文章编号:1000-0887(2010)07-0791-10
ⓒ 应用数学和力学编委会,ISSN 1000-0887

二维拟定常可压流 Euler 方程组的简单波*

赖 耕, 盛万成

(上海大学 理学院 数学系,上海 200444)

(郭兴明推荐)

摘要: 简单波是这样的流动,它在像空间中的像是一条曲线."简单波理论是除基本流动结构以外构造流动问题的解的基础",见 Courant 和 Friedrichs 的经典著作《超声速流与冲击波》.该文主要研究二维拟定常可压流 Euler 方程组的简单波的几何结构. 根据这些几何诠释,还构造了绕一拟流线弯曲部的疏散和压缩的简单波流动结构.这种流动结构将作为一个局部流动结构出现在 4 个接触间断的 Riemann 问题的整体解中.

关 键 词: 自相似 Euler 方程组; 拟流线; 广义特征分析; 简单波; 声速圆; 声速边界
中图分类号: O175.27;O175.29;O351.3 **文献标志码:** A
DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.07.004

引 言

二维等熵 Euler 方程具有如下形式:

$$\begin{cases}\rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y = 0,\\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x + (\rho uv)_y = 0,\\ (\rho v)_t + (\rho uv)_x + (\rho v^2 + p)_y = 0,\end{cases} \tag{1}$$

其中,变量 (u,v), ρ 和 p 分别代表速度、密度和压强.对于多方气体,气体的状态方程为

$$p(\rho) = A\rho^\gamma, \tag{2}$$

其中绝热常数 γ 是介于 1 到 5/3 之间的数,A 是一个正的常数.

我们关心所谓的自相似流(或拟定常流),这种流动仅依赖于自相似变量 $\xi = x/t, \eta = y/t$. 通过自相似变换,方程组(1)变为

$$\begin{cases}(\rho U)_\xi + (\rho V)_\eta = -2\rho,\\ (\rho U^2 + p)_\xi + (\rho UV)_\eta = -3\rho U,\\ (\rho UV)_\xi + (\rho V^2 + p)_\eta = -3\rho V,\end{cases} \tag{3}$$

其中 $(U,V) = (u-\xi, v-\eta)$ 称为拟流速,见文献[1-3].

对于光滑流动,方程组(3)还可以写成

* **收稿日期:** 2010-03-20; **修订日期:** 2010-05-27
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10971130);上海市教委重点学科基金资助项目(J50101)
作者简介: 赖耕(1981—),男,江西宜春人,博士(E-mail:laigeng@gmail.com);
盛万成(1963—),男,新疆人,教授(联系人. E-mail:mathwcsheng@shu.edu.cn).

$$\begin{cases}(\rho U)_\xi + (\rho V)_\eta + 2\rho = 0,\\ UU_\xi + VU_\eta + \left(\dfrac{c^2}{\gamma - 1}\right)_\xi = -U,\\ UV_\xi + VV_\eta + \left(\dfrac{c^2}{\gamma - 1}\right)_\eta = -V,\end{cases} \tag{4}$$

其中 $c = \sqrt{\gamma p/\rho}$ 代表声速. 如果流动还是无旋的,即:$u_y = v_x \Rightarrow u_\eta = v_\xi$,我们可以引入拟速度势函数 $\phi(\xi,\eta)$, 使得

$$\phi_\xi = U,\ \phi_\eta = V. \tag{5}$$

于是从方程组(4)的最后两个方程我们可以导出拟 Bernoulli 定律

$$\frac{U^2 + V^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} + \phi = \text{Const}. \tag{6}$$

因此,等熵无旋拟定常流动可以由拟 Bernoulli 定律式(6)和

$$\begin{cases}(c^2 - U^2)u_\xi - UV(u_\eta + v_\xi) + (c^2 - V^2)v_\eta = 0,\\ u_\eta - v_\xi = 0\end{cases} \tag{7}$$

来描述.

对于拟定常流,拟流线定义流场中的光滑曲线,该曲线上每一点的切线方向就为该点的拟流速的方向 (U,V). 由计算可知

$$\dot{\xi} = \left(\frac{\dot{x}}{t}\right) = \frac{\dot{x}}{t} - \frac{x}{t^2} = \frac{1}{t}(u - \xi) = \frac{U}{t}, \tag{8}$$

$$\dot{\eta} = \left(\frac{\dot{y}}{t}\right) = \frac{\dot{y}}{t} - \frac{y}{t^2} = \frac{1}{t}(v - \eta) = \frac{V}{t}, \tag{9}$$

其中$(\cdot)$为随体导数. 因此,由式(8)和式(9)可知在 (ξ,η) 平面上流体质团刚好沿着拟流线运动. 于是,如果在一个流动区域内沿着每一条拟流线的方向流体的密度是增大(或减小)的,那么我们称该区域的流动为压缩的(或疏散的).

