ⓒ 应用数学和力学编委会, ISSN 1000-0887

阻尼 eKdV-Burgers 方程的共形广义多辛 Fourier 拟谱算法*

李　骞[1]，　王桂霞[1,2,3]，　王一辰[1]

（1. 内蒙古师范大学 数学科学学院，呼和浩特 010022；
2. 内蒙古自治区应用数学中心，呼和浩特 010022；
3. 无穷维哈密顿系统及其算法应用教育部重点实验室，呼和浩特 010022）

摘要： 基于 Hamilton 共形广义多辛理论，研究一类阻尼 eKdV-Burgers 方程的共形广义多辛 Fourier 拟谱格式的保结构算法.首先，通过引入中间变量，将方程转化为满足局部守恒的共形广义多辛 Hamilton 系统，并利用 Strang 分裂方法，将其分裂为守恒子系统和耗散子系统.进一步，空间上利用 Fourier 拟谱方法，时间上利用隐中点方法，对该系统进行离散，得到共形广义多辛 Fourier 拟谱格式，在周期边界条件下，该格式满足全局共形质量守恒律和动量守恒律.数值实例表明该算法是有效的，能够保持系统质量和动量衰减特性.

关　键　词： 耗散项；　浅水效应；　eKdV-Burgers 方程；　共形广义多辛；　Fourier 拟谱方法；　Strang 分裂
中图分类号： O241.82　　**文献标志码：** A　　DOI：10.21656/1000-0887.450263

A Conformal Generalized Multi-Symplectic Fourier Pseudo-Spectral Algorithm for Damping eKdV-Burgers Equations

LI Qian[1]，　WANG Guixia[1,2,3]，　WANG Yichen[1]

（1. *College of Mathematics Science*, *Inner Mongolia Normal University*, *Hohhot* 010022, *P.R.China*;
2. *Center for Applied Mathematics Science*, *Inner Mongolia*, *Hohhot* 010022, *P.R.China*;
3. *Laboratory of Infinite-Dimensional Hamiltonian System and Its Algorithm Application*, *Ministry of Education*, *Hohhot* 010022, *P.R.China*）

Abstract: Based on the conformal generalized multi-symplectic theory for Hamiltonian systems, a class of conformal generalized multi-symplectic pseudo-spectral algorithms for damping eKdV-Burgers the equations were studied. Firstly, through introduction of intermediate variables, the equation was transformed into a conformal generalized multi-symplectic Hamiltonian system satisfying local conservation, and the Strang splitting method was used to split it into a conservative subsystem and a dissipative subsystem. Furthermore, the Fourier pseudo-spectral method was applied spatially and the hidden midpoint method applied temporally to discretize the

* **收稿日期：** 2024-09-29；**修订日期：** 2024-12-24
基金项目： 国家自然科学基金(62161045)；内蒙古自治区自然科学基金重点项目(2022ZD05)；内蒙古自治区自然科学基金(2023LHMS01007；2022JBQN074)
作者简介： 李骞(2000—)，女，硕士生(E-mail：3491240780@qq.com)；
王桂霞(1968—)，女，教授，博士(通讯作者. E-mail：nsdwgx@126.com).
引用格式： 李骞，王桂霞，王一辰. 阻尼 eKdV-Burgers 方程的共形广义多辛 Fourier 拟谱算法[J]. 应用数学和力学，2025，**46**(11)：1464-1479.

system to obtain the conformal generalized multi-symplectic Fourier pseudo-spectral scheme, which meets the global conformal mass conservation law and the momentum conservation law under the periodic boundary conditions. Numerical examples show that, the algorithm is effective and can maintain the mass and momentum decay characteristics of the system.

Key words: dissipative term; shallow water effect; eKdV-Burgers equation; conformal generalized multi-symplectic; Fourier pseudo-spectral method; Strang split

0　引　　言

20 世纪 80 年代,我国著名数学家冯康院士首次提出了针对有限维 Hamilton 体系的 Hamilton 辛算法[1],该方法因其能够保持系统离散前后整体辛结构,具有稳定性,且能够长时间数值追踪模拟而受到大家关注,并开创了 Hamilton 体系计算方法新方向,成果颇丰[2-7].秦孟兆等[2]进一步完善了辛算法理论体系,利用生成函数等方法构造了一系列实用的辛格式,首次提出了偏微分方程局部保结构算法的概念.McLachlan[4]结合分裂-组合思想研究了辛分裂算法.Bridges 等[8-9]和 Marsden 等[10-11]将用于求解有限维 Hamilton 微分方程系统的辛算法推广到无限维 Hamilton 偏微分方程系统的多辛算法, 提出了多种局部守恒律,如多辛守恒律、能量守恒律、动量守恒律.后续很多学者研究和推广了相关方面的内容,取得了显著成就[12-15].胡伟鹏等[16]针对无限维非保守 Hamilton 体系,提出了广义多辛算法的概念,该算法精确满足局部动量守恒律,且近似满足广义多辛守恒律和局部能量守恒律, 完善了多辛算法理论.一切真实的、耗散忽略不计的物理现象都可以写为 Hamilton 形式,文献[17]导出了 KdV 方程

$$u_t + 6uu_x + \beta u_{xxx} = 0 \tag{1}$$

的多辛形式以及多种守恒律,并构造了多辛 Preissmann 离散格式及其等价形式.在非线性与频散作用相平衡时,内孤立波会维持波形传播.但实验室实验与现场观测结果均证实 KdV 方程局限于弱非线性假定,只适用于小振幅内孤立波,在刻画大振幅内孤立波波形时与实际波形差异大.在临界深度附近,平方非线性系数趋近零无法有效刻画内孤立波动力演化过程[18].文献[19]提出了 mKdV 方程

$$u_t + 6u^2u_x + \beta u_{xxx} = 0 \tag{2}$$

的一个多辛 Hamilton 形式, 利用中点离散得到相应离散格式.文献[20]基于多辛理论, 导出了 KdV-mKdV 方程

$$u_t + 6(u + u^2)u_x + \beta u_{xxx} = 0 \tag{3}$$

的多辛 Preissmann 离散格式,并给出了具体实例验证算法的有效性.文献[21]构造了 eKdV 方程[22]

$$u_t + (c_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2)u_x + \beta u_{xxx} = 0 \tag{4}$$

的两种不同多辛离散格式及其等价格式,空间均采用六阶紧致差分离散,时间分别采用 AVF 和中心离散,数值结果表明了算法的有效性,具有较高收敛精度.

实际上,耗散现象不可避免.针对带有线性耗散的问题,McLachlan 等[23]提出了一种共形多辛 Hamilton 系统,这一系统考虑了线性耗散项又保留了多辛 Hamilton 结构的特性.文献[24]给出了求解阻尼 Hamilton 系统的时间二阶的共形辛格式.Moore 等[25-27]在共形辛理论的基础上研究了共形多辛理论及相关守恒律.文献[16]分别给出了 Burgers 方程

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = 0, \tag{5}$$

KdV-Burgers 方程

$$u_t + uu_x - \varepsilon u_{xx} + \beta u_{xxx} = 0, \tag{6}$$

KdV-mKdV-Burgers 方程

$$u_t + \alpha uu_x + \beta u^2u_x + \varepsilon u_{xx} + \gamma u_{xxx} = 0 \tag{7}$$

的广义多辛形式和相关守恒律,并分别构造了九点隐式差分离散格式、十二点隐式差分离散格式及隐式差分离散格式.数值实验表明,当步长和阻尼参数满足特定条件时,该格式很好地满足修正的守恒律,具有长时间数值性能.

Fourier 拟谱方法相较于传统差分方法,因其高精度和高效性而被广泛使用.文献[2]用 Fourier 拟谱方法离散空间,用中心差分格式离散时间,构造了带周期边界条件立方非线性 Schrödinger 方程的全离散格式,并研究了该格式的守恒量.文献[28]对非线性 Schrödinger 方程在空间采用 Fourier 拟谱方法离散,时间采用 Crank-Nicolson 方法和蛙跳方法离散,给出了一个高效的守恒格式.文献[29]用 Fourier 拟谱方法求解了 SRLW 方程; 文献[30]研究了一类带周期边界条件的广义 KdV 方程的 Fourier 谱方法.文献[31]对空间分数阶的非线性阻尼 sine-Gordon 方程在空间上采用 Fourier 拟谱方法离散,时间采用修改的 Crank-Nicolson 方法离散,给出了一种有效的数值方案.文献[32]基于指数型分散映射积分器,利用 Fourier 拟谱方法研究了 DMNLS 方程和 NM-NLS 方程的数值解法.文献[33]时间采用 Crank-Nicolson 方法,空间采用 Fourier 拟谱方法离散,求解了一类空间分数阶非线性 Schrödinger 方程.

本文考虑在 eKdV 方程的基础上加入浅水效应项和底摩擦效应项, 得到的阻尼 eKdV-Burgers 方程

$$u_t + (c_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2) u_x + \beta u_{xxx} + \varepsilon u_{xx} + \gamma u = 0 \tag{8}$$

更能够反映海洋内波传播过程中的真实情况, 在海洋工程设计、军事及海洋航行等方面具有重要意义[34-36]. 其中, $u(x,t)$ 为波动振幅, c_0 为线性波波速, α_1 为非线性系数, α_2 为高阶非线性系数, β 为频散系数, γ 为浅水效应系数, ε 为底摩擦效应系数.

本文的结构如下: 第 1 节给出了共形广义多辛格式并推导相关守恒律.第 2 节介绍了分裂方法和 Fourier 拟谱方法,引入一些相关的算子符号,以简化算法描述.第 3 节是本文的核心部分,主要结合 Strang 分裂方法,用隐中点方法离散时间,用 Fourier 拟谱方法离散空间,构造了全离散的共形广义多辛保结构格式及等价格式.第 4 节通过数值实例验证了共形广义多辛算法的有效性.

