

# 有界区域上 2D 非自治 $g$ -Navier-Stokes 方程的拉回吸引子\*

姜金平<sup>1,2</sup>, 侯延仁<sup>1</sup>

(1. 西安交通大学 理学院, 西安 710049;  
2. 延安大学 数学与计算机学院, 陕西 延安 716000)

(陈立群推荐)

**摘要:** 通过研究拉回渐近紧性来讨论有界区域上 2D 非自治  $g$ -Navier-Stokes 方程的拉回吸引子的存在性, 给出了一种验证拉回吸引子存在性的新方法.

**关键词:** 拉回吸引子;  $g$ -Navier-Stokes 方程; 拉回渐近紧性; 拉回条件(PC); 有界区域

**中图分类号:** O175; O35      **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.06.004

## 引 言

近十多年来, Navier-Stokes 方程以其在流体力学和湍流理论上的重要应用而备受关注(见文献[1-7]). 毫无疑问, 对动力系统渐近行为的认识是现代数学物理的一个重要问题. 对于具有耗散性的自治系统而言, 解决这个问题的一种途径是分析其全局吸引子的存在性和结构(见文献[1-5, 8-10]); 而针对非自治系统和随机动力系统, 学者们提出了拉回吸引子理论(见文献[11-19]), 并且证明这种理论在研究非自治动力系统时非常有用. 本文研究了有界区域  $\Omega \subset R^2$  上 2D 非自治  $g$ -Navier-Stokes 方程的拉回吸引子存在性. 2D 非自治  $g$ -Navier-Stokes 方程形式如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f(x, t), & \text{在 } \Omega \times (0, \infty) \text{ 中,} \\ \nabla \cdot (gu) = 0, & \text{在 } \Omega \times (0, \infty) \text{ 中,} \\ u(x, t) = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上,} \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{在 } \Omega \text{ 中,} \end{cases} \quad (1)$$

这里  $u(x, t) \in R^2$  和  $p(x, t) \in \mathbf{R}$  表示速度和压力,  $\nu > 0$ ,  $f = f(x, t) \in (L^2(\Omega))^2$  是和有关的外力项.  $0 < m_0 \leq g = g(x_1, x_2) \leq M_0$ . 这里  $g = g(x_1, x_2)$  是某类实值光滑函数. 当  $g = 1$ , 方程(1)即为 2D Navier-Stokes 方程.

目前, 有关自治的 2D  $g$ -N-S 方程的全局吸引子研究已有一些结果, 如 Roh 的文献[20],

\* 收稿日期: 2009-11-18; 修订日期: 2010-04-08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10871156)

作者简介: 姜金平(1974—), 男, 陕西洛川人, 副教授, 博士(联系人. E-mail: yadxjjp@163.com);

侯延仁(1969—), 男, 陕西延安人, 教授, 博士生导师.

Kwak 的文献[21]及 Jiang 和 Hou 的文献[22]. 在文献[20]中, Roh 利用半流理论研究了 2D  $g$ -N-S 方程的全局吸引子在有界区域上的存在性; 在文献[21]中, Kwak 研究了 Dirichlet 边界和周期边界条件下 2D  $g$ -N-S 方程的全局吸引子的 Hausdorff 和 Fractal 维数问题. 而在文献[22]中, 我们主要研究了带线性阻尼的 2D  $g$ -N-S 方程在  $R^2$  的全局吸引子存在性和其 Fractal 维数问题. 以上这些研究工作均是针对自治的 2D  $g$ -N-S 方程进行的, 而当前有关非自治 2D  $g$ -N-S 方程的相关讨论尚未见到. 对于非自治系统而言, 我们需要利用拉回吸引子理论来解释其动力学行为. 因此, 本文的研究工作是具备理论基础的, 也是必要的.

在文献[12]中, Caraballo 介绍了非自治动力系统拉回  $\Delta$ -吸引子的概念并借助能量方程方法证明了拉回  $\Delta$ -吸引子的存在性. 但要验证拉回渐近紧性条件相对比较困难, 由文献[17-19, 23]可知, 利用非紧性测度可以获得验证拉回渐近紧性的 PC 等价条件, 这对于一般的非自治动力系统是易于验证的, 作为这一方法的应用, 我们证明了有界区域  $\Omega \subset R^2$  上 2D 非自治  $g$ -Navier-Stokes 方程的拉回吸引子存在性.

本文结构安排如下: 在第 1 节里, 我们回顾了有关 2D  $g$ -Navier-Stokes 方程的主要概念和结果及拉回渐近紧性的概念; 在第 2 节, 利用非紧性测度我们证明了有界区域  $\Omega \subset R^2$  上 2D 非自治  $g$ -Navier-Stokes 方程的拉回吸引子存在性.

## 1 预备知识

假设 Poincaré 不等式在  $\Omega$  上成立, 即存在  $\lambda_1 > 0$ , 使得

$$\int_{\Omega} \phi^2 g dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 g dx, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \quad (2)$$

设  $L^2(g) = (L^2(\Omega))^2$ , 其内积为

$$(u, v) = \int_{\Omega} u \cdot v g dx,$$

范数为  $|\cdot| = (\cdot, \cdot)^{1/2}$ ,  $u, v \in L^2(g)$ . 另设  $H_0^1(g) = (H_0^1(\Omega))^2$ , 其内积和范数分别为

$$((u, v)) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \nabla u_j \cdot \nabla v_j g dx, \quad \|\cdot\| = ((\cdot, \cdot))^{1/2};$$

$$u = (u_1, u_2), \quad v = (v_1, v_2) \in H_0^1(g).$$

由(2)式可知, 范数  $\|\cdot\|$  等价于  $H_0^1(\Omega)$  的范数, 设  $D(\Omega)$  是在  $\Omega$  中具有紧支集的  $C^\infty$  函数空间,  $\mathfrak{N} = \{v \in (D(\Omega))^2 : \nabla \cdot gv = 0, \text{ 在 } \Omega \text{ 中}\}$ ;  $H_g$  是  $\mathfrak{N}$  中的闭包, 在  $L^2(g)$  内;  $V_g$  是  $\mathfrak{N}$  中的闭包, 在  $H_0^1(g)$  内.  $H_g$  和  $V_g$  各自具有  $L^2(g)$  和  $H_0^1(g)$  的内积和范数. 由(2)式可得

$$|u|^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} \|u\|^2, \quad \forall u \in V_g. \quad (3)$$