简单波定义为一区域中这样的流动,它在像空间中的像是一条曲线[4]. 从文献[5]可知:二维定常简单波流动区域是被一族直的波特征线所覆盖,沿着上述每一条直特征线 u, v 从而 c, p, ρ, τ 均为常数,并且与常状态相临的非常状态流动总是简单波. 最近,文献[6]证明了对于二维拟定常流动与常状态相临的非常状态流动也总是简单波. 近年来,简单波的相互作用已有很多的研究,见文献[7-13].

本文主要研究二维拟定常简单波. 我们的主要结果如下:几何上,如果把一二维拟定常简单波及其像表示在同一坐标平面下,那么它的像可以由一速度图曲线 Λ: $\xi = \bar{u}(s)$, $\eta = \bar{v}(s)$ 和一族以该曲线上的点为圆心 $\bar{c}(s)$ 为半径的声速圆 C_s 来表示. 通过对拟 Bernoulli 定律求导我们发现 $\bar{c}(s)$ 满足方程 $4(\bar{c}'(s))^2 = ((\gamma - 1)r'(s))^2$,其中 $r(s)$ 代表速度图曲线 Λ 的弧长. 该简单波流动区域是被一族直特征线 $C(s)$ 所覆盖,沿着上述每一条直特征线 u, v, c 均为常数:$u = \bar{u}(s)$, $v = \bar{v}(s)$, $c = \bar{c}(s)$. 上述每一条直特征线 $C(s)$ 均和相应状态的声速圆 C_s 相切,并且它的方向和速度图曲线 Λ 在相应点的切线方向垂直. 我们还证明了沿着直特征线的特征方向疏散简单波的直特征线能够延伸到声速边界而不相交,而压缩简单波的直特征线在到达声速边界之前会彼此相交. 据这些几何诠释,我们构造了绕一拟流线弯曲部的疏散和压缩的简单波结构. 这种流动结构将作为一个局部流动结构出现在 4 个接触间断的 Riemann 问题整体解中,见文献[14].

1 广义特征分析

方程组(7)可以写成如下矩阵形式：

$$\underbrace{\begin{pmatrix} c^2 - U^2 & -UV \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{B}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{\xi} + \underbrace{\begin{pmatrix} -UV & c^2 - V^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{D}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

因此，方程组(7)的特征根由 $|\lambda B - D| = 0$ 来确定，即：

$$[(V - \lambda U)^2 - c^2(1 + \lambda^2)] = 0. \tag{11}$$

因此

$$\lambda = \lambda_{\pm} = \frac{UV \pm \sqrt{c^2(U^2 + V^2 - c^2)}}{U^2 - c^2}. \tag{12}$$

于是，当且仅当流动为拟超声，即：$U^2 + V^2 > c^2$ 时方程组(7)为双曲型的. 从现在起我们仅考虑拟超声速流动. 这时方程组(7)的两类特征定义为

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = \lambda_{\pm}, \tag{13}$$

它们又称之为 $C_{\pm}$ 特征. 于是，通过简单计算方程组(7)能够写成如下的特征形式：

$$\partial_+ u + \lambda_- \partial_+ v = 0,\ \partial_- u + \lambda_+ \partial_- v = 0, \tag{14}$$

其中 $\partial_{\pm} = \partial_{\xi} + \lambda_{\pm}\partial_{\eta}$.

对于式(6)和式(7)的一个给定拟超声速流动，C_+ 和 C_- 特征线可以分别用 $\beta(\xi,\eta) = \mathrm{const}$ 和 $\alpha(\xi,\eta) = \mathrm{const}$ 来表示，它们形成一个曲线坐标网. 通过引入特征参数 α,β 我们有如下 4 个特征方程：

$$C_+:\ \eta_\alpha = \lambda_+\xi_\alpha,\ C_-:\ \eta_\beta = \lambda_-\xi_\beta, \tag{15}$$

$$\Gamma_+:\ u_\alpha + \lambda_- v_\alpha = 0,\ \Gamma_-:\ u_\beta + \lambda_+ v_\beta = 0, \tag{16}$$

其中 $\Gamma_{\pm}$ 为 $C_{\pm}$ 特征线的像在 (u,v) 平面上的投影. 由式(15)和(16)，我们有

$$u_\alpha\xi_\beta + v_\alpha\eta_\beta = 0,\ u_\beta\xi_\alpha + v_\beta\eta_\alpha = 0. \tag{17}$$

这意味着：如果 (u,v) 和 (ξ,η) 表示在同一坐标平面上，那么一类 C 特征线的方向垂直于另外一类 Γ 特征线. 或者更确切的讲，通过相应的点 (ξ,η) 和 (u,v)，C_+ 和 Γ_- 的方向垂直，C_- 和 Γ_+ 的方向垂直.

