和 Cosserat 等[4]最先引入位移的高阶梯度研究了弹性固体的变形.随后,在 Toupin[5-6]、Koiter[7] 以及 Mindlin 等[8]学者的不懈努力下,偶应力弹性梯度理论的框架在二十世纪中叶初具雏形.二十世纪八九十年代,随着纳米尺度材料的广泛应用,偶应力弹性梯度理论又重回研究者的视野并再次成为研究的热点.例如,Yang 等[9]通过假设偶应力是对称的,并引入一个材料内禀长度,简化了这一理论.但是,之前的研究仅局限于单相的固体介质,而针对两相饱和孔隙介质的研究较少.鉴于此, 本课题组基于不可逆热力学框架,通过引入固体骨架速度旋度的梯度及与其功共轭的偶应力,建立了饱和孔隙介质大变形的弹性梯度理论,并进一步得到小变形条件下的弹性梯度理论,简化了该理论[10].

自 Biot[11-12] 建立两相饱和孔隙介质弹性波传播理论以来,许多学者基于该经典理论研究了饱和孔隙介质中 Rayleigh 波的传播特性.部分学者使用非局部理论来研究 Rayleigh 波的传播特性[13-16].但是,基于弹性梯度理论对弹性波传播特性的研究较少.最近,Su 等[17]基于 Biot 理论框架推导了偶应力理论并引入了高阶微观效应,研究了弹性波的反射和折射问题.本文将基于本课题组提出的偶应力弹性梯度理论,研究 Rayleigh 波在饱和孔隙介质中的传播特性.通过数值算例,揭示材料内禀长度对 Rayleigh 波的传播速度、衰减特性以及质点运动轨迹的影响规律.

1 几 何 方 程

在小变形的偶应力理论中,引入一个与线弹性理论中相同的二阶应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$(与应力张量功共轭),定义为

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \frac{1}{2}(\nabla \otimes \boldsymbol{u}_{\mathrm{s}} + \boldsymbol{u}_{\mathrm{s}} \otimes \nabla)\,. \tag{1}$$

此外,还引入了一个与变形有关的二阶曲率张量 $\boldsymbol{\chi}$(与偶应力张量功共轭),定义为

$$\boldsymbol{\chi} = \nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \times \boldsymbol{u}_{\mathrm{s}}) \otimes \nabla, \tag{2}$$

其中,$\boldsymbol{u}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{u}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x},t)$ 为固体骨架的位移;∇ 为 nabla 算子.

2 运 动 方 程

根据动量定理和动量矩定理,可得如下形式的运动方程:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla + \rho_{\mathrm{s}}(1-\phi)(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{a}_{\mathrm{s}}) + \rho_{\mathrm{f}}\phi(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{a}_{\mathrm{f}}) = \boldsymbol{0}, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla - \boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}, \tag{4}$$

其中,$\boldsymbol{f}$ 为作用在单位质量上的体力;ρ_{s} 为组成固体骨架的固相物质的密度,ρ_{f} 为孔隙流体的密度;$\boldsymbol{a}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x},t) \equiv \dot{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{s}}$ 和 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{x},t) \equiv \dot{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{f}}$ 分别为固体骨架和孔隙流体的加速度;$\boldsymbol{\sigma}$ 为应力张量;$\boldsymbol{\mu}$ 为二阶偶应力张量;$\boldsymbol{I}$ 为二阶单位张量.将二阶应力张量分解成对称张量 $\boldsymbol{\tau}$ 和反对称张量 $\boldsymbol{\tau}^0$ 之和

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}^0, \tag{5}$$

其中

$$\boldsymbol{\tau} \equiv \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}})\,,\ \boldsymbol{\tau}^0 \equiv \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}})\,. \tag{6}$$

将式(5)代入式(4),得

$$\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla - \boldsymbol{\tau}^0 \times \boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}. \tag{7}$$

接下来,将二阶偶应力张量分解为偏量和球量之和

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{D}} + \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{I}, \tag{8}$$

其中,$\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{D}}$ 为二阶偶应力张量的偏斜部分.再将式(8)代入式(7)中并取其旋度,得

$$\boldsymbol{\tau}^0 \cdot \nabla = \frac{1}{2}\nabla \times (\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{D}} \cdot \nabla). \tag{9}$$

最后,将式(9)代入式(3),得

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla + \frac{1}{2}\nabla \times (\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{D}} \cdot \nabla) + \rho_{\mathrm{s}}(1-\phi)(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{a}_{\mathrm{s}}) + \rho_{\mathrm{f}}\phi(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{a}_{\mathrm{f}}) = \boldsymbol{0}. \tag{10}$$

由式(10)可见,应力张量的反对称部分以及偶应力的球量部分并未出现在运动方程的表达式中,因此该理论也常被称为不定偶应力理论(indeterminate couple-stress theory).

3　本构方程

在笔者前期的研究工作中,基于不可逆热力学框架,在大变形的条件下,通过引入固体骨架速度旋度的梯度及与其功共轭的偶应力,建立了各向同性多孔固体的偶应力弹性梯度理论,并将该理论应用到小变形的条件下,得到了如下形式的本构方程[10]:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \hat{W}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\chi}, \varphi_{\mathrm{R}})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{D}} = \frac{\partial \hat{W}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\chi}, \varphi_{\mathrm{R}})}{\partial \boldsymbol{\chi}}, \tag{12}$$

$$p = \frac{\partial \hat{W}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\chi}, \varphi_{\mathrm{R}})}{\partial \varphi_{\mathrm{R}}}, \tag{13}$$

其中,$\varphi_{\mathrm{R}} = \phi_{\mathrm{R}} - \phi_0$ 为孔隙度的变化,ϕ_{R} 为 Lagrange 孔隙度,ϕ_0 为初始孔隙度;$\hat{W}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\chi}, \varphi_{\mathrm{R}}) = W_{\mathrm{s}}$ 为固体骨架的应变能密度函数.

对于各向同性弹性体,应变能密度 W_{s} 的表达形式如下:

$$W_{\mathrm{s}} = \frac{1}{2}\lambda(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon})^2 + \frac{1}{2}N(\varphi_{\mathrm{R}} - b\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon} + 2\Theta\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{\chi} + 2\Theta'\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{\chi}^{\mathrm{T}}, \tag{14}$$

其中,μ,λ,b 和 N 为弹性体的弹性常数;Θ 和 Θ' 为偶应力理论中引入额外的弹性常数(实际上,Θ' 不出现在运动方程中).μ 和 λ 为经典弹性理论中的 Lamé 常数,

$$\lambda = K - \frac{2}{3}G,\ \mu = G, \tag{15}$$

其中,K 和 G 分别为排水条件下的体积模量和剪切模量.另外,Biot 系数 b 和常数 N 由下式确定

$$b = 1 - \frac{K}{K_{\mathrm{s}}},\ \frac{1}{N} = \frac{b - \phi_0}{K_{\mathrm{s}}}, \tag{16}$$

其中,K_{s} 为组成固体骨架的固相物质的体积模量.