我们定义  $g$ -Laplace 算子:

$$-\Delta_g u = -\frac{1}{g}(\nabla \cdot g \nabla)u = -\Delta u - \frac{1}{g} \nabla g \cdot \nabla u.$$

利用  $g$ -Laplace 算子, 我们将方程(1)写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta_g u + \nu \frac{\nabla g}{g} \cdot \nabla u + (u, \nabla)u + \nabla p = f. \quad (4)$$

我们定义  $g$ -正交投射为  $P_g : L^2(g) \rightarrow H_g$  和  $g$ -Stokes 算子  $A_g u = -P_g((1/g)(\nabla \cdot (g \nabla u)))$ . 其满足下面命题:

**命题 1.1**<sup>[20]</sup> 对线性算子  $A_g$ , 下面结论成立:

1)  $A_g$  是紧的可逆正自伴算子, 这里  $A_g$  的定义域  $D(A_g) = V_g \cap H^2(\Omega)$ ;

2) 存在  $A_g$  的可数特征值满足  $0 < \lambda_g \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ , 这里  $\lambda_g = 4\pi^2 m_0 / M_0$ ,  $\lambda_1$  是  $A_g$  的最小特征值. 此外, 存在相应的特征值集合  $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ , 其构成  $H_g$  的正交基.

将投射  $P_g$  作用于方程(4), 可得(1)式的弱形式: 设  $f \in V_g, u_0 \in H_g$ , 有

$$u \in L^\infty(0, T; H_g) \cap L^2(0, T; V_g), \quad T > 0, \quad (5)$$

使得

$$\frac{d}{dt}(u, v) + \nu((u, v)) + b_g(u, u, v) + \nu(Ru, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V_g, \forall t > 0, \quad (6)$$

$$u(0) = u_0, \quad (7)$$

这里  $b_g: V_g \times V_g \times V_g \rightarrow \mathbf{R}$  且有

$$b_g(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^2 \int u_i \frac{\partial v_j}{\partial x} w_j g dx \quad (8)$$

和  $Ru = P_g[(1/g)(\nabla g \cdot \nabla)u]$ ,  $\forall u \in V_g$ , 则(6)式等价于下面方程

$$\frac{du}{dt} + \nu A_g u + Bu + \nu Ru = f, \quad (9)$$

$$u(0) = u_0, \quad (10)$$

这里  $A_g: V_g \rightarrow V'_g$  是  $g$ -Stokes 算子且

$$\langle A_g u, v \rangle = ((u, v)), \quad \forall u, v \in V_g, \quad (11)$$

$B(u) = B(u, u) = P_g(u \cdot \nabla)u$  是双线性算子且  $B: V_g \times V_g \rightarrow V'_g$  定义为

$$\langle B(u, v), w \rangle = b_g(u, v, w), \quad \forall u, v, w \in V_g.$$

由文献[24]可得下面不等式成立, 对每一  $u, v \in D(A_g)$ ,

$$|B(u, v)| \leq C \|u\|^{1/2} \|A_g u\|^{1/2} \|v\|, \quad (12)$$

$C$  表示正常数, 不同行甚至同一行也可取不同值.

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)^2} \leq C \|\varphi\| \left(1 + \log \frac{|A_g \varphi|^2}{\lambda_1 \|\varphi\|^2}\right)^{1/2}, \quad \forall \varphi \in D(A_g). \quad (13)$$

由上式可得

$$|B(u, v)| \leq |(u \cdot \nabla)v| \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla v\|. \quad (14)$$

利用(13)式可得

$$|B(u, v)| \leq C \|u\| \|v\| \left(1 + \log \frac{|A_g u|^2}{\lambda_1 \|u\|^2}\right)^{1/2}. \quad (15)$$

$g$ -Stokes 算子  $A_g: V_g \rightarrow V'_g$ ,  $B$  和  $R$  满足下面不等式(见文献[20, 25]):

$$\|B(u)\|_{V'} \leq c \|u\| \|u\|, \quad \|Ru\|_{V'} \leq \frac{|\nabla g|_\infty}{m_0 \lambda_1^{1/2}} \|u\|, \quad \forall u \in V_g, \quad (16)$$

下面命题是成立的(见文献[6, 26]).

**命题 1.2** 设  $f \in L^2(g), u_0(x) \in H_g$ , 则存在一个唯一解

$$u(x, t) \in L^\infty(\mathbf{R}^+; H_g) \cap L^2(0, T; V_g) \cap C(\mathbf{R}^+; H_g), \quad \forall T > 0,$$

使得(6)式和(7)式成立.

设  $\Gamma$  是非空集, 定义一族映射  $\{\theta_t\}_{t \in \mathbf{R}}$  为  $\theta_t: \Gamma \rightarrow \Gamma$  满足下列条件:

1)  $\theta_0 \gamma = \gamma$  对所有  $\gamma \in \Gamma$ ;

2)  $\theta_t(\theta_\tau\gamma) = \theta_{t+\tau}\gamma$  对所有  $\gamma \in \Gamma, t, \tau \in \mathbf{R}$ .

则称算子  $\theta_t$  为平移算子.