由式(11)可得

$$c^2 = \left(\frac{(U,V)\cdot(\lambda,-1)}{|(\lambda,-1)|}\right)^2. \tag{18}$$

这表明，拟流速在垂直于 C 特征线方向上的分量等于声速. 从式(18)我们能够立刻可得如果沿着一条 C 特征线 u，v，c 为常数，那么该特征线为一条直线. 由于在 (ξ,η) 坐标下没有时间轴，因此要反映波的传播性就有必要引入特征方向的概念. $C_{\pm}$ 特征的方向定义为它的与拟流速方向 (U,V) 成一个锐角 ω 的切线方向. 几何上，C_+ 特征方向反时针转动角度 ω 到拟流速方向，C_- 特征方向顺时针旋转动角度 ω 到拟流速的方向，如图 1 所示.

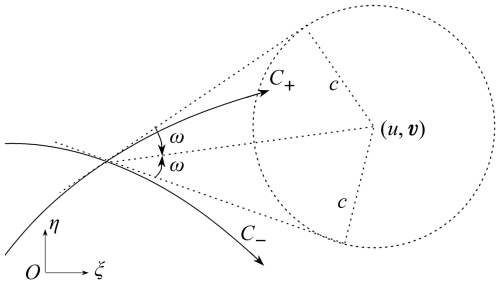

图 1 (ξ,η) 平面上的 C 特征线和特征方向

由计算可知

$$c^2 = q^2 \sin^2 \omega, \tag{19}$$

其中 $q^2 = U^2 + V^2$. 角 ω 称为拟 Mach 角,量

$$Ma = q/c = 1/\sin\omega, \tag{20}$$

称为拟 Mach 数. 对于 $q = c$ 或 $Ma = 1$ 的拟声速流动,我们有 $\omega = 90°$; 这表示拟流速的方向和两个特征线的方向垂直.

对拟 Bernoulli 定律式(6)求微分,我们有

$$(u - \xi)\partial_{\pm} u + (v - \eta)\partial_{\pm} v + \partial_{\pm}\left(\frac{c^2}{\gamma - 1}\right) = 0. \tag{21}$$

通过引入特征参数我们有

$$(u - \xi)u_\alpha + (v - \eta)v_\alpha + \left(\frac{c^2}{\gamma - 1}\right)_\alpha = 0, \tag{22}$$

$$(u - \xi)u_\beta + (v - \eta)v_\beta + \left(\frac{c^2}{\gamma - 1}\right)_\beta = 0. \tag{23}$$

我们定义两个符号函数 $s_+(\alpha,\beta)$ 和 $s_-(\alpha,\beta)$,

$$s_+(\alpha,\beta) = \begin{cases} 1, & (u - \xi, v - \eta)\cdot(u_\alpha, v_\alpha) > 0, \\ 0, & (u - \xi, v - \eta)\cdot(u_\alpha, v_\alpha) = 0, \\ -1, & (u - \xi, v - \eta)\cdot(u_\alpha, v_\alpha) < 0, \end{cases} \tag{24}$$

$$s_-(\alpha,\beta) = \begin{cases} 1, & (u - \xi, v - \eta)\cdot(u_\beta, v_\beta) > 0, \\ 0, & (u - \xi, v - \eta)\cdot(u_\beta, v_\beta) = 0, \\ -1, & (u - \xi, v - \eta)\cdot(u_\beta, v_\beta) < 0, \end{cases} \tag{25}$$

那么,由式(16)和式(18)可得

$$c_\alpha = -\frac{\gamma - 1}{2} s_+ \sqrt{u_\alpha^2 + v_\alpha^2},\ c_\beta = -\frac{\gamma - 1}{2} s_- \sqrt{u_\beta^2 + v_\beta^2}. \tag{26}$$

所以,我们有

$$(c'(s))^2 = \frac{(\gamma - 1)^2}{4}(r'(s))^2, \tag{27}$$

其中, $s = \alpha$ 或 β 为参数, $r(s)$ 代表 Γ 特征线的弧长.

2 简单波解

简单波是指流动区域内的一个这样的流动,它的像为一条曲线

$$u(\xi,\eta) = \bar{u}(s(\xi,\eta)),\ v(\xi,\eta) = \bar{v}(s(\xi,\eta)),\ c(\xi,\eta) = \bar{v}(s(\xi,\eta)),$$
$$s_1 < s < s_2. \tag{28}$$

将上式代入式(14)和(21),我们有

$$(\bar{u}'(s) + \lambda_{\mp}\bar{v}'(s))\partial_{\pm} s = 0, \tag{29}$$

这表明简单波流动区域是被一单参数族的 C 特征线所覆盖,沿着上述每一条 u, v, c 均为常数.