此外,由式(14)可知 W_{s} 是关于 $\boldsymbol{\varepsilon}$,$\boldsymbol{\chi}$,φ_{R} 的二次型.为满足 W_{s} 的正定性条件,还要求相应系数满足

$$\mu > 0,\ \lambda + \frac{2}{3}\mu > 0,\ N > 0,\ \Theta > 0,\ -1 < \Theta'/\Theta < 1. \tag{17}$$

最后将式(14)代入本构方程,可得

$$\boldsymbol{\tau} = (\lambda\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon} - bp)\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{18}$$

$$p = N(\varphi_{\mathrm{R}} - b\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}), \tag{19}$$

$$\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{D}} = 4(\Theta\boldsymbol{\chi} + \Theta'\boldsymbol{\chi}^{\mathrm{T}}), \tag{20}$$

以上即为小变形条件下偶应力弹性梯度理论的本构方程.

需要说明的是偶应力张量是否对称,还存在争议,例如,Yang 等[9]、Münch 等[18]假设偶应力张量是对称的,而 Hadjesfandiari 等[19-20]认为偶应力是反对称的,因此本文并未对偶应力是否对称进行假设.

4 输 运 方 程

4.1 流体质量守恒

孔隙流体的运动由孔隙流体的质量守恒和 Darcy 定理来控制.首先,孔隙流体质量守恒方程由下式给出

$$\dot{m}_{\mathrm{f}} + \nabla\cdot \boldsymbol{w} = 0, \tag{21}$$

其中, $m_{\mathrm{f}} = \rho_{\mathrm{f}}\phi_0$ 为单位体积流体质量;$\boldsymbol{w} = \rho_{\mathrm{f}}\phi_0(\boldsymbol{v}^{\mathrm{f}} - \boldsymbol{v}^{\mathrm{s}})$ 为单位时间内流体质量通量.

4.2 Darcy 定理

在各向同性条件下,Darcy 定理由下式确定

$$\boldsymbol{q} = \frac{\mathscr{K}}{\eta}[-\nabla p + \rho_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{a}_{\mathrm{f}})], \tag{22}$$

式中, $\boldsymbol{q} \equiv \boldsymbol{w}/\rho_{\mathrm{f}}$ 为流体的体积通量;η 为流体黏度;p 为孔隙压力;$\mathscr{K}$ 为流体的渗透率,$\mathscr{K}$ 通常与孔隙率有关,在本文中 $\mathscr{K}$ 取为常数.

5 边 界 条 件

在弹性体的边界上,需要给定相应的边界条件.对于饱和孔隙介质还需给定两类不同的边界条件:机械边界条件(mechanical boundary conditions)和水力边界条件(hydraulic boundary conditions).

机械边界条件为[10]

$$\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{n} + \frac{1}{2}\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{D}}\cdot\nabla - \nabla\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{D}}_{\mathrm{n}}) = \bar{\boldsymbol{t}}_{\mathrm{n}} \quad \text{or} \quad \boldsymbol{u}_{\mathrm{s}} = \bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{s}}, \tag{23}$$

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n})(\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{n}) = \bar{\boldsymbol{m}}^{\mathrm{t}}_{\mathrm{s}} \quad \text{or} \quad (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n})\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{s}} = \bar{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{t}}_{\mathrm{s}}, \tag{24}$$

其中

$$\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{D}}_{\mathrm{n}} = \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{D}}\boldsymbol{n}), \tag{25}$$

$$\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{s}} \equiv \frac{1}{2}\nabla\times\boldsymbol{u}_{\mathrm{s}}, \tag{26}$$

式中, $\bar{\boldsymbol{t}}_{\mathrm{n}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{m}}^{\mathrm{t}}_{\mathrm{s}}$ 分别为边界上给定的拽力和偶应力矢量的切向分量;$\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{s}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{t}}_{\mathrm{s}}$ 分别为给定边界上的曲面位移和曲面旋转的切向分量.

水力边界条件为[10]

$$p = \bar{p} \quad \text{or} \quad \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n} = \bar{q}_{\mathrm{n}}, \tag{27}$$

其中, $\bar{p}$ 和 $\bar{q}_{\mathrm{n}}$ 分别为给定边界上的孔隙压力和流体通量的法向分量.

6 波动方程及其解耦

6.1 波动方程

不计体力,由几何方程、本构方程以及运动方程,可得如下形式的波动方程:

$$\mu\nabla^2\boldsymbol{u}_{\mathrm{s}} + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{s}} + \mu l^2\nabla^2\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u}_{\mathrm{s}} - b\nabla p = \rho_{\mathrm{s}}(1-\phi_0)\frac{\partial^2\boldsymbol{u}_{\mathrm{s}}}{\partial t^2} + \rho_{\mathrm{f}}\phi_0\frac{\partial^2\boldsymbol{u}_{\mathrm{f}}}{\partial t^2}, \tag{28}$$

$$\nabla p + \frac{\eta}{\mathscr{K}}\phi_0\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}_{\mathrm{f}}}{\partial t} - \frac{\partial\boldsymbol{u}_{\mathrm{s}}}{\partial t}\right) = -\rho_{\mathrm{f}}\frac{\partial^2\boldsymbol{u}_{\mathrm{f}}}{\partial t^2}, \tag{29}$$

其中, $\boldsymbol{u}_{\mathrm{s}}$ 和 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{f}}$ 分别为固体骨架和孔隙流体的位移矢量;$l = \sqrt{\Theta/\mu}$ 为材料内禀长度.

另外,根据质量守恒以及本构方程,还有

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-M\frac{\partial}{\partial t}[(b-\phi_0)\nabla\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{s}}+\phi_0\nabla\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{f}}], \tag{30}$$

其中,模数 M 定义为

$$\frac{1}{M}=\frac{1}{N}+\frac{\phi_0}{K_{\mathrm{f}}}. \tag{31}$$

对于简谐运动,假设其位移和孔压具有如下形式:

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}_{\mathrm{s}}(x,t)=\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{s}}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},\\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{f}}(x,t)=\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{f}}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},\\ p(x,t)=\bar{p}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},\end{cases} \tag{32}$$

其中,$\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{s}}(x)$,$\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{f}}(x)$ 及 $\bar{p}(x)$ 表示简谐波的振幅;ω 表示简谐波的圆频率.简单起见,在后续计算中将 $\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{s}}(x)$,$\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{f}}(x)$ 及 $\bar{p}(x)$ 简记为 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{s}}(x)$,$\boldsymbol{u}_{\mathrm{f}}(x)$ 及 $p(x)$.