设  $X$  是具有度量  $d(\cdot, \cdot)$  的度量空间, 称  $\phi$  是  $X$  上的  $\theta$ -共圈, 即  $\phi: \mathbf{R}_+ \times \Gamma \times X \rightarrow X$  满足:

1)  $\phi(0, \gamma, x) = x$  对所有  $(\gamma, x) \in \Gamma \times X$ ;

2)  $\phi(t + \tau, \gamma, x) = \phi(t, \theta_\tau\gamma, \phi(\tau, \gamma, x))$  对所有  $t, \tau \in \mathbf{R}_+, (\gamma, x) \in \Gamma \times X$ .

称  $\theta$ -共圈  $\phi$  是连续的, 若对所有  $(t, \gamma) \in \mathbf{R}_+ \times \Gamma$ , 映射  $\phi(t, \gamma, \cdot): X \rightarrow X$  是连续的. 设  $\varphi(X)$  是  $X$  的非空子集族,  $\varphi$  是由  $\tilde{D} = \{D(\gamma): \gamma \in \Gamma\} \subset \varphi(X)$  的所有集族构成的类. 设有非空子类  $\mathfrak{D} \subset \varphi$ .

**定义 1.3** 称  $\theta$ -共圈  $\phi$  是拉回  $\mathfrak{D}$ -渐近紧的, 如果对任意  $\gamma \in \Gamma, \tilde{D} \in \mathfrak{D}$  和任意序列  $t_n \rightarrow +\infty, x_n \in D(\theta_{-t_n}\gamma)$ , 序列  $\phi(t_n, \theta_{-t_n}\gamma, x_n)$  具有一个收敛的子序列.

**定义 1.4** 称集族  $\tilde{B} = \{B(\gamma): \gamma \in \Gamma\} \in \varphi$  是拉回  $\mathfrak{D}$ -吸收的, 若对每一个  $\gamma \in \Gamma$  和  $\tilde{D} \in \mathfrak{D}$ , 总存在  $t_0(\gamma, \tilde{D}) \geq 0$  使得

$$\phi(t, \theta_{-t}\gamma, D(\theta_{-t}\gamma)) \subset B(\gamma), \quad t \geq t_0(\gamma, \tilde{D}).$$

我们定义  $C_1$  和  $C_2$  的 Hausdorff 半距离为

$$\text{dist}(C_1, C_2) = \sup_{x \in C_1} \inf_{y \in C_2} d(x, y), \quad C_1, C_2 \subset X.$$

**定义 1.5** 称集族  $\tilde{A} = \{A(\gamma): \gamma \in \Gamma\} \in \varphi$  是拉回  $\mathfrak{D}$ -吸引子, 若其满足下列条件:

1) 对任意  $\gamma \in \Gamma, A(\gamma)$  是紧的;

2)  $\tilde{A}$  是拉回  $\mathfrak{D}$ -吸引的, 即

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\phi(t, \theta_{-t}\gamma, D(\theta_{-t}\gamma)), A(\gamma)) = 0, \quad \tilde{D} \in \mathfrak{D}, \gamma \in \Gamma;$$

3)  $\tilde{A}$  是不变的, 即对任意  $(t, \gamma) \in \mathbf{R}_+ \times \Gamma, \phi(t, \gamma, A(\gamma)) = A(\theta_t\gamma)$ .

## 2 有界区域上 2D 非自治 $g$ -Navier-Stokes 方程的拉回吸引子的存在性

本节利用非紧性测度来证明有界区域上 2D 非自治  $g$ -Navier-Stokes 方程的拉回吸引子的存在性, 首先回顾非紧性测度的有关概念和结果(见文献[23]).

设  $B(X)$  是  $X$  的所有有界子集做成的集族,  $B \in B(X)$ ,  $B$  的 Kuratowski 非紧性测度  $\alpha(B)$  定义为  $\alpha(B) = \inf\{\delta \mid B \text{ 可被 } B(X) \text{ 中有限个半径不大于 } \delta \text{ 的集合覆盖}\}$ . 且下面性质成立<sup>[25,27]</sup>.

**引理 2.1** 设  $B, B_1, B_2 \in B(X)$ , 则

1)  $\alpha(B) = 0 \Leftrightarrow \alpha(N(B, \varepsilon)) \leq 2\varepsilon \Leftrightarrow \bar{B}$  是紧的;

2)  $\alpha(B_1 + B_2) \leq \alpha(B_1) + \alpha(B_2)$ ;

3) 当  $B_1 \subset B_2$  时, 有  $\alpha(B_1) \leq \alpha(B_2)$ ;

4)  $\alpha(B_1 \cup B_2) \leq \max\{\alpha(B_1), \alpha(B_2)\}$ ;

5)  $\alpha(\bar{B}) = \alpha(B)$ ;

6) 若  $B$  是半径为  $\varepsilon$  的球, 则  $\alpha(B) \leq 2\varepsilon$ .

**引理 2.2** 设  $\cdots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \cdots$  是  $X$  的非空闭子集构成的序列, 使得当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\alpha(F_n) \rightarrow 0$ . 则  $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$  是非空的和紧的.

可知下面结论成立(见文献[17]).

**定义 2.3** 设  $\phi$  是  $X$  上的  $\theta$ -共圈,  $B_0 \subset X$  称为  $\phi$  的拉回吸收集, 若对任意的  $B \in B(X)$ , 总存在  $T_0 = T_0(B) \in \mathbf{R}^+$  使得  $\phi(t, \gamma, B) \subset B_0, \forall t \geq T_0, \gamma \in \Gamma$ .

**定义 2.4** 设  $\phi$  是  $X$  上的  $\theta$ -共圈,  $\phi$  称为是拉回  $\omega$ -极限紧的, 如果对任意  $B \in B(X)$ ,  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(\cup \phi(t, \theta_{-t}(\gamma), B)) = 0$ .