如果没有特殊说明,本文取 $x \in [a,b]$, $t \in [0,T]$,空间步长 $h = (b-a)/J$,时间步长 $\tau = T/N$,其中 J 和 N 为任意正整数,用平行直线族 $x = x_j = jh(j = 0,1,2,\cdots,J)$, $t = t_n = n\tau(n = 0,1,2,\cdots,N)$ 对 x-t 平面做矩形网格剖分,并用 z_j^n 表示 $z(x,t)$ 在网格点 (x_j,t_n) 处的近似值.

1 共形广义多辛形式及其守恒律

1.1 共形广义多辛形式

引入状态变量 $\boldsymbol{z} = (\varphi,u,v,w)^{\mathrm{T}}$, 将 eKdV-Burgers 方程(8)表示为共形广义多辛 Hamilton 系统:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} u_t + w_x = -\dfrac{1}{2}\gamma u, \\ -\dfrac{1}{2}\varphi_t - \sqrt{\beta} v_x - \varepsilon u_x = -w + \left(c_0 u + \dfrac{1}{2}\alpha_1 u^2 + \dfrac{1}{3}\alpha_2 u^3\right) + \dfrac{1}{2}\gamma\varphi, \\ \sqrt{\beta} u_x = v, \\ -\varphi_x = -u, \end{cases} \tag{9}$$

其中

$$w_x = -\frac{1}{2} u_t - \frac{1}{2}\gamma u,\ v = \sqrt{\beta} u_x,\ u = \varphi_x .$$

系统(9)的矩阵形式为

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{z}_t + (\boldsymbol{K} + \hat{\boldsymbol{K}})\boldsymbol{z}_x = \nabla_{\boldsymbol{z}} S(\boldsymbol{z}) - \gamma \boldsymbol{Q}\boldsymbol{z}, \tag{10}$$

其中

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\beta} & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \hat{\boldsymbol{K}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S(z)=\frac{1}{2}v^2-uw+\frac{1}{2}c_0u^2+\frac{1}{6}\alpha_1u^3+\frac{1}{12}\alpha_2u^4,$$

$\boldsymbol{Q},\boldsymbol{K}$ 均为反称矩阵,Hamilton 函数 $S(z)$ 是光滑函数, $\nabla_zS(z)$ 是函数 $S(z)$ 的梯度.

1.2　共形广义多辛形式的相关守恒律

性质 1　共形广义多辛 Hamilton 系统(9)满足共形广义多辛守恒律:

$$\partial_t\omega+\partial_x\kappa=-2\gamma\omega-\varepsilon\mathrm{d}(\partial_xu)\wedge\mathrm{d}u, \tag{11}$$

其中

$$\omega=\frac{1}{2}(\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}u),\ \kappa=\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}w+\sqrt{\beta}\,\mathrm{d}v\wedge\mathrm{d}u.$$

证明　对式(10)关于 z 做变分得

$$\boldsymbol{Q}\mathrm{d}z_t+(\boldsymbol{K}+\hat{\boldsymbol{K}})\mathrm{d}z_x=S''(z)\mathrm{d}z-\gamma\boldsymbol{Q}\mathrm{d}z. \tag{12}$$

式(12)与 dz 做外积得

$$\mathrm{d}z\wedge\boldsymbol{Q}\mathrm{d}(\partial_tz)+\mathrm{d}z\wedge\boldsymbol{K}\mathrm{d}(\partial_xz)=-\mathrm{d}z\wedge\hat{\boldsymbol{K}}\mathrm{d}(\partial_xz)+\mathrm{d}z\wedge S''(z)\mathrm{d}z-\gamma\boldsymbol{Q}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}z. \tag{13}$$

因为 $S''(z)$ 和 $\hat{\boldsymbol{K}}$ 为对称矩阵, $\boldsymbol{K}$ 为反对称矩阵,所以有

$$S''(z)\wedge\mathrm{d}z=0,\ \mathrm{d}z\wedge\hat{\boldsymbol{K}}\mathrm{d}(\partial_xz)=-\mathrm{d}(\partial_xz)\wedge\hat{\boldsymbol{K}}\mathrm{d}z,\ \mathrm{d}(\partial_xz)\wedge\boldsymbol{K}\mathrm{d}z=\mathrm{d}z\wedge\boldsymbol{K}\mathrm{d}(\partial_xz),$$

代入式(13)并整理,即得式(11).

定义式(11)中的

$$\Delta=|-\varepsilon\mathrm{d}(\partial_xu)\wedge\mathrm{d}u|=|\varepsilon\mathrm{d}(\partial_xu)\wedge\mathrm{d}u| \tag{14}$$

为共形广义多辛守恒律误差.

性质 2　共形广义多辛 Hamilton 系统(9)满足局部共形能量耗散律:

$$\partial_t\left(S(z)-\frac{1}{2}z^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}+\hat{\boldsymbol{K}})z_x\right)+\partial_x\left(\frac{1}{2}z^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}+\hat{\boldsymbol{K}})z_t\right)=$$

$$-\gamma z_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}z-\partial_t\left(\frac{1}{2}z^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{K}}z_x\right)+\frac{1}{2}\partial_xz^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{K}}z_t. \tag{15}$$

证明　式(10)与 z_t 做内积得

$$z_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\partial_tz+z_t^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}+\hat{\boldsymbol{K}})\partial_xz=z_t^{\mathrm{T}}\nabla_zS(z)-\gamma z_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}z, \tag{16}$$

因为 $\boldsymbol{Q}$ 为反对称矩阵,所以 $z_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\partial_tz=0$.代入式(16)得

$$\frac{1}{2}z_t^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}+\hat{\boldsymbol{K}})\partial_xz+\frac{1}{2}z_t^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}+\hat{\boldsymbol{K}})\partial_xz=z_t^{\mathrm{T}}\nabla_zS(z)-\gamma z_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}z. \tag{17}$$

对式(18)进行分步积分,整理即得式(15).

定义式(15)中

$$\Delta_{\mathrm{e}}=\left|-\partial_t\left(\frac{1}{2}z^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{K}}z_x\right)+\frac{1}{2}\partial_xz^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{K}}z_t\right|=$$

$$\left|\partial_t\left(\frac{1}{2}z^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{K}}z_x\right)-\frac{1}{2}\partial_xz^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{K}}z_t\right|=\left|\frac{\varepsilon}{2}(\partial_t(u\partial_xu)-\partial_xu\partial_tu)\right| \tag{18}$$

为 Hamilton 系统(9)的修正局部能量耗散律误差.

性质 3　共形广义多辛 Hamilton 系统(9)满足局部共形动量守恒律:

$$\partial_tI+\partial_xG=-2\gamma I, \tag{19}$$

且在周期边界条件下满足全局动量守恒律

$$\hat{I}(t)=\mathrm{e}^{-2\gamma t}I(0), \tag{20}$$

其中

$$I=-\frac{1}{2}u^2,$$

$$G=\frac{1}{2}v^2-uw+\left(\frac{c_0}{2}u^2+\frac{\alpha_1}{6}u^3+\frac{\alpha_2}{12}u^4\right)+\frac{1}{2}u\varphi_t+\frac{\gamma}{2}u\varphi.$$

证明 依据多辛理论分析,对式(10)与 $\boldsymbol{z}_x$ 做内积,通过分步积分得到

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{z}_x\right)+\partial_x\left(S(\boldsymbol{z})-\frac{1}{2}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{z}_t\right)=-\gamma\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{z},\tag{21}$$

将 $\boldsymbol{Q}$ 和状态变量 $\boldsymbol{z}=(\varphi,u,v,w)^{\mathrm{T}}$ 代入式(21)整理得式(19).在周期边界条件下将式(19)对 x 进行积分得

$$\int_{-L}^{L}\frac{\partial I}{\partial t}\mathrm{d}x=\int_{-L}^{L}-2\gamma I\mathrm{d}x,\tag{22}$$

将式(22)对 t 进行积分,整理即得式(20).

性质 4 共形广义多辛 Hamilton 系统(9)满足局部共形质量守恒律:

$$\partial_t u+2\partial_x w=-\gamma u.\tag{23}$$

在周期边界条件下,Hamilton 系统(9)的全局共形质量守恒律为

$$\hat{m}(t)=\mathrm{e}^{-\gamma t}\hat{m}(0).\tag{24}$$

证明 由 Hamilton 系统(9)的第一个方程直接得到式(23).将式(23)对 x 进行积分,考虑周期边界条件,则有

$$\int_{-L}^{L}(\partial_t u+2\partial_x w)\mathrm{d}x=\int_{-L}^{L}-\gamma u\mathrm{d}x.\tag{25}$$

将式(25)对 t 进行积分,整理即得式(24).

2 相 关 定 义

2.1 分裂方法及其算子定义

基于 Strang 分裂方法,将式(10)分裂为一个守恒子系统

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{z}_t+(\boldsymbol{K}+\hat{\boldsymbol{K}})\boldsymbol{z}_x=\nabla_{\boldsymbol{z}}S(\boldsymbol{z})$$

和一个耗散子系统

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{z}_t=-\gamma\boldsymbol{Q}\boldsymbol{z}.$$

第一个子系统利用 Fourier 拟谱方法求解,记 $\boldsymbol{z}^{n+1}=\psi_\tau(\boldsymbol{z}^n)$,第二个子系统容易求得解析解,记 $\boldsymbol{z}^{n+1}=\varphi_\tau(\boldsymbol{z}^n)=\mathrm{e}^{-\gamma\tau}(\boldsymbol{z}^n)$,两个子系统解的组合[37] $\varphi_{\tau/2}\circ\psi_\tau\circ\varphi_{\tau/2}$,即为原系统(9)的解.