将式(32)代入波动方程(28)和(29)并利用式(30),可得

$$\mu\nabla^2\boldsymbol{u}_{\mathrm{s}}+(\lambda+\mu-bM(\phi_0-b))\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{s}}+\phi_0 bM\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{f}}+\mu l^2\nabla^2\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u}_{\mathrm{s}}=-\omega^2(\rho_{\mathrm{s}}(1-\phi_0)\boldsymbol{u}_{\mathrm{s}}+\rho_{\mathrm{f}}\phi_0\boldsymbol{u}_{\mathrm{f}}), \tag{33}$$

$$M[(b-\phi_0)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{s}}+\phi_0\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{f}}]-\mathrm{i}\omega\frac{\eta}{\mathcal{K}}\phi_0\boldsymbol{u}_{\mathrm{s}}=-\omega^2\left(\rho_{\mathrm{f}}+\frac{\mathrm{i}}{\omega}\frac{\eta}{\mathcal{K}}\phi_0\right)\boldsymbol{u}_{\mathrm{f}}, \tag{34}$$

上式即为频域内的波动方程.

6.2　Helmholtz 分解

由矢量场的 Helmholtz 分解可知,任意一个矢量场可以分解为一个标量势的梯度和一个矢量的旋度之和,即

$$\boldsymbol{a}=\nabla\phi+\nabla\times\boldsymbol{\Phi},\ \nabla\cdot\boldsymbol{\Phi}=0. \tag{35}$$

在直角坐标系下,$\boldsymbol{\Phi}$ 可以进一步分解为两个相互垂直的分量[21],即

$$\boldsymbol{\Phi}=T\boldsymbol{e}_z+\nabla\times(J\boldsymbol{e}_z), \tag{36}$$

其中,T 与 J 为标量场,$\boldsymbol{e}_z$ 为 z 方向的单位基矢量.

利用式(36),式(35)可进一步表示为

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{H}+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{R}, \tag{37}$$

其中,$\boldsymbol{H}=\nabla\phi$;$\boldsymbol{Q}=\nabla\times\nabla\times(J\boldsymbol{e}_z)$;$\boldsymbol{R}=\nabla\times(T\boldsymbol{e}_z)$.第一项($\boldsymbol{H}$)表征 P 波(纵波)的运动,满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{H}\neq\boldsymbol{0}$,但$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{0}$;第二项($\boldsymbol{Q}$)表征 SV 波的运动,满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{0}$ 且$(\nabla\times\boldsymbol{Q})_z=\boldsymbol{0}$;第三项($\boldsymbol{R}$)表征 SH 波的运动,满足$(\nabla\times\boldsymbol{R})_z\neq\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{R}_z=\boldsymbol{0}$ 与$\nabla\cdot\boldsymbol{R}=\boldsymbol{0}$.

根据式(37),将位移场分解为

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{s}}=\nabla\varphi_{\mathrm{s}}+\nabla\times\nabla\times(\psi_{\mathrm{s}}\boldsymbol{e}_z)+\nabla\times(\xi_{\mathrm{s}}\boldsymbol{e}_z), \tag{38}$$

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{f}}=\nabla\varphi_{\mathrm{f}}+\nabla\times\nabla\times(\psi_{\mathrm{f}}\boldsymbol{e}_z)+\nabla\times(\xi_{\mathrm{f}}\boldsymbol{e}_z), \tag{39}$$

将式(38)和(39)代入式(33)和(34)中,可得

$$[\lambda+2\mu-bM(\phi_0-b)]\nabla^2\varphi_{\mathrm{s}}+\phi_0 bM\nabla^2\varphi_{\mathrm{f}}+\omega^2\rho_{\mathrm{s}}(1-\phi_0)\varphi_{\mathrm{s}}+\omega^2\rho_{\mathrm{f}}\phi_0\varphi_{\mathrm{f}}=0, \tag{40}$$

$$M(b-\phi_0)\nabla^2\varphi_{\mathrm{s}}+\phi_0 M\nabla^2\varphi_{\mathrm{f}}-\mathrm{i}\omega\frac{\eta}{\mathcal{K}}\phi_0\varphi_{\mathrm{s}}+\omega^2\left(\rho_{\mathrm{f}}+\frac{\mathrm{i}}{\omega}\frac{\eta}{\mathcal{K}}\phi_0\right)\varphi_{\mathrm{f}}=0, \tag{41}$$

$$\mu(1-l^2\nabla^2)\nabla^2\psi_{\mathrm{s}}+\omega^2\rho_{\mathrm{s}}(1-\phi_0)\psi_{\mathrm{s}}+\omega^2\rho_{\mathrm{f}}\phi_0\psi_{\mathrm{f}}=0, \tag{42}$$

$$-\mathrm{i}\omega\frac{\eta}{\mathcal{K}}\phi_0\psi_{\mathrm{s}}+\omega^2\left(\rho_{\mathrm{f}}+\frac{\mathrm{i}}{\omega}\frac{\eta}{\mathcal{K}}\phi_0\right)\psi_{\mathrm{f}}=0, \tag{43}$$

$$\mu(1-l^2\nabla^2)\nabla^2\xi_{\mathrm{s}}+\omega^2\rho_{\mathrm{s}}(1-\phi_0)\xi_{\mathrm{s}}+\omega^2\rho_{\mathrm{f}}\phi_0\xi_{\mathrm{f}}=0, \tag{44}$$

$$-\mathrm{i}\omega\frac{\eta}{\mathcal{K}}\phi_0\xi_{\mathrm{s}}+\omega^2\left(\rho_{\mathrm{f}}+\frac{\mathrm{i}}{\omega}\frac{\eta}{\mathcal{K}}\phi_0\right)\xi_{\mathrm{f}}=0, \tag{45}$$

其中,式(40)和(41)为 φ_{s}, φ_{f} 表示的耦合的波动方程组,控制 P 波的传播;式(42)和(43)为 ψ_{s},ψ_{f} 表示的耦合的波动方程组,控制 SV 波的传播;式(44)和(45)为 ξ_{s},ξ_{f} 表示的耦合的波动方程组,控制 SH 波的传播.接下来,我们将上述 3 组耦合形式的波动方程组解耦为 4 个标量的 Helmholtz 方程,分别控制 P_1 波、P_2 波、SV 波和 SH 波的传播.