**定义 2.5** 设  $\phi$  是  $X$  上的  $\theta$ -共圈,  $B$  的拉回  $\omega$ -极限集  $A_\gamma(B)$  为

$$A_\gamma(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} \phi(t, \theta_{-t}(\gamma), B)}.$$

**定理 2.6** 设  $\phi$  是  $X$  上的  $\theta$ -共圈, 若  $\phi$  连续且有一拉回吸收集  $B_0$ , 则  $\phi$  有拉回吸引子  $\mathcal{A} = \{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  满足

$$A_\gamma = A_\gamma(B_0), \quad \forall \gamma \in \Gamma,$$

当且仅当其是拉回  $\omega$ -极限紧的.

**定义 2.7** 设  $\phi$  是  $X$  上的  $\theta$ -共圈, 称  $\phi$  满足拉回条件(PC), 若对任意  $\gamma \in \Gamma, B \in B(X)$  和  $\varepsilon > 0$ , 存在  $t_0 = t_0(\gamma, B, \varepsilon) \geq 0$  和一个  $X$  的有限维子空间  $X_1$  使得

- 1)  $P(\cup_{t \geq t_0} \phi(t, \theta_{-t}(\gamma), B))$  有界;
- 2)  $\|(I - P)(\cup_{t \geq t_0} \phi(t, \theta_{-t}(\gamma), x))\| \leq \varepsilon, \forall x \in B$ , 这里  $P: X \rightarrow X_1$  是有界投影.

**定理 2.8** 设  $X$  是一个 Banach 空间,  $\phi$  是  $X$  上的  $\theta$ -共圈. 若  $\phi$  满足拉回条件(PC), 则  $\phi$  是拉回  $\omega$ -极限紧的. 进一步, 设  $X$  是一个一致凸的 Banach 空间, 则  $\phi$  是拉回  $\omega$ -极限紧的当且仅当拉回条件(PC)成立.

设  $f(s) \in X, s \in \mathbf{R}, X$  在 Bochner 意义下是局部 2 次方可积, 将  $f(s)$  所在的度量空间记为  $L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}, X)$ . 下面我们用非紧性测度来证明 2D  $g$ -Navier - Stokes 方程拉回吸引子的存在性.

**引理 2.9** 设  $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}, H_g)$  满足

$$\|f\|_b^2 = \sup_{t \in \mathbf{R}} \int_t^{t+1} |f(s)|^2 ds < \infty,$$

$u_0(x) \in H_g$ , 设  $u(x, t) \in L^\infty(\mathbf{R}^+, H_g) \cap L^2_{\text{loc}}(0, T, V_g) \cap \mathcal{C}(\mathbf{R}^+, H_g) (\forall t > 0)$  是方程(1)的弱解, 则对所有  $t \geq \tau$ , 设  $\sigma = \nu \lambda_1$ . 则下面的估计成立

$$\|u(t)\|^2 \leq \|u_0\|^2 e^{-\sigma \gamma_0(t-\tau)} + R_1^2, \quad (17)$$

这里  $R_1^2 = \sigma^{-1}(1 - e^{-\sigma \gamma_0})^{-1} \|f\|_b^2$ , 对充分小的  $\|\nabla g\|_\infty$  有  $\gamma_0 = 1 - 2\nu \|\nabla g\|_\infty / (m_0 \lambda_1^{1/2})$ .

**证明** 设  $u(x, t)$  是(1)式的解, 由于  $u \in L^2(0, T; V_g)$  且  $u' \in L^2(0, T; V'_g)$ , 故

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 &= \langle u', u \rangle = \\ &\langle f - \nu A_g u - Bu - \nu Ru, u \rangle = \\ &\langle f, u \rangle - \nu \|u\|^2 - b_g(u, u, u) - \nu \left( \left( \frac{1}{g} \nabla g \cdot \nabla \right) u, u \right). \end{aligned}$$

考虑到  $b_g(u, u, u) = 0$ , 则有

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 + 2\nu \|u\|^2 = 2\langle f, u \rangle - 2\nu \left( \left( \frac{\nabla g}{g} \cdot \nabla \right) u, u \right).$$

应用 Poincaré 不等式, 有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + 2\nu \|u\|^2 &\leq \frac{\|f\|^2}{\nu \lambda_1} + \nu \lambda_1 \|u\|^2 + 2\nu \frac{\|\nabla g\|_\infty}{m_0 \lambda_1^{1/2}} \|u\|^2 \leq \\ &\frac{\|f\|^2}{\nu \lambda_1} + \nu \|u\|^2 + 2\nu \frac{\|\nabla g\|_\infty}{m_0 \lambda_1^{1/2}} \|u\|^2, \end{aligned}$$

则

$$\frac{d}{dt} |u|^2 + \nu \|u\|^2 \leq \frac{|f|^2}{\nu \lambda_1} + 2\nu \frac{|\nabla g|_\infty}{m_0 \lambda_1^{1/2}} \|u\|^2,$$

所以

$$\frac{d}{dt} |u|^2 + \nu \gamma_0 \|u\|^2 \leq \frac{|f|^2}{\nu \lambda_1},$$

这里对充分小的  $|\nabla g|_\infty$ , 有  $\gamma_0 = 1 - 2\nu |\nabla g|_\infty / (m_0 \lambda_1^{1/2})$ . 从而

$$\frac{d}{dt} |u|^2 + \nu \lambda_1 \gamma_0 |u|^2 \leq \frac{|f|^2}{\nu \lambda_1}.$$