研究在给定的曲线 l: $\xi = \bar{\xi}(s)$, $\eta = \bar{\eta}(s)$ 上给什么样的初值可以确定一个简单波很有意义的. 一种可能性是:沿着该曲线我们令 $u = \bar{u}(s)$, $v = \bar{v}(s)$, $c = \bar{c}(s)$, 使得

$$(\bar{u}(s) - \bar{v}(s))^2 + (\bar{v}(s) - \bar{\eta}(s))^2 > \bar{c}^2, \tag{30}$$

$$\bar{u}'(s) + \bar{\lambda}_-(s)\bar{v}'(s) = 0, \tag{31}$$

$$(\bar{u}(s)-\bar{\xi}(s))\bar{u}'(s)+(\bar{v}(s)-\bar{\eta}(s))\bar{v}'(s)+\frac{2\bar{c}(s)}{\gamma-1}\bar{c}'(s)=0, \tag{32}$$

其中

$$\bar{\lambda}_-=\frac{(\bar{u}-\bar{\xi})(\bar{v}-\bar{\eta})-\sqrt{\bar{c}^2((\bar{u}-\bar{\xi})^2+(\bar{v}-\bar{\eta})^2-\bar{c}^2)}}{(\bar{u}-\bar{\xi})^2-\bar{c}^2}. \tag{33}$$

令坐标变换 T: $(s,\sigma)\to(\xi,\eta)$ 为 $\xi=\bar{\xi}(s)+\sigma,\eta=\bar{\eta}(s)+\sigma\bar{\lambda}_-(s)$. 如果 $\bar{\eta}'(s)\neq\bar{\xi}'(s)\bar{\lambda}_-(s)$,那么 Jacobin 行列式 $\partial(\xi,\eta)/\partial(s,\sigma)=\bar{\xi}'(s)\bar{\lambda}_-(s)-\bar{\eta}'(s)-\sigma\bar{\lambda}_-'(s)$ 在 l 上不为 0. 因此,变换 T 在 l 的一个邻域 $N(l)$ 上为光滑可逆的. 对 $(\xi,\eta)\in N(l)$, 我们令

$$(u,v,c)(\xi,\eta)=(\bar{u},\bar{v},\bar{c})(s(\xi,\eta)), \tag{34}$$

这意味着在从 l 上发出的以 $\mathrm{d}\eta/\mathrm{d}\xi=\bar{\lambda}_-(s)$ 为斜率的直线 $C_-(s)$ 上 u,v,c 为常数: $u(s)$, $v(s)$, $c(s)$. 如图2所示. 我们将要证明由式(34)定义的 $(u,v,c)(\xi,\eta)$ 是式(6)和(7)的一个简单波解.

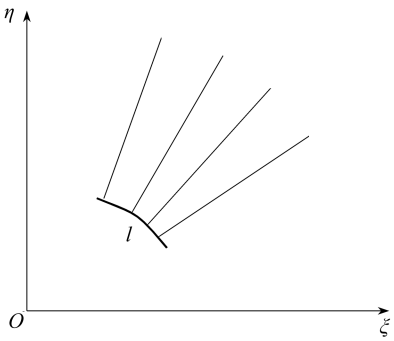

图2 与一曲线 l 相毗邻的简单波

定理 2.1 由式(34)定义的 $(u,v,c)(\xi,\eta)$ 是式(6)和(7)的一个简单波解.

证明 我们只要证明式(14)和(21)成立即可. 由式(33)可知直线 $C_-(s)$ 是和以 $(\bar{u}(s),\bar{v}(s))$ 为圆心 $\bar{c}(s)$ 为半径的圆 C_s 相切,并且沿着每一条直线 $C_-(s)$ 均成立 $\lambda_-\equiv\bar{\lambda}_-(s)$. 因此,我们有 $\partial_-u=\partial_-v=\partial_-c=0$. 所以

$$\partial_-u+\lambda_+\partial_-v=0,\ (u-\xi)\partial_-u+(v-\eta)\partial_-v+\partial_-\left(\frac{c^2}{\gamma-1}\right)=0,$$

由计算可得

$$\begin{aligned}\partial_+u+\lambda_-\partial_+v&=u_\xi+\lambda_+u_\eta+\lambda_-(v_\xi+\lambda_+v_\eta)=\\&(\bar{u}'(s)+\bar{\lambda}_-(s)\bar{v}'(s))(s_\xi+\lambda_+s_\eta)=0.\end{aligned}$$