首先,将波动方程(40)和(41)表示为如下的矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} [(\lambda+2\mu)+bM(b-\phi_0)]\nabla^2+\omega^2\rho_{\mathrm{s}}(1-\phi_0) & \phi_0 bM\nabla^2+\omega^2\rho_{\mathrm{f}}\phi_0 \\ M(b-\phi_0)\nabla^2-\mathrm{i}\omega\dfrac{\eta}{\mathcal{K}}\phi_0 & \phi_0 M\nabla^2+\omega^2\left(\rho_{\mathrm{f}}+\dfrac{\mathrm{i}}{\omega}\dfrac{\eta}{\mathcal{K}}\phi_0\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_{\mathrm{s}}\\ \varphi_{\mathrm{f}}\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}. \tag{46}$$

上式的特征方程为[10]

$$\begin{vmatrix} [(\lambda+2\mu)+bM(b-\phi_0)]k_{\mathrm{p}}^2-\omega^2\rho_{\mathrm{s}}(1-\phi_0) & \phi_0 bMk_{\mathrm{p}}^2-\omega^2\rho_{\mathrm{f}}\phi_0 \\ M(b-\phi_0)k_{\mathrm{p}}^2+\mathrm{i}\omega\dfrac{\eta}{\mathcal{K}}\phi_0 & \phi_0 Mk_{\mathrm{p}}^2-\omega^2\left(\rho_{\mathrm{f}}+\dfrac{\mathrm{i}}{\omega}\dfrac{\eta}{\mathcal{K}}\phi_0\right) \end{vmatrix}=0, \tag{47}$$

即

$$(\lambda+2\mu)M\phi_0\left(\frac{k_{\mathrm{p}}}{\omega}\right)^4-\left[(\lambda+2\mu+b^2M)\left(\rho_{\mathrm{f}}+\frac{\mathrm{i}}{\omega}\frac{\eta}{\mathcal{K}}\phi_0\right)-\phi_0M(2b\rho_{\mathrm{f}}-\rho_0)\right]\left(\frac{k_{\mathrm{p}}}{\omega}\right)^2+$$

$$\rho_{\mathrm{f}}(1-\phi_0)\rho_{\mathrm{s}}+\rho_0\mathrm{i}\omega\frac{\eta}{\mathcal{K}}\phi_0=0. \tag{48}$$

由式(48),可得

$$\left(\frac{k_{\mathrm{p}1,2}}{\omega}\right)^2=\frac{\rho_{1,2}}{\lambda+2\mu}, \tag{49}$$

其中

$$\begin{cases}\rho_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ a=1,\\ b=-\dfrac{(\lambda+2\mu+b^2M)(\rho_{\mathrm{f}}+(\mathrm{i}/\omega)(\eta/\mathcal{K})\phi_0)}{M\phi_0}+2b\rho_{\mathrm{f}}-\rho_0,\\ c=\dfrac{(\lambda+2\mu)[\rho_{\mathrm{f}}(1-\phi_0)\rho_{\mathrm{s}}+\rho_0\mathrm{i}\omega(\eta/\mathcal{K})\phi_0]}{M\phi_0},\ \rho_0=\rho_{\mathrm{s}}(1-\phi_0)+\rho_{\mathrm{f}}\phi_0,\end{cases} \tag{50}$$

$k_{\mathrm{p}1}$ 和 $k_{\mathrm{p}2}$ 分别为 P_1波(快纵波)和 P_2波(慢纵波)的波数(复数).另外,P_1波和 P_2波的波速 $c_{\mathrm{p}1}$ 和 $c_{\mathrm{p}2}$ 可由下式确定

$$c_{\mathrm{p}1,2}=\frac{\omega}{\mathrm{Re}(k_{\mathrm{p}1,2})}. \tag{51}$$

由式(41)和式(51)可见,材料内禀长度 l 与 P 波的传播特性无关.

将对应于式(49)的特征值的特征向量取为

$$\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}=(1,\Lambda_1),\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}=(1,\Lambda_2), \tag{52}$$

其中

$$\Lambda_{1,2}=-\frac{M(b-\phi_0)(k_{\mathrm{p}1,2}/\omega)^2+(\mathrm{i}/\omega)(\eta/\mathcal{K})\phi_0}{\phi_0M(k_{\mathrm{p}1,2}/\omega)^2-(\rho_{\mathrm{f}}+(\mathrm{i}/\omega)(\eta/\mathcal{K})\phi_0)}. \tag{53}$$

另外,由式(41)和(42),有

$$(\lambda+2\mu)\nabla^2\varphi_{\mathrm{s}}+\omega^2\left[\rho_{\mathrm{s}}(1-\phi_0)-b\frac{\mathrm{i}}{\omega}\frac{\eta}{\mathcal{K}}\phi_0\right]\varphi_{\mathrm{s}}-$$

$$\omega^2\left[\rho_{\mathrm{f}}\phi_0-b\left(\rho_{\mathrm{f}}-b\frac{\mathrm{i}}{\omega}\frac{\eta}{\mathcal{K}}\phi_0\right)\right]\varphi_{\mathrm{f}}=0. \tag{54}$$

由于存在两种 P 波,所以将 φ_{s} 分解为

$$\varphi_{\mathrm{s}} = \varphi_{\mathrm{p1}} + \varphi_{\mathrm{p2}}, \tag{55}$$

利用式(52),可将 φ_{f} 分解为

$$\varphi_{\mathrm{f}} = \Lambda_1 \varphi_{\mathrm{p1}} + \Lambda_2 \varphi_{\mathrm{p2}}. \tag{56}$$

将式(55)和(56)代入式(54)中并利用特征方程(47),可得两个独立标量的 Helmholtz 方程(分别控制 P_1 波和 P_2 波的传播),即

$$\nabla^2 \varphi_{\mathrm{p1}} + k_{\mathrm{p1}}^2 \varphi_{\mathrm{p1}} = 0, \tag{57}$$

$$\nabla^2 \varphi_{\mathrm{p2}} + k_{\mathrm{p2}}^2 \varphi_{\mathrm{p2}} = 0. \tag{58}$$

同理,将波动方程(42)和(43)表示为如下的矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \mu \nabla^2 - \mu l^2 \nabla^4 + \omega^2 \rho_{\mathrm{s}} (1 - \phi_0) & \omega^2 \rho_{\mathrm{f}} \phi_0 \\ -\mathrm{i}\omega \dfrac{\eta}{\mathcal{K}} \phi_0 & \omega^2 \left(\rho_{\mathrm{f}} + \dfrac{\mathrm{i}}{\omega} \dfrac{\eta}{\mathcal{K}} \phi_0 \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{\mathrm{s}} \\ \psi_{\mathrm{f}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}, \tag{59}$$

上式的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \mu k_{\mathrm{s}}^2 + \mu l^2 k_{\mathrm{s}}^4 - \omega^2 \rho_{\mathrm{s}} (1 - \phi_0) & -\omega^2 \rho_{\mathrm{f}} \phi_0 \\ \mathrm{i}\omega \dfrac{\eta}{\mathcal{K}} \phi_0 & -\omega^2 \left(\rho_{\mathrm{f}} + \dfrac{\mathrm{i}}{\omega} \dfrac{\eta}{\mathcal{K}} \phi_0 \right) \end{vmatrix} = 0, \tag{60}$$