设  $\sigma = \nu \lambda_1$ , 利用 Gronwall 引理, 可得

$$\begin{aligned} |u(t)|^2 &\leq |u_0|^2 e^{-\sigma \gamma_0 (t-\tau)} + \frac{1}{\sigma} \int_\tau^t e^{-\sigma \gamma_0 (t-s)} |f(s)|^2 ds \leq \\ &|u_0|^2 e^{-\sigma \gamma_0 (t-\tau)} + \frac{1}{\sigma} \left[ \int_{t-1}^t e^{-\sigma \gamma_0 (t-s)} |f(s)|^2 ds + \right. \\ &\left. \int_{t-2}^{t-1} e^{-\sigma \gamma_0 (t-s)} |f(s)|^2 ds + \dots \right] \leq \\ &|u_0|^2 e^{-\sigma \gamma_0 (t-\tau)} + \frac{1}{\sigma} (1 + e^{-\sigma \gamma_0} + e^{-2\sigma \gamma_0} + \dots) \sup_{t \in \mathbf{R}} \int_t^{t+1} |f(s)|^2 ds \leq \\ &|u_0|^2 e^{-\sigma \gamma_0 (t-\tau)} + R_1^2, \end{aligned}$$

其中  $R_1^2 = \sigma^{-1} (1 - e^{-\sigma \gamma_0})^{-1} |f|_b^2$ . □

对任意  $f \in \Gamma$ ,  $|f|_b^2 = |f_0|_b^2$ , 由(17)式, 可得  $B_0 = \{u \in H_g \mid |u| \leq 2R_1^2 \triangleq \rho_0^2\}$  是  $H_g$  中的拉回吸收集.

**引理 2.10** 设  $f \in L_{\text{loc}}^2(\mathbf{R}, H_g)$  满足:

$$|f|_b^2 = \sup_{t \in \mathbf{R}} \int_t^{t+1} |f(s)|^2 ds < \infty,$$

$u_0(x) \in H_g$ , 设

$$\begin{aligned} u(x, t) &\in L^\infty(\mathbf{R}^+, V_g) \cap L_{\text{loc}}^2(0, T, D(A_g)) \cap \\ &\mathcal{C}(\mathbf{R}^+, V_g), u'(x, t) \in L_{\text{loc}}^2(\mathbf{R}_\tau; H_g) \quad (\forall t > 0) \end{aligned}$$

是(1)式的强解, 则对所有的  $t \geq \tau$ , 下面的估计成立:

$$\|u(t)\|^2 \leq \|u(\tau)\|^2 e^{-\beta(t-\tau)} + (1 - e^{-\beta})^{-1} |f|_b^2, \quad (18)$$

这里

$$\beta = \lambda \left( 2\nu - 1 - \frac{2C\rho_0}{\lambda_0^{1/2}} - \frac{2\nu |\nabla g|_\infty}{m_0 \lambda_0^{1/2}} \right), \quad |\nabla g|_\infty \text{ 充分小.}$$

**证明** 给(9)式两端乘以  $-\Delta u(t)$  可得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \nu |\Delta u|^2 = (f, -\Delta u) - (Bu, -\Delta u) - \nu (Ru, -\Delta u),$$

用 Young 不等式可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + 2\nu |\Delta u|^2 &= \\ 2(f, -\Delta u) - 2(Bu, -\Delta u) - 2\nu (Ru, -\Delta u) &\leq \\ |f|^2 + |\Delta u|^2 + 2|(Bu, -\Delta u)| + 2\nu |(Ru, -\Delta u)| &\leq \\ |f|^2 + |\Delta u|^2 + 2|Bu| |\Delta u| + 2\nu |Ru| |\Delta u| &\leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |f|^2 + |\Delta u|^2 + \frac{2C}{\lambda_0^{1/2}} |u|^{1/2} |\Delta u|^2 + \frac{2\nu |\nabla g|_\infty}{m_0} \|u\| |\Delta u| \leq \\ & |f|^2 + |\Delta u|^2 + \frac{2C\rho_0}{\lambda_0^{1/2}} |\Delta u|^2 + \frac{2\nu |\nabla g|_\infty}{m_0 \lambda_0^{1/2}} |\Delta u|^2, \end{aligned}$$

故

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 + \left( 2\nu - 1 - \frac{2C\rho_0}{\lambda_0^{1/2}} - \frac{2\nu |\nabla g|_\infty}{m_0 \lambda_0^{1/2}} \right) |\Delta u|^2 \leq |f|^2.$$

应用 Poincaré 不等式得

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 + \lambda \left( 2\nu - 1 - \frac{2C\rho_0}{\lambda_0^{1/2}} - \frac{2\nu |\nabla g|_\infty}{m_0 \lambda_0^{1/2}} \right) \|u\|^2 \leq |f|^2.$$

设

$$\beta = \lambda \left( 2\nu - 1 - \frac{2C\rho_0}{\lambda_0^{1/2}} - \frac{2\nu |\nabla g|_\infty}{m_0 \lambda_0^{1/2}} \right),$$

则有

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 + \beta \|u\|^2 \leq |f|^2.$$

应用 Gronwall 引理得

$$\begin{aligned} \|u\|^2 & \leq \|u(\tau)\|^2 e^{-\beta(t-\tau)} + \int_\tau^t e^{-\beta(t-s)} |f|^2 ds, \\ \|u\|^2 & \leq \|u(\tau)\|^2 e^{-\beta(t-\tau)} + \int_{t-1}^t e^{-\beta(t-s)} |f|^2 ds + \int_{t-2}^{t-1} e^{-\beta(t-s)} |f|^2 ds + \cdots, \\ \|u\|^2 & \leq \|u(\tau)\|^2 e^{-\beta(t-\tau)} + (1 + e^{-\beta} + e^{-2\beta} + \cdots) \sup_{t \in \mathbf{R}} \int_t^{t+1} |f|^2 ds \leq \\ & \|u(\tau)\|^2 e^{-\beta(t-\tau)} + (1 - e^{-\beta})^{-1} |f|_b^2. \end{aligned}$$

□

设

$$B_1 = \bigcup_{f \in \Gamma} \bigcup_{t > t_0+1} \phi(t_0 + 1, f, B_0),$$

由(18)式知,  $B_1$  有界,  $\|u\|^2 \leq \rho_1^2, \forall u \in B_1$  且  $B_1$  是  $V_g$  中的拉回吸收集.