由式(31)可知直线 $C_-(s)$ 是和向量 $(\bar{u}'(s),\bar{v}'(s))$ 垂直, 因此我们有 $(u-\xi)\bar{u}'(s)+(v-\eta)\bar{v}'(s)$ 沿着每条直线 $C_-(s)$ 为常数. 所以

$$\begin{aligned}&(u-\xi)\partial_+u+(v-\eta)\partial_+v+\frac{2c}{\gamma-1}\partial_+c=\\&\left((u-\xi)\bar{u}'(s)+(v-\eta)\bar{v}'(s)+\frac{2\bar{c}}{\gamma-1}\bar{c}'(s)\right)(s_\xi+\lambda_+s_\eta)=\\&\left((\bar{u}(s)-\bar{\xi}(s))\bar{u}'(s)+(\bar{v}(s)-\bar{\eta}(s))\bar{v}'(s)+\frac{2\bar{c}}{\gamma-1}\bar{c}'(s)\right)(s_\xi+\lambda_+s_\eta)=0.\end{aligned}$$

于是,该定理证毕. □

类似的,如果式(31)为

$$\bar{u}'(s)+\bar{\lambda}_+(s)\bar{v}'(s)=0, \tag{35}$$

其中

$$\bar{\lambda}_+=\frac{(\bar{u}-\bar{\xi})(\bar{v}-\bar{\eta})+\sqrt{\bar{c}^2((\bar{u}-\bar{\xi})^2+(\bar{v}-\bar{\eta})^2-\bar{c}^2)}}{(\bar{u}-\bar{\xi})^2-\bar{c}^2}, \tag{36}$$

我们能够得到 l 附近的一个以 C_+ 特征为直特征的简单波解.

3 简单波的几何结构

由前面的讨论我们知道简单波的像是一条曲线 $u=\bar{u}(s)$, $v=\bar{v}(s)$, $c=\bar{c}(s)$, $s_1<s<s_2$. 并且沿着该曲线成立

$$\bar{c}'(s)=\frac{\gamma-1}{2}\sqrt{\bar{u}'(s)^2+\bar{v}'(s)^2} \tag{37}$$

或

$$\bar{c}'(s)=-\frac{\gamma-1}{2}\sqrt{\bar{u}'(s)^2+\bar{v}'(s)^2}. \tag{38}$$

每条直特征线都映到该曲线上的一点. 如果把简单波及其像表示在同一坐标平面下,那么它的像可以由一速度图曲线 Λ: $\xi=\bar{u}(s)$, $\eta=\bar{v}(s)$ 和一族以该曲线上的点为圆心 $\bar{c}(s)$ 为半径的声速圆 C_s 来表示. 每一条直特征线 $C(s)$ 均和相应状态的声速圆 C_s 相切,并且它的方向和速度图曲线 Λ 在相应点的切线方向垂直.

如果沿着简单波中的每一条直特征线 $(\bar{u}(s)-\xi)\bar{u}'(s)+(\bar{v}(s)-\eta)\bar{v}'(s)>0$,那么由计算可知上述直特征线 $C_-(s)$(或 $C_+(s)$) 可以表示成如下形式:

$$\xi=\bar{\xi}(s)+t\bar{v}'(s),\ \eta=\bar{\eta}(s)-t\bar{u}'(s), \tag{39}$$

其中

$$\bar{\xi}(s)=\bar{u}(s)-\frac{\bar{c}(s)\bar{u}'(s)}{\sqrt{\bar{u}'(s)^2+\bar{v}'(s)^2}},\ \bar{\eta}(s)=\bar{v}(s)-\frac{\bar{c}(s)\bar{v}'(s)}{\sqrt{\bar{u}'(s)^2+\bar{v}'(s)^2}}, \tag{40}$$

$t<0$(或 $t>0$) 是沿着直线 $s=\text{const}$ 的参数. 我们称曲线 $\xi=\bar{\xi}(s)$, $\eta=\bar{\eta}(s)$, $s_1<s<s_2$ 为简单波的声速边界. 相反,如果沿着简单波中的每一条直特征线 $(\bar{u}(s)-\xi)\bar{u}'(s)+(\bar{v}(s)-\eta)\bar{v}'(s)<0$,那么上述直特征线 $C_-(s)$(或 $C_+(s)$) 可以表示成:

$$\xi=\bar{\xi}(s)-t\bar{v}'(s),\ \eta=\bar{\eta}(s)+t\bar{u}'(s), \tag{41}$$

其中

$$\bar{\xi}(s)=\bar{u}(s)+\frac{\bar{c}(s)\bar{u}'(s)}{\sqrt{\bar{u}'(s)^2+\bar{v}'(s)^2}},\ \bar{\eta}(s)=\bar{v}(s)+\frac{\bar{c}(s)\bar{v}'(s)}{\sqrt{\bar{u}'(s)^2+\bar{v}'(s)^2}}, \tag{42}$$

$t<0$(或 $t>0$).