即

$$l^2 \left(\frac{k_{\mathrm{s}}}{\omega} \right)^4 + \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{k_{\mathrm{s}}}{\omega} \right)^2 - \frac{1}{\omega^2 \mu} \left[\rho_{\mathrm{s}} (1 - \phi_0) + \frac{\rho_{\mathrm{f}} \phi_0}{1 + (\omega / \mathrm{i})(\mathcal{K} / \eta)(\rho_{\mathrm{f}} / \phi_0)} \right] = 0. \tag{61}$$

由式(61),可得

$$\left(\frac{k_{\mathrm{s}}}{\omega} \right)^2 = \left(\frac{1}{c_{\mathrm{s}}} \right)^2 = \frac{\rho_3}{\mu}, \tag{62}$$

其中

$$\begin{cases} \rho_3 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \ a = l^2, \ b = \dfrac{1}{\omega^2}, \\ c = -\dfrac{1}{\omega^2 \mu} \left[\rho_{\mathrm{s}} (1 - \phi_0) + \dfrac{\rho_{\mathrm{f}} \phi_0}{1 + (\omega / \mathrm{i})(\mathcal{K} / \eta)(\rho_{\mathrm{f}} / \phi_0)} \right], \end{cases} \tag{63}$$

k_{s} 为 S 波的波数(复数).此外,SV 波的波速 c_{s} 可由下式确定

$$c_{\mathrm{s}} = \frac{\omega}{\mathrm{Re}(k_{\mathrm{s}})}. \tag{64}$$

由式(62)和式(64)可见,材料内禀长度 l 与 S 波的传播特性有关.

将对应于式(62)的特征值的特征向量取为

$$\boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}} = (1, \Lambda_3), \tag{65}$$

其中

$$\Lambda_3 = \frac{\mathrm{i}\omega (\eta / \mathcal{K}) \phi_0}{\omega^2 (\rho_{\mathrm{f}} + (\mathrm{i} / \omega)(\eta / \mathcal{K}) \phi_0)}. \tag{66}$$

由式(42)和(43),有

$$(l^2 \nabla^2 - 1) \nabla^2 \psi_{\mathrm{s}} + \frac{\omega^2}{\mu} \left(\rho_{\mathrm{s}} (1 - \phi_0) + \frac{\rho_{\mathrm{f}} \phi_0}{1 - \mathrm{i}\omega (\mathcal{K} / \eta)(\rho_{\mathrm{f}} / \phi_0)} \right) \psi_{\mathrm{f}} = 0, \tag{67}$$

利用式(65),可将 ψ_{f} 表示为

$$\psi_{\mathrm{f}} = \Lambda_3 \psi_{\mathrm{s}}. \tag{68}$$

将式(68)代入式(67)并利用特征方程(60),可得一个标量形式的 Helmholtz 方程(控制 SV 波的传播),即

$$\nabla^2 \psi_{\mathrm{s}} + k_{\mathrm{s}}^2 \psi_{\mathrm{s}} = 0. \tag{69}$$

仿照对耦合方程组(42)和(43)的处理,可将耦合方程组(44)和(45)解耦为一个标量的 Helmholtz 方程(控制 SH 波的传播),即

$$\nabla^2\xi_{\mathrm{s}} + k_{\mathrm{s}}^2\xi_{\mathrm{s}} = 0, \tag{70}$$

另外,

$$\xi_{\mathrm{f}} = \Lambda_3\xi_{\mathrm{s}}. \tag{71}$$

综上所述,利用位移场的势函数分解,最终得到了 4 个标量形式的 Helmholtz 方程(57)、(58)、(69)和(70),分别控制 P_1 波、P_2 波、SV 波以及 SH 波的传播[22].

7 Rayleigh 面波

接下来将研究沿半空间表面传播的 Rayleigh 波.设有半空间 $z \geqslant 0$, Rayleigh 波沿 x 轴方向传播,且波幅沿深度(z 轴)方向衰减.于是,波动方程(57)、(58)、(69)和(70)的解可表示为

$$\begin{cases} \varphi_{\mathrm{p1}} = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)-b_1 z}, \\ \varphi_{\mathrm{p2}} = B\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)-b_2 z}, \\ \psi_{\mathrm{s}} = C\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)-b_3 z}, \\ \xi_{\mathrm{s}} = 0. \end{cases} \tag{72}$$

将式(72)代入 Helmholtz 方程(57)、(58)、(69)和(70),可得

$$b_{1,2} = \sqrt{k^2 - k_{\mathrm{p}1,2}^2},\ b_3 = \sqrt{k^2 - k_{\mathrm{s}}^2},\ \mathrm{Re}(b_{1,2}) \geqslant 0,\ \mathrm{Re}(b_3) \geqslant 0, \tag{73}$$

其中, A,B 和 C 表示三个未知系数;b_1,b_2 和 b_3 为复数,须满足实部非负的条件;k 为波数.

将式(72)代入式(55)、(56)和(68),可得

$$\begin{cases} \varphi_{\mathrm{s}} = (A\mathrm{e}^{-b_1 z} + B\mathrm{e}^{-b_2 z})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}, \\ \varphi_{\mathrm{f}} = (\Lambda_1 A\mathrm{e}^{-b_1 z} + \Lambda_2 B\mathrm{e}^{-b_2 z})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}, \\ \psi_{\mathrm{s}} = C\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)-b_3 z}, \\ \psi_{\mathrm{f}} = \Lambda_3 C\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)-b_3 z}. \end{cases} \tag{74}$$

进一步,将式(74)代入式(38)和(39),有

$$\begin{cases} u_x^{\mathrm{s}} = \dfrac{\partial\varphi_{\mathrm{s}}}{\partial x} + \dfrac{\partial^2\psi_{\mathrm{s}}}{\partial x\partial z},\ u_z^{\mathrm{s}} = \dfrac{\partial\varphi_{\mathrm{s}}}{\partial z} - \dfrac{\partial^2\psi_{\mathrm{s}}}{\partial x^2}, \\ u_x^{\mathrm{f}} = \dfrac{\partial\varphi_{\mathrm{f}}}{\partial x} + \dfrac{\partial^2\psi_{\mathrm{f}}}{\partial x\partial z},\ u_z^{\mathrm{f}} = \dfrac{\partial\varphi_{\mathrm{f}}}{\partial z} - \dfrac{\partial^2\psi_{\mathrm{f}}}{\partial x^2}. \end{cases} \tag{75}$$

在自由表面上(透水条件下),还需满足如下的边界条件:

$$\tau_{xz} = 0,\ \tau_{zz} = 0,\ p = 0. \tag{76}$$

将式(75)代入本构关系中,可进一步将式(76)表示为如下的矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}, \tag{77}$$

其中, $a_{11} = -2b_1$, $a_{12} = -2b_2$, $a_{13} = b_3^2 + k^2$, $a_{21} = (2\mu + \lambda)b_1^2 - \lambda k^2$, $a_{22} = (2\mu + \lambda)b_2^2 - \lambda k^2$, $a_{23} = -2\mu b_3 k^2$, $a_{31} = [b + \phi_0(\Lambda_1 - 1)](b_1^2 - k^2)$, $a_{32} = [b + \phi_0(\Lambda_2 - 1)](b_2^2 - k^2)$.