**引理 2.11** 若  $H_g$  是 Hilbert 空间且  $\{\omega_i\}_{i \in N}$  是  $H_g$  的正交基, 设  $f(x, t) \in L_{\text{loc}}^2(\mathbf{R}; H_g)$  且存在  $\sigma > 0$ , 使得对任意  $t \in \mathbf{R}$ ,

$$\int_{-\infty}^t e^{\sigma s} \|f(x, s)\|_{H_g}^2 ds < \infty,$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t e^{\sigma s} \|(I - P_n)f(x, s)\|_{H_g}^2 ds = 0, \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad (19)$$

这里  $P_n: H_g \rightarrow \text{span}\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  是正交投影.

**证明** 设  $\xi_i(t) = (f(x, t), \omega_i)_{H_g}$ , 则

$$f(x, t) = \frac{1}{g} \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(t) \omega_i.$$

对任意  $t \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$ , 由于

$$\int_{-\infty}^t e^{\sigma s} \|f(x, s)\|_{H_g}^2 ds = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{-\infty}^t e^{\sigma s} \|\xi_i(s)\|_{H_g}^2 ds < \infty,$$

对任意  $n \geq N_0$  和充分大的  $N_0$ , 则有

$$\int_{-\infty}^t e^{\sigma s} \|(I - P_m)f(x, s)\|_{H_g}^2 ds = \sum_{i=N_0}^{\infty} \int_{-\infty}^t e^{\sigma s} \|\xi_i(s)\|_{H_g}^2 ds < \varepsilon. \quad \square$$

**定理 2.12** 若  $f(x, t) \in L_{loc}^2(\mathbf{R}; H_g)$ , 则方程(1) 所对应的共圈  $\{\phi(t, \gamma, x)\}$  有一个紧的拉回吸引子  $\mathcal{A} = \{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} = \{\Lambda_\gamma(B_1)\}_{\gamma \in \Gamma}$ , 这里  $B_1$  是  $V_g$  中的拉回吸收集 (w. r. t.  $\gamma \in \Gamma$ ).

**证明** 由定理 2.8 可知, 只须验证共圈族  $\{\phi(t, \gamma, x)\}$  在  $V_g$  中满足拉回条件(PC).

由于  $(-\Delta)^{-1}$  是  $H_g$  中的连续紧算子, 由经典的谱算子定理可知, 则存在序列  $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ ,

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_i \leq \dots \leq \lambda_j \rightarrow \infty, \quad j \rightarrow \infty \quad (20)$$

和  $D(-\Delta)$  中的一族元素  $\{\omega_j\}_{j=1}^{\infty}$  (其在  $H_g$  中正交), 使得  $-\Delta\omega_j = \lambda_j\omega_j, \forall j \in \mathbf{N}$ . 设  $V_m = \text{span}\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\} \subset V_g$  且  $P_m: V_g \rightarrow V_m$  是一个正交投影.

对任意  $u \in D(-\Delta)$ , 记  $u = P_m u + (I - P_m)u = u_1 + u_2$ . 在  $H_g$  中取  $-\Delta u_2$  与方程(9) 作内积, 则有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_2\|^2 + \nu |\Delta u_2|^2 + (B(u), -\Delta u_2) + \nu (Ru, -\Delta u_2) = (f, -\Delta u_2).$$

应用 Young 不等式, 结合(12) 和(15) 式, 有

$$\begin{aligned} |(B(u), -\Delta u_2)| &\leq \\ |(B(u_1, u_1 + u_2), -\Delta u_2)| + |(B(u_2, u_1 + u_2), -\Delta u_2)| &\leq \\ cL^{1/2} \|u_1\| |\Delta u_2| (\|u_1\| + \|u_2\|) + \\ c \|u_2\|^{1/2} |\Delta u_2|^{3/2} (\|u_1\| + \|u_2\|) &\leq \\ \frac{\nu}{4} |\Delta u_2|^2 + \frac{c}{\nu} \rho_1^4 L + \frac{c}{\nu^3} \rho_0^2 \rho_1^4, \quad t \geq t_0 + 1. \end{aligned}$$

这里  $|\Delta u_1|^2 \leq \lambda_m \|u_1\|^2, L = 1 + \log \frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_1}$ .

$$\begin{aligned} |(Ru, -\Delta u_2)| &\leq |Ru| \cdot |\Delta u_2| \leq \\ \frac{|\nabla g|_{\infty}}{m_0} \|u\| \cdot |\Delta u_2| &\leq \frac{|\nabla g|_{\infty}}{m_0} \left( \frac{|\Delta u_2|^2}{2} + 2 \|u\|^2 \right) \leq \\ \frac{|\nabla g|_{\infty}}{m_0} \left( \frac{|\Delta u_2|^2}{2} + 2\rho_1^2 \right) \end{aligned}$$

和

$$(f, -\Delta u_2) \leq \frac{|f|^2}{\nu} + \frac{\nu |\Delta u_2|^2}{4},$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u_2\|^2 + 2\nu |\Delta u_2|^2 &\leq \\ 2(f, -\Delta u_2) - 2(B(u), -\Delta u_2) - 2\nu (Ru, -\Delta u_2) &\leq \\ \frac{2|f|^2}{\nu} + \frac{\nu |\Delta u_2|^2}{2} + \frac{\nu}{2} |\Delta u_2|^2 + \frac{2c}{\nu} \rho_1^4 L + \\ \frac{2c}{\nu^3} \rho_0^2 \rho_1^4 + \frac{2|\nabla g|_{\infty}}{m_0} \left( \frac{\nu |\Delta u_2|^2}{2} + \frac{2\rho_1^2}{\nu} \right) &\leq \\ \frac{2|f|^2}{\nu} + \nu |\Delta u_2|^2 + \frac{\nu |\nabla g|_{\infty}}{m_0} |\Delta u_2|^2 + \frac{2c}{\nu} \rho_1^4 L + \end{aligned}$$

$$\frac{2c}{\nu^3} \rho_0^2 \rho_1^4 + \frac{4 \|\nabla g\|_\infty}{\nu m_0} \rho_1^2,$$