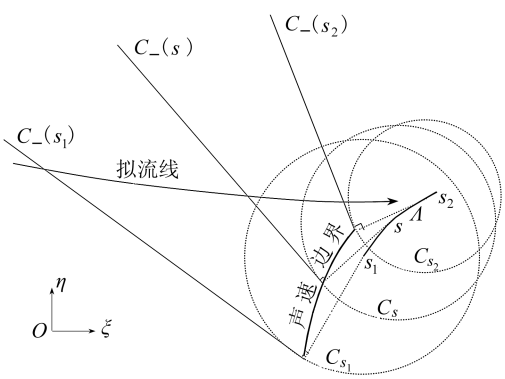

图3 (ξ,η) 平面上的一个疏散简单波

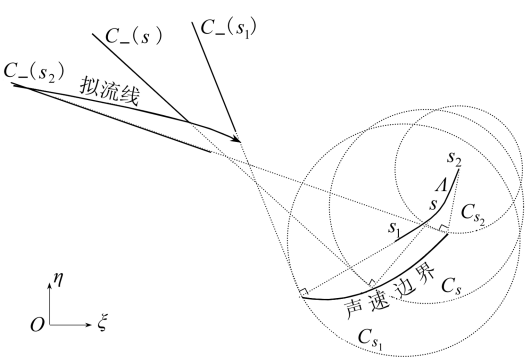

图4 (ξ,η) 平面上的一个压缩简单波

在图3,我们给出了一个以 C_- 特征为直特征的疏散简单波(沿着每一条拟流线的方向 c,从而 ρ, p 是单调减小的). 图4给出了一个以 C_- 特征为直特征压缩简单波(沿着每一条拟流线的方向 c,从而 ρ, p 是单调递增的). 接下来我们将要证明:沿着直特征的方向疏散简单波的直

特征线能够延伸到声速边界而不彼此相交;而压缩简单波的直特征线在到达声速边界之前会彼此相交,这会造成冲击波的形成,见文献[15].

定理 3.1 沿着直特征的方向疏散简单波的直特征线能够延伸到声速边界而不彼此相交.

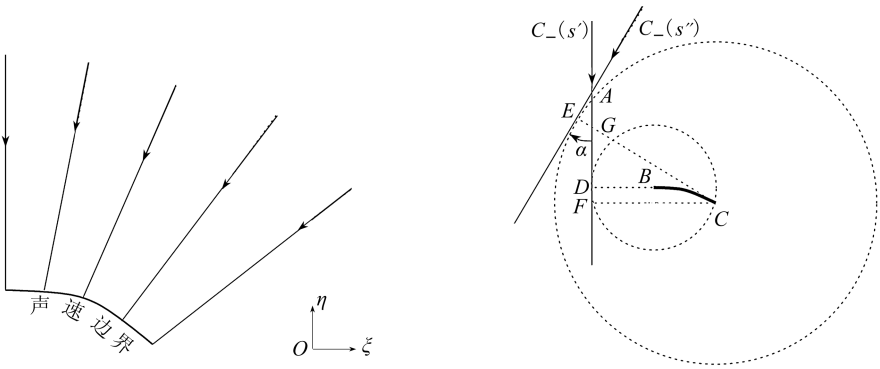

图 5 声速边界

证明 我们只要证明沿着直特征线的方向这族直特征线是收缩的情况. 这时,曲线 Λ: $\xi = \bar{u}(s)$, $\eta = \bar{v}(s)$, $s_1 < s < s_2$ 是一条凸或凹的曲线. 不失一般性,我们假设直特征线为 $C_-(s)$, $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$,并且沿着每一条直特征线 $(\bar{u}(s) - \xi, \bar{v}(s) - \eta)\cdot(\bar{u}'(s), \bar{v}'(s)) > 0$. 因此,由前面的结论可知 沿着拟流线的方向参数 s 是单调递增的. 令 $C_-(s')$, $C_-(s'')$, $s' < s''$ 为任意给定的两条直特征线,角 α 为 $C_-(s')$ 和 $C_-(s'')$ 按顺时针方向形成的角,如图 5 所示. 只要证明当 α 小于 π 时 $C_-(s')$ 和 $C_-(s'')$ 在到达声速边界时不相交. 假设 $C_-(s')$ 和 $C_-(s'')$ 在到达声速边界之前相交于点 A. 令点 B 为 $(\bar{u}(s'), \bar{v}(s'))$;点 C 为 $(\bar{u}(s''), \bar{v}(s''))$;点 E 为 $C_-(s'')$ 上的点,使得 CE 和 $C_-(s'')$ 垂直;点 D 和 F 为 $C_-(s'')$ 上的点,使得 BD 和 CF 垂直于 $C_-(s')$. CE 和 $C_-(s')$ 相交于点 G. 由于沿着 $C_-(s')$ $(\bar{u}(s) - \xi, \bar{v}(s) - \eta)\cdot(\bar{u}'(s), \bar{v}'(s)) > 0$, $s' < s''$ 以及 $\alpha < \pi$, 因此