式(77)是关于未知量 A,B,C 的线性代数方程组,若要满足非平凡解的条件,还须满足系数行列式为零的要求,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{78}$$

式(78)即为确定 Rayleigh 波波数 k 的特征方程,通过迭代法即可确定 Rayleigh 波的波数 k.另外,可由 $c_R = \omega/\mathrm{Re}(k)$ 和 $\delta_R = \mathrm{Im}(k)$ 分别确定 Rayleigh 波的波速 c_R 和衰减系数 δ_R.

此外,系数 A 和 B 可由系数 C 表示,即

$$A = \frac{a_{13}a_{32}}{a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}} C = U_A C,\ B = \frac{a_{13}a_{31}}{a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}} C = U_B C. \tag{79}$$

利用式(79),固体骨架位移的分量形式可写为

$$\begin{cases} u_x^s = \mathrm{i}k(U_A \mathrm{e}^{-b_1 z} + U_B \mathrm{e}^{-b_2 z} - b_3 \mathrm{e}^{-b_3 z}) C \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}, \\ u_z^s = (-b_1 U_A \mathrm{e}^{-b_1 z} - b_2 U_B \mathrm{e}^{-b_2 z} + k^2 \mathrm{e}^{-b_3 z}) C \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}. \end{cases} \tag{80}$$

8　数值计算与分析

本节将通过数值算例,揭示偶应力对 Rayleigh 波传播特性的影响规律,分析材料内禀长度对 Rayleigh 波的传播速度、衰减特性以及质点运动规律的影响.数值算例中的材料常数见表 1,取自文献[23].

表 1　饱和孔隙介质的材料参数

Table 1　Fluid saturated porous media material parameters(Hard sediment)

property	parameter	value
frame shear modulus	μ/MPa	26.1
frame bulk modulus	K/MPa	43.6
porosity	ϕ_0/%	0.470
solid density	ρ_0^s/(kg/m^3)	2 650
pore-fluid density	ρ_0^f/(kg/m^3)	1 000
solid bulk modulus	K_s/GPa	36.0
pore-fluid bulk modulus	K_f/GPa	2.25
fluid viscosity coefficient	η/(Pa·s)	1.0×10^{-3}
permeability coefficient	$\mathcal{K}$/m^2	1.0×10^{-10}

本文推导的波动方程与经典弹性理论中的波动方程相比,增加了与微观结构有关的材料长度项(l).由式(33)可知,当 $l = 0$ 时,方程就退化为经典弹性理论中的波动方程.为验证本文得到的 Rayleigh 波的特征方程及其解的可靠性,将材料内禀长度 l 取为 0.000 1 进行验证,并将计算结果与经典弹性理论的计算结果进行比较,结果如图 1 所示.从图中可以看出,本文中计算的 Rayleigh 波的波速与传统孔隙弹性理论计算的结果一致,由此验证了本文推导的 Rayleigh 波的特征方程及其解的可靠性.

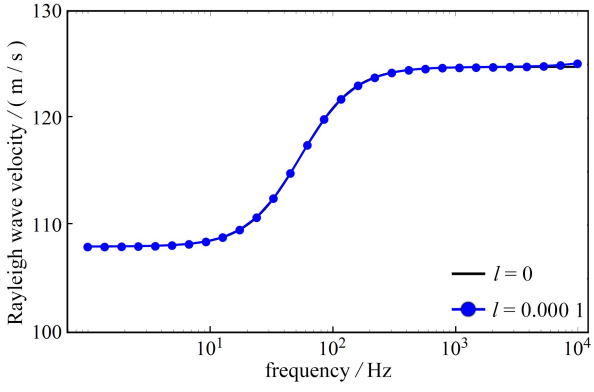
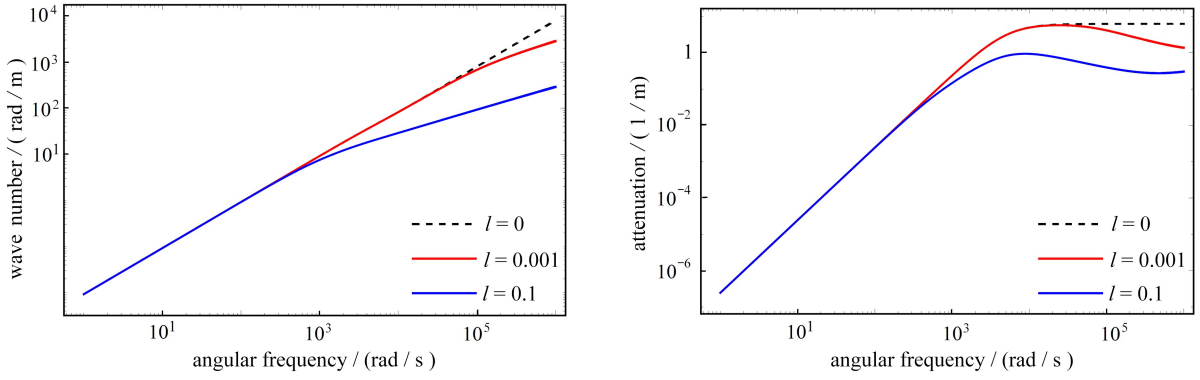


图 1　Rayleigh 波波速随频率变化的曲线

Fig. 1　Comparison curves of the Rayleigh wave velocity

此前的研究表明,材料内禀长度和 P 波的传播特性无关,而和 S 波的传播特性有关[10].由于 Rayleigh 波是 P 波和 SV 波的叠加,因此 Rayleigh 波的传播特性必然和材料内禀长度有关.此前的研究显示,S 波的波数和衰减系数随着材料内禀长度的变化呈现出相同的变化趋势:在低频时,材料内禀长度对波数和衰减系数的

影响较小,而在高频时($\omega > 10^3$),影响逐渐显现.图 2(a)给出了不同材料内禀长度下,Rayleigh 波的波数(Re(k))随频率变化的曲线.从图中可以看出,在低频区域,材料内禀尺度对波数的影响不明显;在高频区域($\omega > 10^3$),材料内禀长度对波数的影响逐渐显现,这与材料内禀长度对 S 波的影响规律一致.图 2(b)给出了衰减系数(Im(k))随频率变化的曲线.由图可见,在低频区域,衰减系数几乎不受材料内禀长度的影响;但在高频区域($\omega > 10^3$),随着材料内禀长度的增加,衰减系数呈现减小的趋势.这表明,随着材料内禀长度的增大,Rayleigh 波的衰减特性有所减弱.