可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u_2\|^2 + \nu \left(1 - \frac{\|\nabla g\|_\infty}{m_0}\right) \|\Delta u_2\|^2 &\leq \\ \frac{2\|f\|^2}{\nu} + \frac{2c}{\nu} \rho_1^4 L + \frac{2c}{\nu^3} \rho_0^2 \rho_1^4 + \frac{4\|\nabla g\|_\infty}{\nu m_0} \rho_1^2, \\ \frac{d}{dt} \|u_2\|^2 + \nu \left(1 - \frac{\|\nabla g\|_\infty}{m_0}\right) \|\Delta u_2\|^2 &\leq \\ 2c \left( \frac{1}{c\nu} \|(I - P_m)f\|^2 + \frac{1}{\nu} \rho_1^4 L + \frac{1}{\nu^3} \rho_0^2 \rho_1^4 + \frac{2\|\nabla g\|_\infty}{c\nu m_0} \rho_1^2 \right). \end{aligned}$$

设  $\alpha = 1 - (\|\nabla g\|_\infty/m_0)$ , 则有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u_2\|^2 + \nu \lambda_{m+1} \alpha \|u_2\|^2 &\leq \\ 2c \left( \frac{1}{c\nu} \|(I - P_m)f\|^2 + \frac{1}{\nu} \rho_1^4 L + \frac{1}{\nu^3} \rho_0^2 \rho_1^4 + \frac{2\|\nabla g\|_\infty}{c\nu m_0} \rho_1^2 \right). \end{aligned}$$

应用 Gronwall 引理, 可得

$$\begin{aligned} \|u_2\|^2 &\leq \|u_2(t_0 + 1)\|^2 e^{-\nu \lambda_{m+1} \alpha (t - (t_0 + 1))} + \\ &\int_{t_0 + 1}^t e^{-\nu \lambda_{m+1} \alpha (t - s)} \left[ 2c \left( \frac{1}{c\nu} \|(I - P_m)f\|^2 + \frac{1}{\nu} \rho_1^4 L + \frac{1}{\nu^3} \rho_0^2 \rho_1^4 + \frac{2\|\nabla g\|_\infty}{c\nu m_0} \rho_1^2 \right) \right] ds = \\ &\|u_2(t_0 + 1)\|^2 e^{-\nu \lambda_{m+1} \alpha (t - (t_0 + 1))} + \\ &2c \left( \frac{1}{\nu} \rho_1^4 L + \frac{1}{\nu^3} \rho_0^2 \rho_1^4 + \frac{2\|\nabla g\|_\infty}{c\nu m_0} \rho_1^2 \right) \int_{t_0 + 1}^t e^{-\nu \lambda_{m+1} \alpha (t - s)} ds + \\ &\frac{2}{\nu} \int_{t_0 + 1}^t e^{-\nu \lambda_{m+1} \alpha (t - s)} \|(I - P_m)f\|^2 ds = \\ &\|u_2(t_0 + 1)\|^2 e^{-\nu \lambda_{m+1} \alpha (t - (t_0 + 1))} + \frac{2c}{\nu^2 \lambda_{m+1} \alpha} \left( \rho_1^4 L + \frac{\rho_0^2 \rho_1^4}{\nu^2} + \frac{2\|\nabla g\|_\infty}{cm_0} \rho_1^2 \right) + \\ &\frac{2}{\nu} \int_{t_0 + 1}^t e^{-\nu \lambda_{m+1} \alpha (t - s)} \|(I - P_m)f\|^2 ds. \end{aligned}$$

由(17)式和引理 2.10, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 取  $m + 1$  充分大, 使得

$$\begin{aligned} \frac{2}{\nu} \int_{t_0 + 1}^t e^{-\nu \lambda_{m+1} \alpha (t - s)} \|(I - P_m)f\|^2 ds &\leq \frac{\varepsilon}{3}, \\ \frac{2c}{\nu^2 \lambda_{m+1} \alpha} \left( \rho_1^4 L + \frac{\rho_0^2 \rho_1^4}{\nu^2} + \frac{2\|\nabla g\|_\infty}{cm_0} \rho_1^2 \right) &\leq \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

取  $t_2 = t_0 + 1 + 1/(\nu \lambda_{m+1} \alpha \ln(3\rho_1^2/\varepsilon))$ , 则  $t \geq t_2$ , 有

$$\|u_2(t_0 + 1)\|^2 e^{-\nu \lambda_{m+1} \alpha (t - (t_0 + 1))} \leq \rho_1^2 e^{-\nu \lambda_{m+1} \alpha (t - (t_0 + 1))} \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

因而有  $\|u_2(t)\|^2 \leq \varepsilon, \forall t \geq t_2$ . 这表明  $V_g$  中的共圈族  $\{\phi(t, \gamma, x)\}$  在  $V_g$  中满足拉回条件 (PC), 由定理 2.8 可知, 结论成立.  $\square$