参照文献[37],分别定义差分算子

$$\mathrm{D}_t^\gamma z_j^{n+1/2}=\frac{\mathrm{e}^{(\gamma/2)\tau}z_j^{n+1}-\mathrm{e}^{-(\gamma/2)\tau}z_j^n}{\tau},\ \mathrm{D}_x^\gamma z_{j+1/2}^n=\frac{\mathrm{e}^{(\gamma/2)h}z_{j+1}^n-\mathrm{e}^{-(\gamma/2)h}z_j^n}{h}$$

及平均算子

$$\mathrm{A}_t^\gamma z_j^{n+1/2}=\frac{\mathrm{e}^{(\gamma/2)\tau}z_j^{n+1}+\mathrm{e}^{-(\gamma/2)\tau}z_j^n}{2},\ \mathrm{A}_x^\gamma z_{j+1/2}^n=\frac{\mathrm{e}^{(\gamma/2)h}z_{j+1}^n+\mathrm{e}^{-(\gamma/2)h}z_j^n}{2},$$

其中 $\gamma\geqslant 0$,这些算子满足交换律

$$\mathrm{D}_t^\gamma\mathrm{D}_x^\gamma z_j^n=\mathrm{D}_x^\gamma\mathrm{D}_t^\gamma z_j^n,\ \mathrm{A}_t^\gamma\mathrm{A}_x^\gamma z_j^n=\mathrm{A}_x^\gamma\mathrm{A}_t^\gamma z_j^n,$$

$$\mathrm{D}_t^\gamma\mathrm{A}_x^\gamma z_j^n=\mathrm{A}_x^\gamma\mathrm{D}_t^\gamma z_j^n,\ \mathrm{A}_t^\gamma\mathrm{D}_x^\gamma z_j^n=\mathrm{D}_x^\gamma\mathrm{A}_t^\gamma z_j^n.$$

当 $\gamma=0$ 时,$\mathrm{D}_t^\gamma=\mathrm{D}_t$,$\mathrm{D}_x^\gamma=\mathrm{D}_x$ 为标准差分算子,$\mathrm{A}_t^\gamma=\mathrm{A}_t$,$\mathrm{A}_x^\gamma=\mathrm{A}_x$ 为标准平均算子.

2.2 Fourier 拟谱微分矩阵

假设 $z(x,t)$ 是周期为 L 的光滑函数,$z(x,t)$ 在配置点 $x_j=j\times L/N$ ($j=1,2,\cdots N$,其中 N 为偶数)处的插值函数[38]为

$$I_N u(x,t)=\sum_{j=1}^{N}u_j g_j(x),\tag{26}$$

其中

$$u_j = u(x_j,t),\ g_j(x) = \frac{1}{N}\sum_{l=-N/2}^{N/2}\frac{1}{c_l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\mu(x-x_j)},\qquad j = 1,2,\cdots,N,$$

$$\mu = 2\pi/L,\ c_l = 1(\,|\,l\,|\neq N/2),\ c_{-N/2} = c_{N/2} = 2.$$

要求在配置点处 $z(x_j,t) = I_N u(x_j,t)$ 对式(26)微分可得到

$$\frac{\partial I_N u(x,t)}{\partial x} = \sum_{l=1}^{N} u_l \frac{\mathrm{d}g_l(x_j)}{\mathrm{d}x} = (\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{U})_j,\qquad j = 1,2,\cdots,N,\ \boldsymbol{U} = [u_1,u_2,\cdots,u_N]^{\mathrm{T}}.$$

$(\boldsymbol{D}_1)_{N\times N}$ 为 Fourier 拟谱微分矩阵,其中

$$(\boldsymbol{D}_1)_{j,l} = \begin{cases}\dfrac{1}{2}\mu(-1)^{j+l}\cot\left(\mu\dfrac{x_j-x_l}{2}\right), & j\neq l,\\ 0, & j = l.\end{cases}$$

3　共形广义多辛 Fourier 拟谱格式

对式(10)的守恒子系统采用 Fourier 拟谱方法进行空间离散得半离散 Hamilton 系统:

$$\boldsymbol{Q}\partial_t z_j + \boldsymbol{K}(\boldsymbol{D}_1 z)_j = \nabla_z S(z_j),\qquad j = 1,2,\cdots,J, \tag{27}$$

其中 $\boldsymbol{z} = (z_1,z_2\cdots,z_J)^{\mathrm{T}}$,$(\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{z})_j = \sum_{k=1}^{J}(\boldsymbol{D}_1)_{j,k}z_k$.对式(27)在时间上采用隐中点方法,与耗散子系统组合,则可以得到式(8)全离散共形广义多辛 Fourier 拟谱格式:

$$\boldsymbol{Q}\mathrm{D}_t^{\gamma}z_j^{n+1/2} + \boldsymbol{K}(\boldsymbol{D}_1\mathrm{A}_t^{\gamma}\boldsymbol{z}^{n+1/2})_j = \nabla_z S(\mathrm{A}_t^{\gamma}z_j^{n+1/2}),\qquad j = 1,2,\cdots,J, \tag{28}$$

即为

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{D}_t^{\gamma}\boldsymbol{u}_j^{n+1/2} + (\boldsymbol{D}_1\mathrm{A}_t^{\gamma}\boldsymbol{\omega}^{n+1/2})_j = 0,\\ -\dfrac{1}{2}\mathrm{D}_t^{\gamma}\boldsymbol{\varphi}_j^{n+1/2} - \sqrt{\beta}(\boldsymbol{D}_1\mathrm{A}_t^{\gamma}\boldsymbol{v}^{n+1/2})_j - \varepsilon(\boldsymbol{D}_1\mathrm{A}_t^{\gamma}\boldsymbol{u}^{n+1/2})_j =\\ \qquad -\mathrm{A}_t^{\gamma}\boldsymbol{\omega}_j^{n+1/2} + c_0\mathrm{A}_t^{\gamma}\boldsymbol{u}_j^{n+1/2} + \dfrac{\alpha_1}{2}(\mathrm{A}_t^{\gamma}\boldsymbol{u}_j^{n+1/2})^2 + \dfrac{\alpha_2}{3}(\mathrm{A}_t^{\gamma}\boldsymbol{u}_j^{n+1/2})^3,\\ \sqrt{\beta}(\boldsymbol{D}_1\mathrm{A}_t^{\gamma}\boldsymbol{u}^{n+1/2})_j = \mathrm{A}_t^{\gamma}\boldsymbol{v}_j^{n+1/2},\\ -(\boldsymbol{D}_1\mathrm{A}_t^{\gamma}\boldsymbol{\varphi}^{n+1/2})_j = -\mathrm{A}_t^{\gamma}\boldsymbol{u}_j^{n+1/2},\end{cases} \tag{29}$$

其中 $j = 1,2,\cdots,J$,$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_J)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_J)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{v} = (v_1,v_2,\cdots,v_J)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{u} = (u_1,u_2,\cdots,u_J)^{\mathrm{T}}$.消去变量 $\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{v}$,等式两边同时除以 A_t^{γ} 得到式(29)的等价格式:

$$\mathrm{D}_t^{\gamma}\boldsymbol{u}_j^{n+1/2} + \beta(\boldsymbol{D}_1^3\mathrm{A}_t^{\gamma}\boldsymbol{u}^{n+1/2})_j + \varepsilon(\boldsymbol{D}_1^2\mathrm{A}_t^{\gamma}\boldsymbol{u}^{n+1/2})_j +$$
$$\boldsymbol{D}_1\left(c_0(\mathrm{A}_t^{\gamma}\boldsymbol{u}^{n+1/2})_j + \frac{\alpha_1}{2}(\mathrm{A}_t^{\gamma}\boldsymbol{u}^{n+1/2})_j^2 + \frac{\alpha_2}{3}(\mathrm{A}_t^{\gamma}\boldsymbol{u}^{n+1/2})_j^3\right) = 0. \tag{30}$$

由于离散的空间一阶导算子 $\boldsymbol{D}_1$ 能保持其反自伴性[37],则有以下引理.

引理 1[37]　如果时间方向采用隐中点格式,那么得到的式(30)是共形广义多辛格式.

引理 2[37]　格式(30)满足离散广义共形多辛守恒律为

$$\frac{1}{2}\mathrm{D}_t^{\gamma}(\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_j^{n+1/2}\wedge\mathrm{d}\boldsymbol{u}_j^{n+1/2}) + \sum_{k=1}^{J}(\boldsymbol{D}_1)_{j,k}(\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_j^{n+1/2}\wedge\mathrm{d}\boldsymbol{w}_j^{n+1/2} + \sqrt{\beta}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j^{n+1/2}\wedge\mathrm{d}\boldsymbol{u}_j^{n+1/2}) =$$
$$-\varepsilon\mathrm{d}\left(\sum_{k=1}^{J}(\boldsymbol{D}_1)_{j,k}\boldsymbol{u}_j^{n+1/2}\right)\wedge\mathrm{d}\boldsymbol{u}_j^{n+1/2},$$

其中 $\Delta = \left|\varepsilon\mathrm{d}(\sum_{k=1}^{J}(\boldsymbol{D}_1)_{j,k}\boldsymbol{u}_j^{n+1/2})\wedge\mathrm{d}\boldsymbol{u}_j^{n+1/2}\right|$ 为相应的广义多辛误差.