(a) Rayleigh 波波数随频率变化的曲线 (b) 衰减系数随频率变化的曲线

(a) The curve of the Rayleigh wave number with frequency (b) The curve of the attenuation coefficient with frequency

图 2 不同材料内禀长度下 Rayleigh 波的波数和衰减系数随频率变化的曲线

Fig. 2 Comparison curves of Rayleigh wave numbers and characteristic attenuation at different material intrinsic lengths

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同.

由于孔隙介质中的弹性波的传播存在衰减,一般通过引入质量因数 Q 来表征弹性波的衰减特性.事实上,质量因数 Q 和弹性波在传播过程中的能量耗散有关.

质量因数 Q 由下式定义[24]

$$\frac{1}{Q} \approx 2\frac{\mathrm{Im}(k)}{\mathrm{Re}(k)}, \tag{81}$$

其中,$1/Q$ 表征了一个传播周期内弹性波的能量耗散程度,Q 值越大,表明能量耗散越低.图 3 给出了不同材料内禀长度下,Rayleigh 波的能量耗散随频率变化的曲线.从图中可以看出,当 $1/Q$ 达到峰值(即能量耗散最大)时,对应的临界频率没有发生变化.随着材料内禀长度的增加,能量耗散逐渐减小.表明 Rayleigh 波在自由表面的传播过程中随材料内禀长度的增加,其衰减特性逐渐减弱.上述影响规律与材料内禀长度对 S 波的影响规律完全一致.

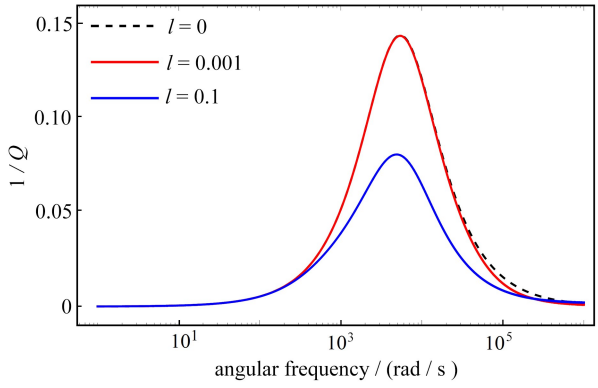


图 3 Rayleigh 波质量因子随频率变化的曲线

Fig. 3 Quality factors as a function of the frequency for the Rayleigh wave

接下来,我们将考察材料内禀长度对 Rayleigh 波沿深度方向衰减特性的影响规律.图 4 给出了固体骨架

的归一化水平位移 $u_x^s/u_{x_0}^s$ 和竖向位移 $u_z^s/u_{z_0}^s$ 沿深度方向变化的曲线.图中,利用表面位移进行位移的无量纲化,利用 Rayleigh 波波长 λ_R($\lambda_R = c_R/f$) 进行深度方向的无量纲化.

由图 4 可见,固体骨架位移幅值随深度的增加而迅速衰减,Rayleigh 波的有效传播深度约为波长的两倍.在 $z = 0.102\lambda_R$ 处,水平位移的幅值为零,即在此平面上无 x 方向的位移,当深度继续增加时,水平位移的幅值逐渐增大,有着反相位的振动,并在达到一个极小值后逐渐衰减为零.而在 $z = 0.126\lambda_R$ 处,竖向位移幅值取得极大值,并在此后出现单调衰减.另外,材料内禀长度对位移振幅沿深度方向的衰减有较为显著的影响.材料内禀长度对水平位移和竖向位移振幅的影响规律相同,即随材料内禀长度的增加,位移幅值的衰减减弱.同时可以看出,Rayleigh 波的有效传播深度随着材料内禀长度的增加而略有增加.

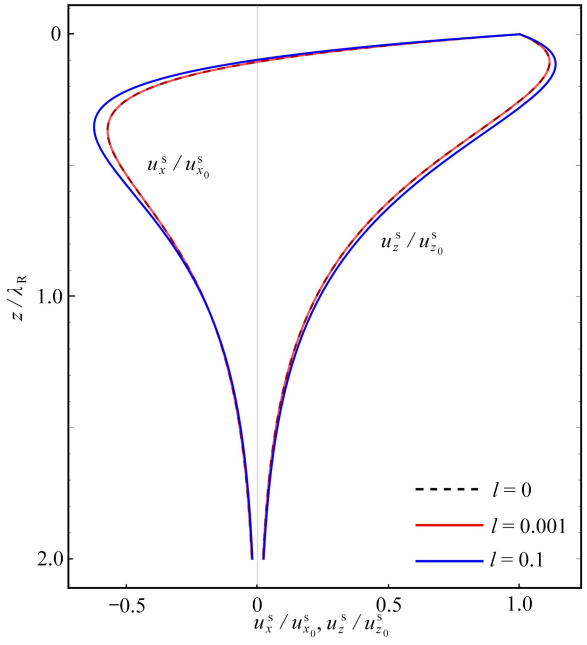
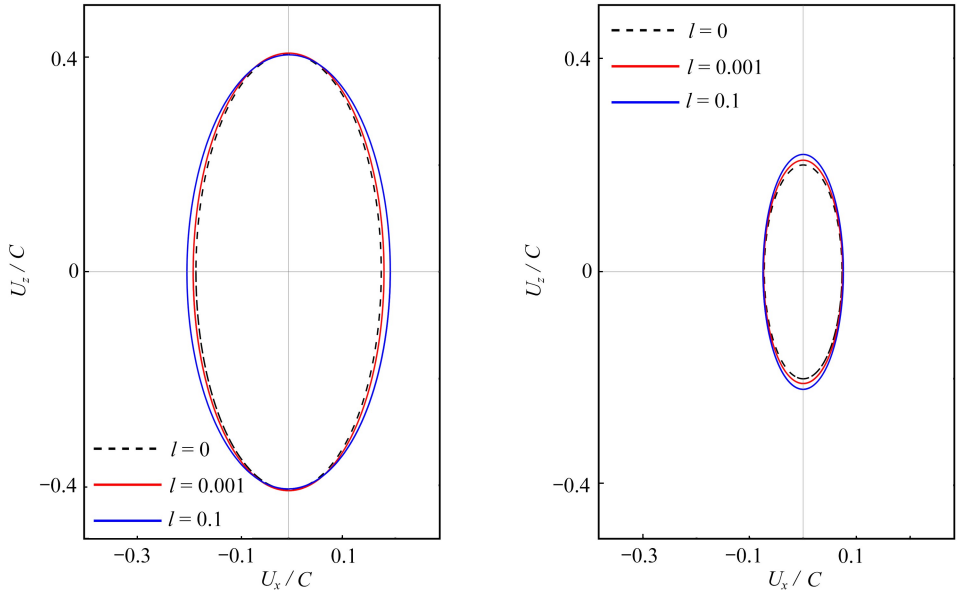