**致谢** 作者衷心感谢西安交通大学专项基金(2009xjtujc30)的资助以及审稿人和编辑提出的宝贵意见和建议.

## 参考文献:

- [1] Abergel F. Attractor for a Navier-Stokes flow in an unbounded domain[J]. *Math Model Anal*, 1989, **23**(3):359-370.
- [2] Babin A V. The attractor of a Navier-Stokes system in an unbounded channel-like domain[J]. *J Dynam Differential Equations*, 1992, **4**(4):555-584.
- [3] Rosa R. The global attractor for the 2D-Navier-Stokes flow in some unbounded domain[J]. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 1998, **32**(1):71-85.
- [4] Cheban D N, Duan J. Almost periodic solutions and global attractors of nonautonomous Navier-Stokes equation[J]. *J Dyn Differ Equation*, 2004, **16**(1):1-34.
- [5] Raugel G, Sell G R. Navier-Stokes equations on thin 3D domains(I)—global attractors and global regularity of solutions[J]. *J Amer Math Soc*, 1993, **6**(3):503-568.
- [6] Temam R. *Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*[M]. Providence, RI: AMS Chelsea Publishing, 2001.
- [7] Temam R. *Infinite-Dimensional Dynamical System in Mechanics and Physics*[M]. New York: Springer-Verlag, 1988.
- [8] Babin A V, Vishik M I. Attractors of partial differential equations in an unbounded domain [J]. *Proc Roy Soc Edinburgh Sect A*, 1990, **116**:221-243.
- [9] Constantin P, Foias C, Temam R. Attractor representing turbulent flows[J]. *Mem Amer Math Soc*, 1985, **53**(314):1-67.
- [10] Cheban D N. *Global Attractors of Non-Autonomous Dissipative Dynamical Systems*[M]. Singapore: World Scientific, 2004.
- [11] Caraballo T, Kloden P E, Marin-Rubio P. Global and pullback attractor of set-valued skew product flows[J]. *Ann Mat*, 2006, **185**(2):S23-S45.
- [12] Caraballo T, Lukaszewicz G, Real J. Pullback attractors for asymptotically compact nonautonomous dynamical systems[J]. *Nonlinear Anal*, 2006, **64**(3):484-498.
- [13] Caraballo T, Kloeden P E, Real J. Pullback and forward attractors for a damped wave equation with delays[J]. *Stochastics and Dynamics*, 2004, **4**(3):405-423.
- [14] Caraballo T, Real J, Chueshov I D. Pullback attractors for stochastic heat equations in materials with memory[J]. *Discrete Contin Dyn Syst, Ser B*, 2008, **9**(3):525-539.
- [15] Kloeden P E. Pullback attractors in nonautonomous difference equations[J]. *J Differ Equations Appl*, 2000, **6**(1):33-52.
- [16] Kloeden P E. Pullback attractors of nonautonomous semidynamical systems[J]. *Stoch Dyn*, 2003, **3**(1):101-112.
- [17] Wang Y J, Zhong C K, Zhou S F. Pullback attractors of nonautonomous dynamical systems [J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2006, **16**(3): 587-614.
- [18] Song H T, Wu H Q. Pullback attractor of nonautonomous reaction-diffusion equations[J]. *J Math Anal Appl*, 2007, **325**(2):1200-1215.
- [19] Li Y J, Zhong C K. Pullback attractors for the norm-to-weak continuous process and application to the nonautonomous reaction-diffusion equations[J]. *Appl Math Comput*, 2007, **190**(2):1020-1029.
- [20] Roh J. *g-Navier-Stokes equations*[D]. University of Minnesota, 2001.
- [21] Kwak M, Kwean H, Roh J. The dimension of attractor of the 2D *g*-Navier-Stokes equations [J]. *J Math Anal Appl*, 2006, **315**(2):436-461.

- [22] Jiang J P, Hou Y R. The global attractor of  $g$ -Navier-Stokes equations with linear dampness on  $R^2$ [J]. *Appl Math Comput*, 2009, **215**(3):1068-1076.
- [23] Zhong C K, Yang M H, Sun C Y. The existence of global attractors for the norm-to-weak continuous semigroup and application to the nonlinear reaction-diffusion equations[J]. *J Differential Equations*, 2006, **223**(2):367-399.
- [24] Foias C, Teman R. Finite parameter approximative structures of actual flows[C] //Bishop A R, Campbell D K, Nicolaenco B. *Nonlinear Problems: Present and Future*. Amsterdam: North Holland, 1982.
- [25] Sell G R, You Y. *Dynamics of Evolutionary Equations*[M]. New York: Springer, 2002.
- [26] Bae H, Roh J. Existence of solutions of the  $g$ -Navier-Stokes equations[J]. *Taiwanese J Math*, 2004, **8**(1):85-102.
- [27] Hale J K. *Asymptotic Behaviour of Dissipative Dynamical Systems*[M]. Providence, RI: Amer Math Soc, 1988.
- [28] Hou Y R, Li K T. The uniform attractor for the 2D non-autonomous Navier-Stokes flow in some unbounded domain[J]. *Nonlinear Analysis*, 2004, **58**(5/6): 609-630.
- [29] Roh J. Dynamics of the  $g$ -Navier-Stokes equations[J]. *J Differential Equations*, 2005, **211**(2): 452-484.

## Pullback Attractor of 2D Non-Autonomous $g$ -Navier-Stokes Equations on Some Bounded Domains

JIANG Jin-ping<sup>1,2</sup>, HOU Yan-ren<sup>1</sup>

(1. School of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, P. R. China;

2. College of Mathematics and Computer, Yan'an University,  
Yan'an, Shaanxi 71600, P. R. China)

**Abstract:** The existence of pullback attractors for the 2D non-autonomous  $g$ -Navier-Stokes equations on some bounded domains were investigated under the general assumptions of pullback asymptotic compactness, and a new method to prove the existence of pullback attractors for the 2D  $g$ -Navier-Stokes equations was given.

**Key words:** pullback attractor;  $g$ -Navier-Stokes equation; pullback asymptotically compact; pullback condition(PC); bounded domains