式(30)精确满足离散共形多辛动量守恒律

$$\sum_{j=1}^{J}I_j^{n+1} = \mathrm{e}^{-2\gamma t}\sum_{j=1}^{J}I_j^{n} = \cdots = \mathrm{e}^{-2\gamma(n+1)\tau}\sum_{j=1}^{J}I_j^{n}, \tag{31}$$

同时满足修正的离散局部能量耗散律,其修正的离散局部能量误差为

$$(\Delta_{\mathrm{e}})_j^{n+1/2}=\left|\frac{\varepsilon}{2}\left(\mathrm{D}_t^{\gamma}\left(\boldsymbol{u}_j^{n+1/2}\sum_{k=1}^{J}(\boldsymbol{D}_1)_{j,k}\boldsymbol{u}_j^{n+1/2}\right)-\sum_{k=1}^{J}(\boldsymbol{D}_1)_{j,k}\boldsymbol{u}_j^{n+1/2}\mathrm{D}_t^{\gamma}\boldsymbol{u}_j^{n+1/2}\right)\right|.$$

为验证算法在 $t=n\tau$ 处的全局共形守恒性质,给出如下定义.

定义 1[37] 定义离散质量函数

$$M^n=h\sum_{j=1}^{J}u_j^n,$$

质量误差和解的绝对误差分别为

$$\varepsilon_{\mathrm{M}}(t)=|M^n-M^0|,\ \varepsilon_{\mathrm{err}}(\tau)=\|u^n-u(x,t_n)\|_{\infty},\ \varepsilon_{\mathrm{err}}(h)=\|u_j-u(x_j,t)\|_{\infty},$$

全局共形质量衰减速度为

$$r=\gamma+\frac{1}{\tau}\ln\frac{M^{n+1}}{M^n},$$

时间和空间方向的收敛阶分别为

$$O_{\mathrm{order}}=\log_2\frac{\varepsilon_{\mathrm{err}}(\tau)}{\varepsilon_{\mathrm{err}}(\tau/2)},\ O_{\mathrm{order}}=\log_2\frac{\varepsilon_{\mathrm{err}}(h)}{\varepsilon_{\mathrm{err}}(h/2)}.$$

定理 1 离散共形广义多辛 Fourier 拟谱格式满足全局质量守恒律为

$$M^{n+1}=\mathrm{e}^{-\gamma(n+1)\tau}M_j^0. \tag{32}$$

证明 在周期边界条件下对离散方程组(29)中的第一个方程关于空间指标 j 求和,由式(19)则有

$$M^{n+1}=\mathrm{e}^{-\gamma\tau}M^n=\cdots=\mathrm{e}^{-\gamma(n+1)\tau}M_j^0,$$

即离散格式的全局质量保持以 $\mathrm{e}^{-\gamma(n+1)\tau}$ 的速度衰减.

定理 2 令 $\Omega=[a,b]$,$C_p^{\infty}(\Omega)$ 是一组定义在 $H^s(\Omega)$ 上的无穷可微周期函数,$H_p^s(\Omega)$ 是 $H^s(\Omega)$ 中 $C_p^{\infty}(\Omega)$ 的闭包.$H_p^s(\Omega)$ 的范数用 $\|\cdot\|_s$ 表示.假定方程(8)的连续解满足 $u\in C^4(H_p^s(\Omega),[0,T])$,$s>1$,则格式(30)的解 u_N 在时间方向是二阶收敛的,空间方向是谱收敛的,即

$$\|u-u_N\|_{\infty}\leqslant C(\tau^2+N^{1-s}).$$

证明 依据文献[31,33,39],可类似得证.

4 数值算例

算例 1 考虑用阻尼 eKdV-Burgers 方程

$$u_t+(c_0+\alpha_1u+\alpha_2u^2)u_x+\beta u_{xxx}+\varepsilon u_{xx}+\gamma u=0,\quad x\in(a,b),\ t\in(t_0,T],$$
$$u(a,t)=u(b,t),\quad t\in(t_0,T]$$

的周期边值问题模拟单孤立波.

取初始条件[36]:

$$u(x,t_0)=\frac{a_0}{B+(1-B)\cosh^2(\lambda(x-ct_0))},\quad x\in[a,b], \tag{33}$$

其中

$$B=\frac{-a_0\alpha_2}{2\alpha_1+a_0\alpha_2},\ \lambda^2=\frac{a_0(2\alpha_1+a_0\alpha_2)}{24\beta},\ c=c_0+\frac{a_0}{3}\left(\alpha_1+\frac{1}{2}a_0\alpha_2\right).$$

取 $c_0=1$,$\alpha_1=6$,$\alpha_2=1$,$\beta=10$,$a_0=1.5$,$a=-60$,$b=60$,$t_0=0$.为了便于直观观察底摩擦效应项和浅水效应项对孤立波的影响,取浅水效应项系数 $\gamma=0.03$ 和底摩擦效应项系数 $\varepsilon=1\times10^{-6}$,空间步长 $h=0.5$,时间步长为 $\tau=0.2$,模拟结果如图 1、图 2 所示.

由图 1、图 2 可见,随着时间的推移,孤立波的振幅变小,这是底摩擦效应项和浅水效应项共同作用的结果.全局共形质量随时间变化的散点图如图 3,其变化规律可以用曲线

$$G_{\mathrm{MS}}=9.969\mathrm{e}^{-0.03t}$$

进行描述,表明全局共形质量随时间以指数速度衰减,数值结果验证了定理 1 的结论.

质量衰减速度误差、广义多辛误差及能量误差分别如图 4—图 6 所示. 图 4—图 6 表明误差至少达到 $O(10^{-7})$, 说明了算法的可行性.

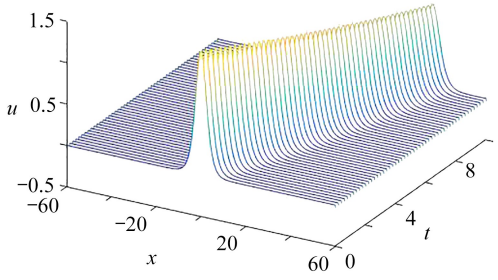

图 1　单孤立波的演化过程(算例 1)

Fig. 1　The evolution of a single solitary wave (case 1)

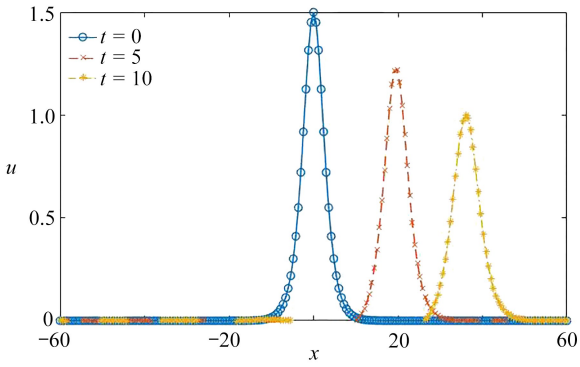

图 2　不同时刻的波形图(算例 1)

Fig. 2　Waveform plots at different moments (case 1)

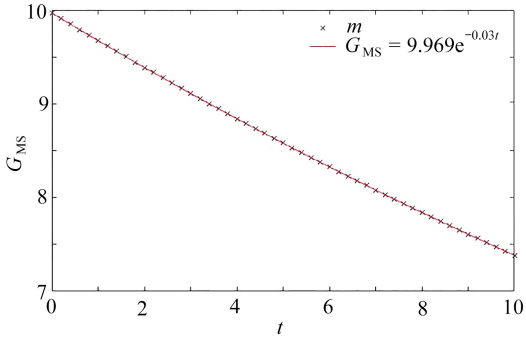

图 3　全局共形质量随时间的变化(算例 1)

Fig. 3　The global conformal change mass over time (case 1)

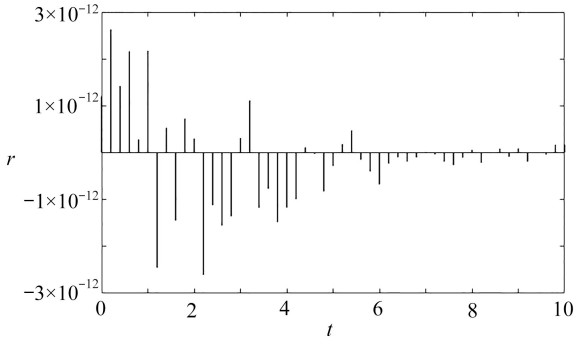

图 4　质量衰减速度误差(算例 1)

Fig. 4　The mass decay rate error (case 1)

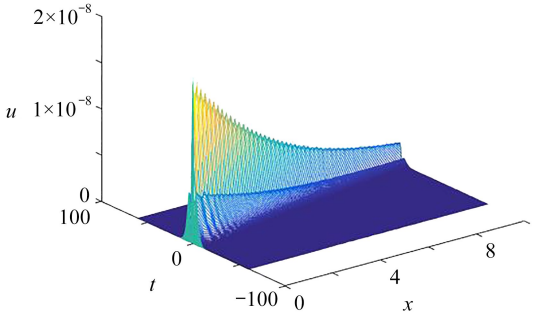

图 5　广义多辛误差(算例 1)

Fig. 5　Generalized multi-symplectic errors (case 1)

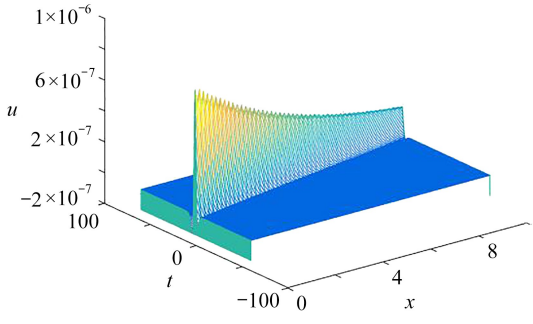

图 6　局部能量误差(算例 1)

Fig. 6　Local energy errors (case 1)

注　为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同.