$$|BD| < |CF|. \tag{43}$$

所以,我们有

$$\bar{c}(s'') = |CE| > |CG| > |CF| > |BD| = \bar{c}(s'), \tag{44}$$

这和 $\bar{c}(s'') < \bar{c}(s')$ 相矛盾. 于是,该定理证毕. □

定理 3.2 对一个简单波,如果 $(\bar{u}'(s_0), \bar{v}'(s_0)) \neq (0,0)$, $s_1 < s_0 < s_2$, 那么直特征线 $C(s_0)$ 不和声速边界相切.

证明 不失一般性,我们假设沿着直特征线 $(\bar{u}(s_0) - \xi)\bar{u}'(s_0) + (\bar{v}(s_0) - \eta)\bar{v}'(s_0) > 0$, 那么在 s_0 的一个小领域内声速边界可以用式(40)来表示. 由计算可知

$$(\bar{\xi}'(s_0), \bar{\eta}'(s_0))\cdot(\bar{u}'(s_0), \bar{v}'(s_0)) = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\right)(\bar{u}'(s_0)^2 + \bar{v}'(s_0)^2). \tag{45}$$

由于 γ 是 1 至 5/3 之间的常数,因此向量 $(\bar{\xi}'(s_0), \bar{\eta}'(s_0))$ 和向量 $(\bar{u}'(s_0), \bar{v}'(s_0))$ 不垂直. 又由于向量 $(\bar{u}'(s_0), \bar{v}'(s_0))$ 和直特征线 $C(s_0)$ 垂直,所以直特征线 $C(s_0)$ 和声速边界不相切. 因此,该定理证毕. □

定理 3.3 沿着直特征的方向压缩简单波的直特征线在到达声速边界之前会彼此相交.

证明 不失一般性,我们假设直特征线为 C_+ 特征线,并且沿着拟流线 s 是单调递增的. 我

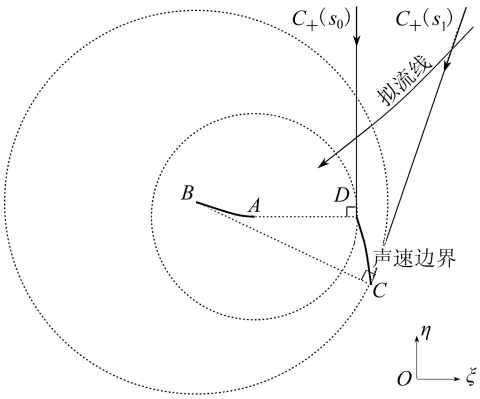

图6 拟流线和声速边界

们假设这些直特征能够延伸到声速边界而不相互相交,如图6所示. 由于该简单波为一压缩简单波,于是存在 $s_0 \in (s_1, s_2)$ 使得 $(\bar{u}'(s_0), \bar{v}'(s_0))$ 不为0,并且沿着直特征线 $C_+(s_0)$ 成立 $(\bar{u}(s_0) - \xi)\bar{u}'(s_0) + (\bar{v}(s_0) - \eta)\bar{v}'(s_0) < 0$. 由定理3.2可知,$C_+(s_0)$ 和声速边界不相切,那么存在一个非常小的 $\delta > 0$ 使得 $\{(\bar{\xi}(s), \bar{\eta}(s)) \mid 0 < s_0 - s < \delta\}$ 落在声速圆 C_{s_0} 外. 令点 A, B, C, D 分别为 $(\bar{u}(s_0), \bar{v}(s_0))$, $(\bar{u}(s_1), \bar{v}(s_1))$, $(\bar{\xi}(s_0), \bar{\eta}(s_0))$, $(\bar{\xi}(s_1), \bar{\eta}(s_1))$. 由于沿着直特征线 $C_+(s_0)$ $(\bar{u}(s_0) - \xi)\bar{u}'(s_0) + (\bar{v}(s_0) - \eta)\bar{v}'(s_0) < 0$,所以当 s_0-s_1 充分小时 $\bar{u}(s_0) > \bar{u}(s_1)$,于是 $\bar{c}(s_0) = |AD| < |BC| = \bar{c}(s_1)$,这和 $\bar{c}(s_0) > \bar{c}(s_1)$ 相矛盾. 于是,该定理证毕. □

4 绕一拟流线弯曲部的简单波结构

本节考虑如下问题:对一给定的直的拟流线,该拟流线从点 A 开始弯曲. 流动在该拟流线的直线部分附近的流动为常状态 (u_0, v_0, p_0, ρ_0). 由文献[5]可知弯曲部附近的流动为简单波,那么如何构造弯曲部附近的简单波流动? 由于我们仅限于拟超声速流动,所以假设在点 A 有 $(u_0 - \xi_A)^2 + (v_0 - \eta_A)^2 > c_0^2$.