图 4　固体骨架的归一化水平和竖向位移沿归一化深度的变化曲线 (f = 1 000 Hz)

Fig. 4　The normalized horizontal and vertical displacement curves of the solid skeleton along the normalized depth (f = 1 000 Hz)



(a) z = 0　　(b) $z = 0.6\lambda_R$

图 5　粒子运动轨迹 (f = 1 000 Hz)

Fig. 5　Particle motion trajectories (f = 1 000 Hz)

图 5 给出了不同材料内禀长度下质点在不同深度处的运动轨迹.从图中可以看出,基于偶应力弹性梯度理论的饱和孔隙介质中质点的运动轨迹与基于经典弹性理论的单相介质中质点的运动轨迹一致,即 Rayleigh 波在传播过程中,质点的运动轨迹为椭圆,且椭圆的长轴与纵轴垂直.另外,材料内禀长度对质点运动轨迹的影响也较为明显.同时,Rayleigh 波的位移幅值沿深度方向迅速衰减,这一结果与图 4 预测的结果一致.

9 总 结

本文基于偶应力的弹性梯度理论对饱和孔隙介质中 Rayleigh 波的传播特性进行了研究.首先,基于偶应力理论建立了包含材料内禀长度的波动方程,并利用位移场的势函数分解,将频域内两组耦合的波动方程解耦为 4 个标量的 Helmholtz 方程,分别控制 P_1 波、P_2 波、SV 波和 SH 波的传播.然后,针对半空间表面传播的 Rayleigh 波,确定了势函数的具体形式.最后,通过引入自由表面的边界条件,求解了 Rayleigh 波的传播特性,并通过数值算例分析了材料内禀长度对 Rayleigh 波传播特性的影响规律.研究表明,低频时,材料内禀长度对 Rayleigh 波的波数(也即波速)和衰减系数没有显著影响,但是,随着频率的增加,材料内禀长度对波数(也即波速)和衰减系数的影响逐渐显现.此外,Rayleigh 波在传播过程中的能量耗散也受材料内禀长度的影响,随着材料内禀长度的增加,Rayleigh 波的能量耗散逐渐减小.在 Rayleigh 波的传播过程中,质点的运动轨迹为椭圆,且质点的位移幅值随材料内禀长度的增加而增大.

目前,基于偶应力的饱和孔隙介质的弹性梯度理论的研究尚在起步阶段.如何通过试验来测定该理论中引入的材料内禀长度还有待进一步研究.另外,本文基于该理论所预测的结果也有待开展相关试验进行进一步的验证.

参考文献(References):

[1] RAYLEIGH L. On waves propagated along the plane surface of an elastic solid[J]. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1885, **1**(1): 4-11.

[2] KIM G, IN C W, KIM J Y, et al. Air-coupled detection of nonlinear Rayleigh surface waves in concrete: application to microcracking detection[J]. *NDT & E International*, 2014, **67**: 64-70.

[3] VOIGT W. Theoritical studies on the elasticity relationships of cristals[J]. *R Soc Sci*, 1887, **34**: 3-51.

[4] COSSERAT E, COSSERAT F. *Theory of Deformable Bodies*[M]. Paris: Scientific Library A. Hermann and Sons, 1909.

[5] TOUPIN R A. Elastic materials with couple-stresses[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1962, **11**(1): 385-414.

[6] TOUPIN R A. Theory of elasticity with couple-stress[J]. *Arch Rat Mech Anal*, 1964, **17**: 85-11.

[7] KOITER W T. Couple stresses in the theory of elasticity Ⅰ & Ⅱ[J]. *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie Van Wetenschappen*, 1964, **67**: 17-44.

[8] MINDLIN R D, TIERSTEN H F. Effects of couple-stresses in linear elasticity[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1962, **11**(1): 415-448.

[9] YANG F, CHONG A C M, LAM D C C, et al. Couple stress based strain gradient theory for elasticity[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, **39**(10): 2731-2743.

[10] ZHENG P, LI G, SUN P, et al. Couple-stress-based gradient theory of poroelasticity[J]. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2024, **29**(1): 173-190.

[11] BIOT M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, Ⅰ: low-frequency range[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1956, **28**(2): 168-178.

[12] BIOT M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, Ⅱ: higher frequency range[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1956, **28**(2): 179-191.

[13] DING H, TONG L H, XU C, et al. On propagation characteristics of Rayleigh wave in saturated porous media based on the strain gradient nonlocal Biot theory[J]. *Computers and Geotechnics*, 2022, **141**: 104522.

[14] HIRAI H. Analysis of Rayleigh waves in saturated porous elastic media by finite element method[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 1992, **11**(6): 311-326.

[15] LIU H, ZHOU F, WANG L, et al. Propagation of Rayleigh waves in unsaturated porothermoelastic media[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2020, **44**(12): 1656-1675.

[16] TONG L H, LAI S K, ZENG L L, et al. Nonlocal scale effect on Rayleigh wave propagation in porous fluid-saturated materials[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2018, **148**: 459-466.

[17] SU C, GUAN W, YIN Y, et al. Elastic waves in fluid-saturated porous materials with a couple-stress solid phase[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2024, **569**: 117993.

[18] MÜNCH I, NEFF P, MADEO A, et al. The modified indeterminate couple stress model: why Yang et al.'s arguments motivating a symmetric couple stress tensor contain a gap and why the couple stress tensor may be chosen symmetric nevertheless[J]. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **97**(12): 1524-1554.

[19] HADJESFANDIARI A R, DARGUSH G F. Couple stress theory for solids[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2011, **48**(18): 2496-2510.

[20] HADJESFANDIARI A R. On the skew-symmetric character of the couple-stress tensor[J/OL]. *ArXiv*: *General Physics*, 2013[2024-10-25]. https://api.semanticscholar.org/CorpusID:116973411.

[21] AKI K, RICHARDS P G. *Quantitative Seismology*[M]. 2nd ed. University Science Books, 2002.

[22] ZHENG P, DING B. Potential method for 3D wave propagation in a poroelastic medium and its applications to Lamb's problem for a poroelastic half-space[J]. *International Journal of Geomechanics*, 2016, **16**(2): 04015048.

[23] CHENG A H D. *Poroelasticity*[M]. Switzerland: Springer International Publishing, 2016.

[24] MAVKO G, MUKERJI T, DVORKIN J. *The Rock Physics Handbook*[M]. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.