共形广义多辛 Fourier 拟谱格式和 Fourier 拟谱格式的质量衰减速度的误差对比如图 7 所示.由图 7 可以看出共形广义多辛 Fourier 拟谱格式有更好的计算精度.

取 $\varepsilon = 0, \gamma = 0$ 时,式(8)退化为简单的 eKdV 方程,其解析解为

$$u(x,t) = \frac{a}{B + (1 - B)\cosh^2(\lambda(x - ct))},$$

其中

$$B = \frac{-a_0\alpha_2}{2\alpha_1 + a_0\alpha_2},\ \lambda^2 = \frac{a_0(2\alpha_1 + a_0\alpha_2)}{24\beta},\ c = c_0 + \frac{a_0}{3}\left(\alpha_1 + \frac{1}{2}a_0\alpha_2\right).$$

取 $a=-50, b=50$, 多辛 Fourier 拟谱格式在时间方向收敛阶如表 1 所示,由表 1 可见,数值格式的时间方向收敛阶与理论结果一致,均为二阶收敛.

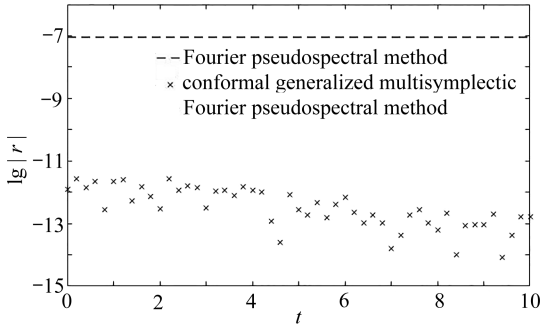

图 7 两种差分方法质量衰减速度 r 的误差对比

Fig. 7 Comparison of the errors of mass decay rate r of the 2 difference methods

表 1 取不同时间步长的误差和误差阶

Table 1 Errors and error orders at different time steps

h	τ	error	error order
1/4	1/16	3×10^{-3}	-
1/4	1/32	7.18×10^{-4}	1.958
1/4	1/64	1.93×10^{-4}	1.895
1/4	1/128	4.85×10^{-5}	1.994

多辛 Fourier 拟谱格式在空间方向收敛阶如图 8 所示.

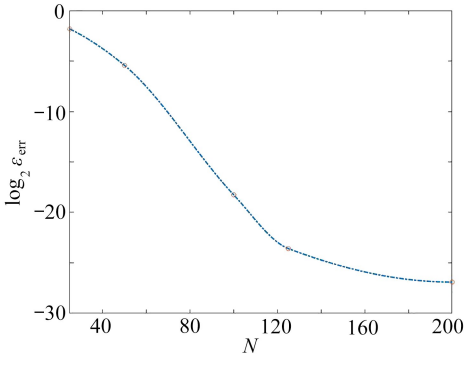

图 8 $\tau = 10^{-4}$ 时的空间谱收敛精度测试

Fig. 8 The spatial spectral convergence accuracy test at $\tau = 10^{-4}$

由图 8 可见,数值格式在空间方向是谱收敛的,这与理论分析的结果一致.

算例 2 用阻尼 eKdV-Burgers 方程

$$\begin{cases} u_t + (c_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2)u_x + \beta u_{xxx} + \varepsilon u_{xx} + \gamma u = 0, & x \in (a,b),\ t \in (t_0,T], \\ u(a,t) = u(b,t), & t \in (t_0,T] \end{cases} \tag{34}$$

的周期边值问题模拟海洋内孤立波[35], 初始条件如式(30).假设海水分为上下两层,上层厚度 $h_1 = 100$ m, 下层厚度 $h_2 = 1\ 100$ m; 上层密度 $\rho_1 = 1\ 025$ kg/m^3,下层密度 $\rho_2 = 1\ 028$ kg/m^3,且

$$c_0 = \sqrt{\frac{gh_1h_2(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1h_2+\rho_2h_1}} = 1.621\times10^{-3}\ \mathrm{km/s},\ \beta = \frac{c_0}{6}\cdot\frac{\rho_1h_2h_1^2+\rho_2h_1h_2^2}{\rho_1h_2+\rho_2h_1} = 2.980\times10^{-5}\ \mathrm{km^3/s},$$

$$\alpha_1 = -\frac{3c_0}{2}\cdot\frac{\rho_1h_2^2-\rho_2h_1^2}{\rho_1h_1h_2^2+\rho_2h_2h_1^2} = -0.022\ \mathrm{s^{-1}},$$

$$\alpha_2 = \frac{7\alpha_1^2}{18c_0} - \frac{c_0(\rho_1h_2{}^3+\rho_2h_1^3)}{h_1^2h_2^2(\rho_1h_2+\rho_2h_1)} = -1.486\times10^{-4}\ \mathrm{km^{-1}\cdot s^{-1}},$$

其中, c_0(m/s)为长内波相速度, 主要和水深有关; α_1(s^{-1})为平方非线性系数, 表示内孤立波传播过程中非线性的强弱性,当 α_1 大于零时, 波形呈上凸型, 当 α_1 小于零时, 波形呈下凹型; α_2($m^{-1}\cdot s^{-1}$)为立方非线性系数, 一般情况下为取值很小的正数,如在深水区 α_2 会小于 10^{-4} $m^{-1}\cdot s^{-1}$; β (m^3/s)为频散系数, 量级跨度大, 在深水区可达 10^6 m^3/s,浅水区可达 10^2 m^3/s; γ (s^{-1})为浅水效应系数, 量级一般为 10^{-5} s^{-1}左右.

取振幅 $a_0 = -80$ m,浅水效应系数 $\gamma = 2\times10^{-5}$ m^3/s,底摩擦效应项系数 $\varepsilon = 1\times10^{-5}$ m^2/s, $a = -50\,000$, $b = 50\,000$, 空间步长 $h = 1.25$, 时间步长为 $\tau = 5$.模拟结果图 9—图 12 所示,图 10—图 12 表明算法的可行性.

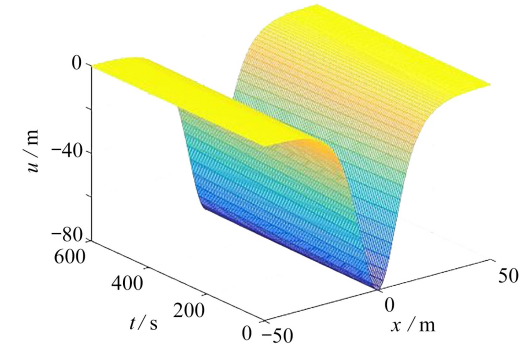

图 9　单孤立波的演化过程(算例 2)

Fig. 9　The evolution of the single solitary wave (case 2)

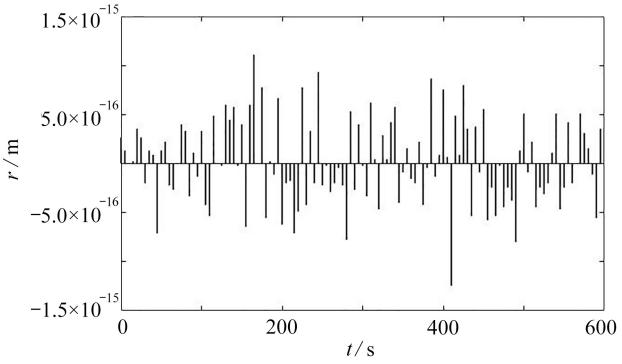

图 10　质量衰减速度的误差(算例 2)

Fig. 10　The error of the mass decay rate (case 2)

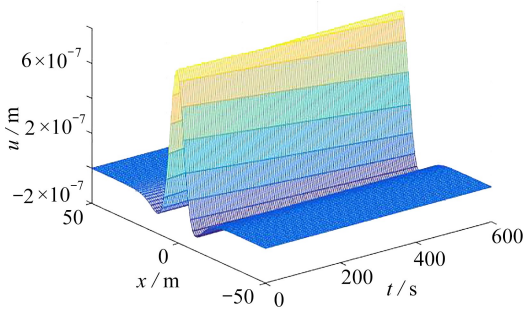

图 11　局部能量误差(算例 2)

Fig. 11　Local energy errors (case 2)

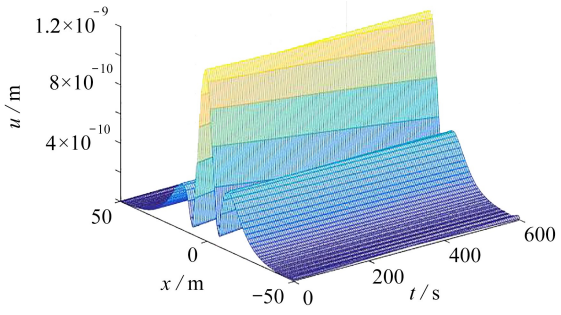

图 12　广义多辛误差(算例 2)

Fig. 12　Generalized multi-symplectic errors (case 2)

模型的参数与海水密度及层结有关,不同海洋环境中的内孤立波波形有所不同.取空间步长 $h = 0.5$, 时间步长为 $\tau = 0.2$, 下面给出非线性项 α_1、高阶非线性项 α_2 和频散项 β 对内孤立波的影响图(图 13—图 20),旨在为海洋内孤立波研究提供参考.

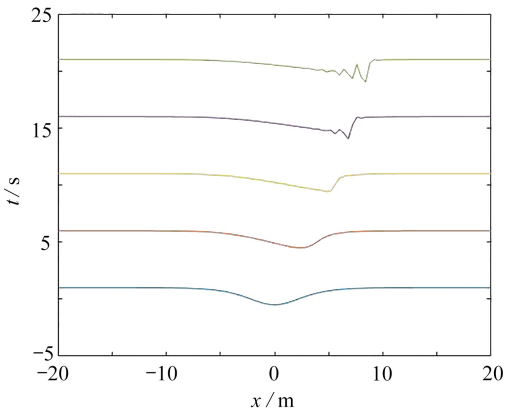

图 13　非线性项的影响

Fig. 13　The effects of nonlinear terms

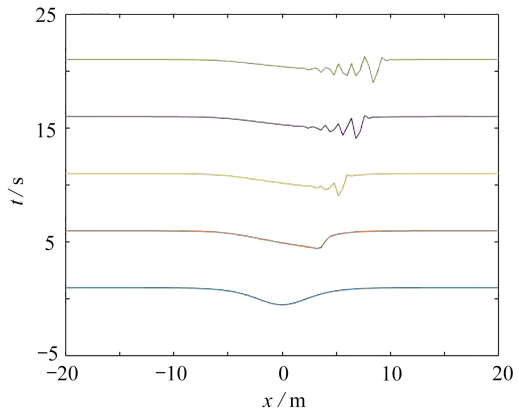

图 14　高阶非线性项的影响

Fig. 14　The effects of higher-order nonlinear terms

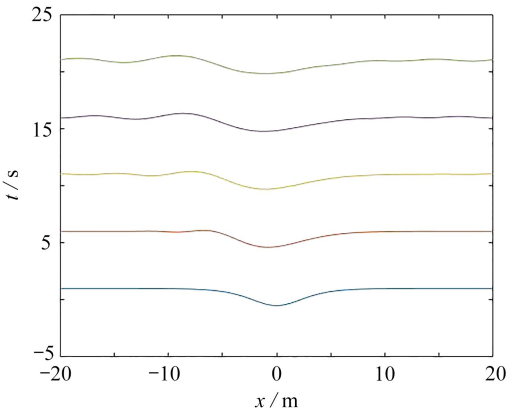

图 15 频散项的影响

Fig. 15 The effects of the dispersion terms

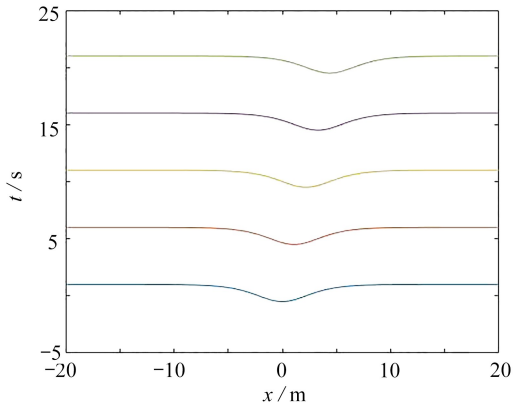

图 16 整体演化图

Fig. 16 Overall evolution curves

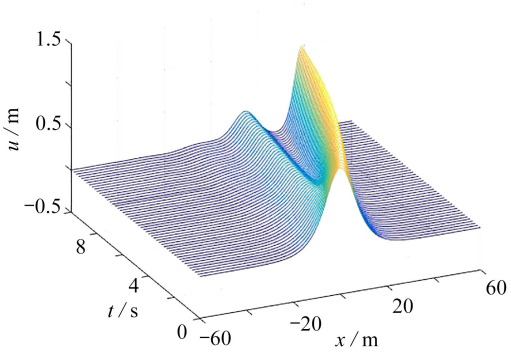

图 17 单孤立波的演化过程 1

Fig. 17 Evolution 1 of the single solitary wave

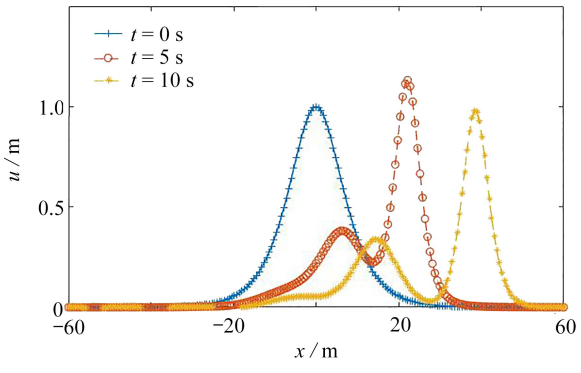

图 18 不同时刻的波形图 1

Fig. 18 Waveform plots 1 at different moments

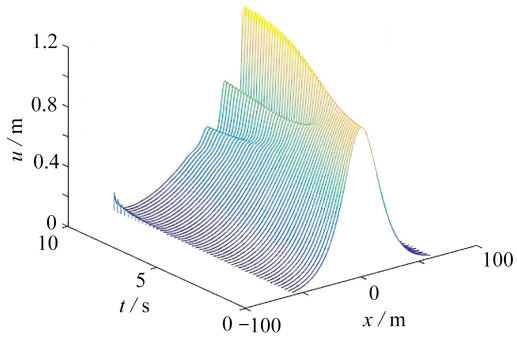

图 19 单孤立波的演化过程 2

Fig. 19 The evolution 2 of the single solitary wave

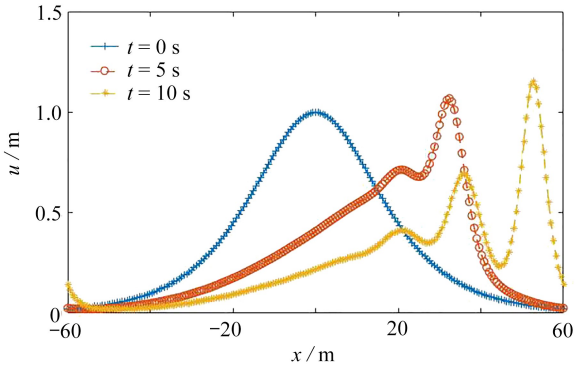

图 20 不同时刻的波形图 2

Fig. 20 Waveform plots 2 at different moments

观察图 13— 图 15 可见,非线性效应使内孤立波在传播过程中发生变形,波前变陡,波宽变窄,波后变化相对较小.内孤立波不断陡化并发生裂变,形成振幅由大到小排列的波列; 高阶非线性效应加剧波形陡化,频散效应使内孤立波在传播过程中波形不断展宽发生频散,生成振幅由大到小的波列,波与波的间距不断变大.观察图 16 可见,内孤立波保持波形向前传播,这是非线性与频散相平衡的结果.观察图 17—图 20 可见,当 β 改变到一定程度,孤立波会发生破碎现象.

算例 3 用阻尼 eKdV-Burgers 方程

$$u_t + (1 + 6u + u^2)u_x + 10u_{xxx} + \gamma u + \varepsilon u_{xx} = 0, \qquad x \in (a,b),\ t \in (t_0,T],$$

$$u(a,t) = u(b,t), \qquad t \in (t_0,T]$$

的周期边值问题模拟双孤立波.取初始条件

$$u(x,0)=\frac{27}{-2+16\cosh^2(\sqrt{5}x/8)}+\frac{3}{1+2\cosh^2((x-5)/4)},\qquad x\in[a,b],$$

浅水效应项系数 $\gamma=0.03$ 和底摩擦效应项系数 $\varepsilon=1\times10^{-6}$,$a=-60$,$b=60$, 空间步长 $h=0.5$, 时间步长 $\tau=0.2$.数值结果如图 21—图 26 所示.

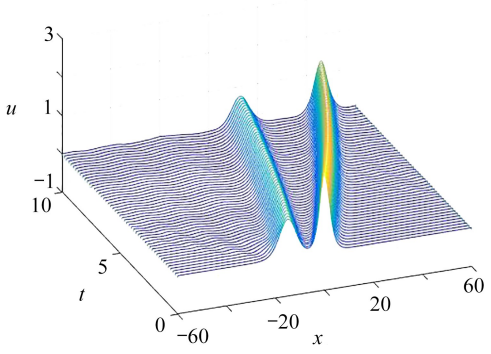

图 21　双孤立波的演化过程(算例 3)

Fig. 21　The evolution of double solitary waves (case 3)

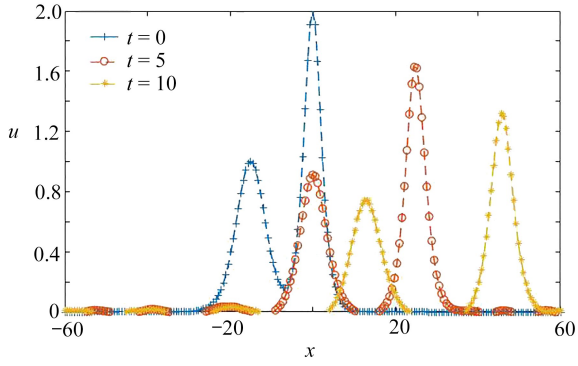

图 22　不同时刻的波形(算例 3)

Fig. 22　Wave forms of different moments (case 3)

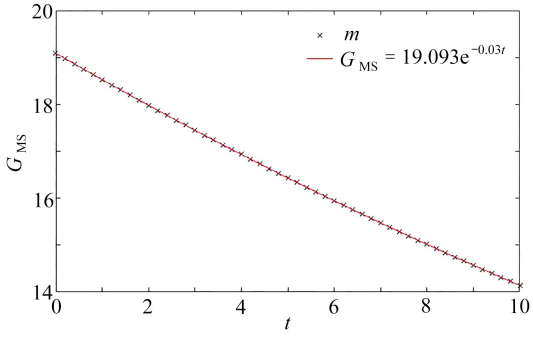

图 23　全局共形质量随时间变化(算例 3)

Fig. 23　Global conformal mass changes over time (case 3)

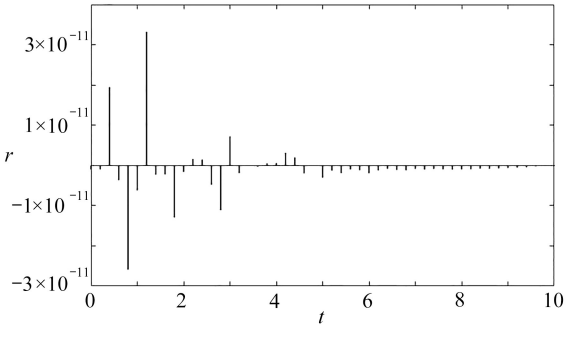

图 24　质量衰减速度的误差(算例 3)

Fig. 24　The mass decay rate error (case 3)

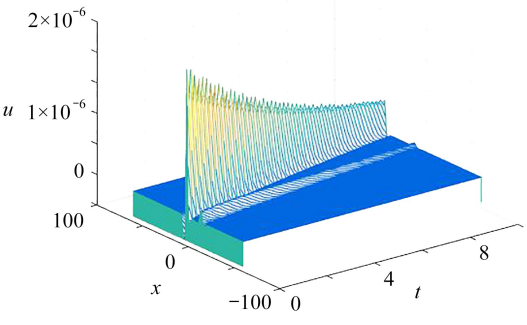

图 25　广义多辛误差图(算例 3)

Fig. 25　Generalized multi-symplectic errors (case 3)

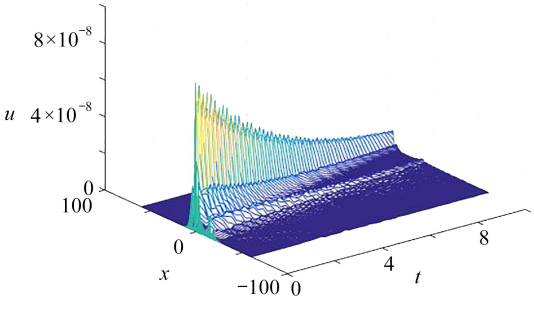

图 26　局部能量误差图(算例 3)

Fig. 26　Local energy errors (case 3)

由图 22 可见, 随着时间的推移, 孤立波的振幅变小, 两个波峰距离变大.全局共形质量随时间变化的规律与指数函数

$$G_{\mathrm{MS}}=19.093\mathrm{e}^{-0.03t}$$

拟合较好,见图 23.图 24—图 26 表明算法的可行性.

若改变初始条件

$$u_0 = \frac{14}{(-1+8\cosh(\sqrt{7/60}(x-17)))^2} + \frac{3}{(1+2\cosh(x/4))^2}$$

和初始振幅 $a_0 = 3$, 其他参数不变,取空间步长 $h = 0.5$, 时间步长 $\tau = 0.2$, 模拟情况如图 27—图 30 所示.

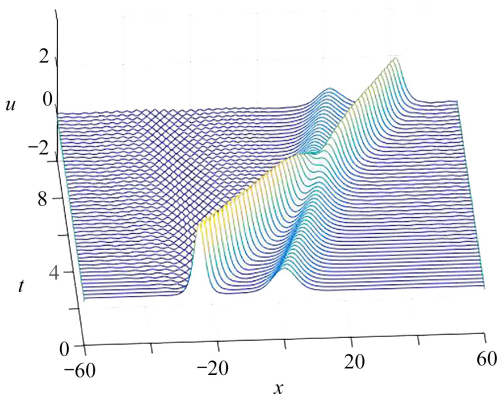

图 27 双孤立波的演化过程

Fig. 27 The evolution of double solitary waves

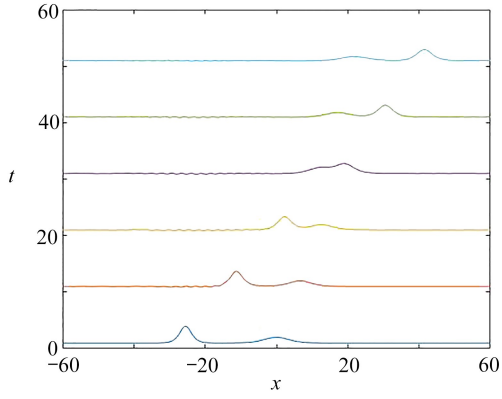

图 28 不同时刻波形对比

Fig. 28 Comparison of waveforms at different moments

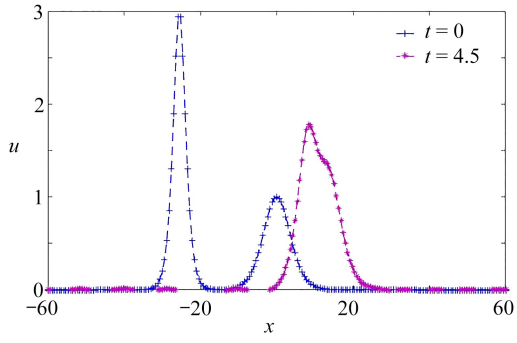

图 29 双孤立波不同时刻 ($t = 0$, $t = 4.5$)

Fig. 29 The double solitary waves of different moments ($t = 0$, $t = 4.5$)

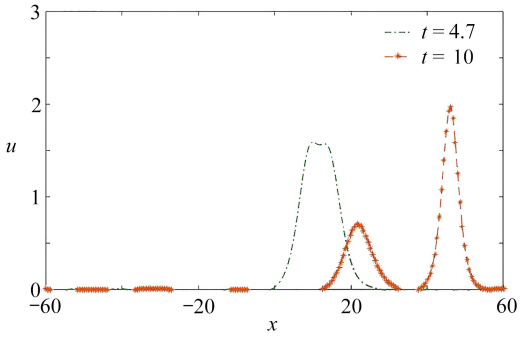

图 30 双孤立波不同时刻 ($t = 4.7$, $t = 10$)

Fig. 30 The double solitary waves of different moments ($t = 4.7$, $t = 10$)

观察图 27—图 30 可见,双孤立波在向右传播的过程中,振幅大的孤立波传播速度较快.双波传播过程中发生碰撞,在碰撞时,振幅大的孤立波振幅减小,振幅小的孤立波振幅增大;碰撞结束后,恢复碰撞前的波形继续向前传播.

5 小 结

对海洋内波理论模型的数值模拟相比于传统海洋内波现场单点观测,可完整刻画内波的传播演化过程,是研究内孤立波动力机制的有效手段.如对 eKdV 型方程的数值模拟[18,21,35].但传统算法除少数外,大部分不是辛算法,不可避免地代入人为耗散,不能进行长时间稳定的数值跟踪模拟.而保结构算法确能够保持系统某些守恒律,为研究内孤立波传播过程提供了新思路.本文基于分裂思想和共形广义多辛理论考虑了具有周期边界条件的阻尼 eKdV-Burgers 方程, 这类方程可以描述海洋内波问题.对该方程采用时间中心离散,空间 Fourier 拟谱方法离散,构造了共形广义多辛 Fourier 拟谱格式.模拟结果保持守恒律且与内波在海洋中的传播特性一致.结论如下:

1) 模型(8)更具有通用性.当系数发生变化时,它可以退化为 KdV-mKdV-Burgers 方程、eKdV 方程、KdV-mKdV 方程和 KdV 方程等.

2) 阻尼 eKdV-Burgers 方程的全局共形质量和动量是时间变量的指数函数.

3) 阻尼 eKdV-Burgers 方程的共形广义多辛 Fourier 拟谱算法误差远小于传统 Fourier 拟谱算法误差.

4) 随着阻尼 eKdV-Burgers 方程中底摩擦效应项和浅水效应项的增大内波的衰减速度加快,其传播速度

减慢,振幅减小.

5) 共形广义多辛 Fourier 拟谱方法推广到求解二维和三维非线性偏微分方程时,首先将原方程表示为共形广义 Hamilton 系统; 其次,针对复杂的谱求导矩阵和更高维度的数据,可采用快速 Fourier 变换算法减少计算的复杂度.另外,误差估计有一定的困难.

模拟结果显示新构造的方法在保持系统质量和动量衰减特性方面表现良好,这有利于对相应物理问题和物理现象的准确理解,该研究对海洋工程设计等相关应用问题具有一定价值和实际意义.

致谢　本文作者衷心感谢无穷维哈密顿系统及其算法应用教育部重点实验室开放课题(2023KFZD01)对本文的资助.

参考文献(References):

[1] 冯康, 秦孟兆. 哈密尔顿系统的辛几何算法[M]. 杭州: 浙江科学技术出版社, 2003.(FENG Kang, QIN Mengzhao. *Symplectic Geometric Algorithms for Hamiltonian Systems*[M]. Hangzhou: Zhejiang Science and Technology Publishing House, 2003. (in Chinese))

[2] 秦孟兆, 王雨顺. 偏微分方程中的保结构算法[M]. 杭州: 浙江科学技术出版社, 2011. (QIN Mengzhao, WANG Yushun. *Structure-Preserving Algorithm for Partial Differential Equation*[M]. Hangzhou: Zhejiang Science and Technology Publishing House, 2011. (in Chinese))

[3] HAIRER E, LUBICH C, WANNER G. *Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*[M]. 2nd ed. Berlin Heidlberg: Springer, 2006.

[4] MCLACHLAN R I, QUISPEL G R W. Splittingmethods[J]. *Acta Numerica*, 2002, **11**: 341-434.

[5] 王雨顺, 秦孟兆. 变分与无限维系统的高精度辛格式[J]. 计算数学, 2002, **24**(4): 431-436.(WANG Yushun, QIN Mengzhao. Variation and high order accuracy symplectic scheme for infinite dimensional system[J]. *Mathematica Numerica Sinica*, 2002, **24**(4): 431-436. (in Chinese))

[6] TANG Y F, VÁZQUEZ L, ZHANG F, et al. Symplectic methods for the nonlinear Schrödinger equation[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 1996, **32**(5): 73-83.

[7] SHANG Z J. KAM theorem of symplectic algorithms for Hamiltoniansystems[J]. *Numerische Mathematik*, 1999, **83**(3): 477-496.

[8] BRIDGES T J, REICH S. Multi-symplectic integrators: numerical schemes for Hamiltonian PDEs that conservesymplecticity[J]. *Physics Letters A*, 2001, **284**(4/5): 184-193.

[9] BRIDGES T J. Multi-symplectic structures and wavepropagation[J]. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1997, **121**(1): 147-190.

[10] MARSDEN J E, PATRICK G W, SHKOLLER S. Multisymplectic geometry, variational integrators, and nonlinear PDEs[J]. *Communications in Mathematical Physics*, 1998, **199**(2): 351-395.

[11] MARSDEN J E, PEKARSKY S, SHKOLLER S, et al. Variational methods, multisymplectic geometry and continuum mechanics[J]. *Journal of Geometry and Physics*, 2001, **38**(3/4): 253-284.

[12] 王雨顺, 王斌, 秦孟兆. 2+1 维 sine-Gordon 方程多辛格式的复合构造[J]. 中国科学(A 辑), 2003, **33**(3): 272-281.(WANG Yushun, WANG Bin, QIN Mengzhao. Composite construction of multi-symplectic scheme for 2+1 dimensional sine-Gordon equation[J]. *Science in China* (*Serises A*), 2003, **33**(3): 272-281. (in Chinese))

[13] 王雨顺, 王斌, 季仲贞. 孤立波方程的保结构算法[J]. 计算物理, 2004, **21**(5): 386-400.(WANG Yushun, WANG Bin, JI Zhongzhen. Structure preserving algorithms for soliton equations[J]. *Chinese Journal of Computation Physics*, 2004, **21**(5): 386-400. (in Chinese))

[14] 王雨顺, 王斌, 秦孟兆. 偏微分方程的局部保结构算法[J]. 中国科学(A 辑): 数学, 2008, **38**(4): 377-397.(WANG Yushun, WANG Bin, QIN Mengzhao. Local structure-preserving algorithm for partial differential equations[J]. *Science in China* (*Series A*): *Mathematics*, 2008, **38**(4): 377-397. (in Chinese))

[15] SUN Y J, QIN M Z. A multi-symplectic scheme for RLW equation[J]. *Journal of Computational Mathematics*, 2004, **22**(4): 611-621.

[16] 胡伟鹏, 邓子辰. 无限维动力学系统的保结构分析方法[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2015. (HU Weipeng, DENG Zichen. *Structure-Preserving Analysis Method for Infinite Dimensional Dynamic Systems*[M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 2015. (in Chinese))

[17] 胡伟鹏, 邓子辰, 李文成. KdV 方程的多辛算法及其孤子解的数值模拟[J]. 西北工业大学学报, 2008, **26**(1): 128-131.(HU Weipeng, DENG Zichen, LI Wencheng. Multi-symplectic algorithm and simulation of soliton for KdV equation[J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2008, **26**(1): 128-131. (in Chinese))

[18] 何啸, 贾村, 孟静, 等. 内孤立波过陆架陆坡地形的数值模拟研究[J]. 海洋科学, 2023, **47**(3): 1-14.(HE Xiao, JIA Cun, MENG Jing, et al. Numerical investigation of the evolution of internal solitary waves over shelf-slope topography[J]. *Marine Sciences*, 2023, **47**(3): 1-14. (in Chinese))

[19] 郭峰, 吴凤珍. MKdV 方程的多辛格式[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2005, **33**(1): 128-129.(GUO Feng, WU Fengzhen. Multi-symplectic scheme for MKdV equation[J]. *Journal of Henan Normal University* (*Natural Science Edition*), 2005, **33**(1): 128-129. (in Chinese))

[20] 胡伟鹏, 邓子辰, 李文成. 广义 KdV-mKdV 方程的多辛算法及孤波解数值模拟[J]. 西北工业大学学报, 2008, **26**(4): 450-453.(HU Weipeng, DENG Zichen, LI Wencheng. Multi-symplectic scheme and simulation of solitary wave solution for generalized KdV-mKdV equation[J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2008, **26**(4): 450-453. (in Chinese))

[21] 王晨迺, 王桂霞, 萨和雅. EKdV 方程的高阶多辛保结构算法及孤立波解的数值模拟[J]. 内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版), 2023, **52**(2): 119-126.(WANG Chenli, WANG Guixia, SA Heya. High order multisymplectic structure-preserving algorithm and numerical simulation of solitary wave solutions for EKdV equation [J]. *Journal of Inner Mongolia Normal University* (*Natural Science Edition*), 2023, **52**(2): 119-126. (in Chinese))

[22] HELFRICH K R, MELVILLE W K. On long nonlinear internal waves over slope-shelf topography[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1986, **167**: 285.

[23] MCLACHLAN R, PERLMUTTER M. Conformal Hamiltonian systems[J]. *Journal of Geometry and Physics*, 2001, **39**(4): 276-300.

[24] BHATT A, FLOYD D, MOORE B E. Second order conformal symplectic schemes for damped Hamiltonian systems[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2016, **66**(3): 1234-1259.

[25] MOORE B E. Conformal multi-symplectic integration methods for forced-damped semi-linear wave equations [J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2009, **80**(1): 20-28.

[26] MOORE B E, NOREÑA L, SCHOBER C M. Conformal conservation laws and geometric integration for damped Hamiltonian PDEs[J]. *Journal of Computational Physics*, 2013, **232**(1): 214-233.

[27] MOORE B E. Multi-conformal-symplectic PDEs and discretizations[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2017, **323**: 1-15.

[28] 汪佳玲. 几个偏微分方程的保结构算法构造及误差分析[D]. 南京: 南京师范大学, 2017.(WANG Jialing. Construction and analysis of the structure-preserving algorithms for the Hamiltonian partial differential equations [D]. Nanjing: Nanjing Normal University, 2017. (in Chinese))

[29] 郑家栋, 张汝芬, 郭本瑜. SRLW 方程的 Fourier 拟谱方法[J]. 应用数学和力学, 1989, **10**(9): 801-810. (ZHENG Jiadong, ZHANG Rufen, GUO Benyu. The Fourier pseudo-spectral method for the SRLW equation [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1989, **10**(9): 801-810. (in Chinese))

[30] 邓镇国, 马和平. 广义 KdV 方程 Fourier 谱逼近的最优误差估计[J]. 应用数学和力学, 2009, **30**(1): 30-39. (DENG Zhenguo, MA Heping. Optimal error estimates for Fourier spectral approxiation of the generalized KdV equation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, **30**(1): 30-39. (in Chinese))

[31] HU D D, CAI W J, XU Z Z, et al. Dissipation-preserving Fourier pseudo-spectral method for the space fractional nonlinear sine-Gordon equation with damping[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2021, **188**: 35-59.

[32] HE Y, ZHAO X F. Numerical methods for some nonlinear Schrödinger equations in soliton management[J].

Journal of Scientific Computing, 2023, **95**(2): 61.

[33] 许壮志. 空间分数阶非线性 Schrödinger 方程保结构算法[D]. 南京: 南京师范大学, 2021. (XU Zhuangzhi. Structure-preserving algorithms for the space fractional nonlinear Schrödinger equation[D]. Nanjing: Nanjing Normal University, 2021. (in Chinese))

[34] 蔡树群. 内孤立波数值模式及其在南海区域的应用[M]. 北京: 海洋出版社, 2015. (CAI Shuqun. *Numerical Model of Internal Solitary Waves and Its Application in South China Sea Region*[M]. Beijing: Ocean Press, 2015. (in Chinese))

[35] 方欣华, 杜涛. 海洋内波基础和中国海内波[M]. 青岛: 中国海洋大学出版社, 2005. (FANG Xinhua, DU Tao. *Fundamentals of Oceanic Internal Waves and Internal Waves in the China Seas*[M]. Qingdao: China Ocean University Press, 2005. (in Chinese))

[36] 张善武. 基于变系数 KdV-type 理论模型的南海北部内孤立波传播演变过程研究[D]. 青岛: 中国海洋大学, 2014. (ZHANG Shanwu. Investigation of the propagation and evolution processes of internal solitary waves in the Northern South China Sea based on the variable-coefficients KdV-type theoretical models[D]. Qingdao: Ocean University of China, 2014. (in Chinese))

[37] 傅浩. 共形 Hamilton 系统的若干保结构算法研究[D]. 长沙: 国防科技大学, 2018. (FU Hao. Some structure-preserving algorithms for conformal Hamiltonian system[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2018. (in Chinese))

[38] 宋松和, 陈亚铭, 朱华君. KdV 方程的多辛 Fourier 拟谱格式及其孤立波解的数值模拟[J]. 安徽大学学报(自然科学版), 2010, **34**(4): 1-7. (SONG Songhe, CHEN Yaming, ZHU Huajun. Multi-symplectic Fourier pseudospectral scheme and simulation of soliton solutions for the KdV equation[J]. *Journal of Anhui University* (*Natural Sciences Edition*), 2010, **34**(4): 1-7. (in Chinese))

[39] 向新民. 谱方法的数值分析[M]. 北京: 科学出版社, 2000. (XIANG Xinmin. *Numerical Analysis of Spectral Method*[M]. Beijing: Science Press, 2000. (in Chinese))