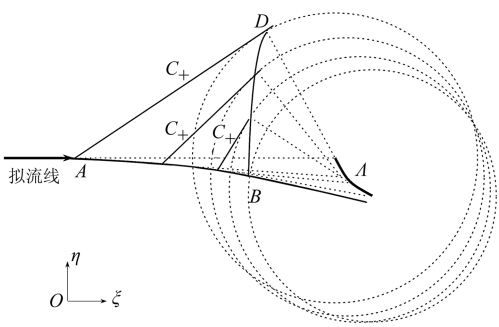

图7 绕一拟流线弯曲部的简单波结构

我们假设拟流线的弯曲部可以表示成 $\eta = f(\xi)$, $\eta_A = f(\xi_A)$, f 为一光滑函数, 且 $f' < 0$, $f'' < 0$. 我们来详细建立这个简单波解. 常状态流动区域是以一 C_+^A 特征线或 C_-^A 特征线为终界,C_+^A 和 C_-^A 可以由点 A 和声速圆 $(\xi - u_0)^2 + (\eta - v_0)^2 = c_0^2$ 来确定. 首先,我们考虑第1种情况. 假设沿着弯曲部 $u = u(\xi)$, $v = v(\xi)$, $c = c(\xi)$. 于是,由前面的结论可知 $u(\xi)$, $v(\xi)$, $c(\xi)$ 满足

$$\begin{cases} u'(\xi) + \lambda_+(\xi) v'(\xi) = 0, \\ \dfrac{v(\xi) - f(\xi)}{u(\xi) - \xi} = f'(\xi), \\ c'(\xi) = -\dfrac{\gamma - 1}{2}\sqrt{u'(\xi)^2 + v'(\xi)^2}, \end{cases} \tag{46}$$

其中

$$\lambda_+(\xi) = \frac{(u(\xi) - \xi)(v(\xi) - f(\xi)) + \sqrt{c^2(\xi)((u(\xi) - \xi)^2 + (v(\xi) - f(\xi))^2 - c^2(\xi))}}{(u(\xi) - \xi)^2 - c^2(\xi)}. \tag{47}$$

所以,为了得到这个简单波解,我们只要求解常微分方程组(46)的给定如下初值的初值问题

$$(u, v, c)(\xi_A) = (u_0, v_0, c_0). \tag{48}$$

由方程组(46)的第 2 个方程我们有

$$v - f = (u - \xi)f' . \tag{49}$$

将式(49)代入式(47)可得

$$\lambda_+(\xi) = \frac{(u-\xi)^2 f' + \sqrt{c^2((u-\xi)^2(1+f'^2) - c^2)}}{(u-\xi)^2 - c^2} . \tag{50}$$

将式(49)两边关于 ξ 求导,可得

$$v' = u'f' + (u-\xi)f'' . \tag{51}$$

因此,方程组(46)的第 1 个方程变为

$$u' + \lambda_+(u'f' + (u-\xi)f'') = 0, \tag{52}$$

即

$$u' = -\frac{(u-\xi)f''\lambda_+}{1+\lambda_+ f'} = F_1(\xi, u, c) . \tag{53}$$

式(46)的第 3 个方程变为

$$c' = -\frac{\gamma-1}{2}\sqrt{\left(\frac{(u-\xi)f''\lambda_+}{1+\lambda_+ f'}\right)^2 + \left((u-\xi)f'' - \frac{(u-\xi)f''f'\lambda_+}{1+\lambda_+ f'}\right)^2} = F_2(\xi, u, c) . \tag{54}$$

由于在点 $\xi = \xi_A$ 有

$$(u(\xi_A) - \xi_A)^2 + (v(\xi_A) - f(\xi_A))^2 - c(\xi_A)^2 > 0 \tag{55}$$

以及向量 $(1, f'(\xi_A))$ 和向量 $(u_0 - \xi_A, v_0 - f(\xi_A))$ 平行,因此由广义特征分析的结论有

$$1 + \lambda_+(\xi_A)f'(\xi_A) > 0. \tag{56}$$

所以, F_1 和 F_2 在点 (ξ_A, u_0, c_0) 的一个小领域内是连续可微的. 于是,由经典的存在性定理我们知道存在一 $\delta > 0$,使得式(46)和(48)在 $(\xi_A, \xi_A + \delta)$ 解存在且唯一. 显然,该解可以延拓到点 ξ_B,在该点 $u(\xi_B)$, $v(\xi_B)$, $c(\xi_B)$ 满足

$$(u(\xi_B) - \xi_B)^2 + (v(\xi_B) - f(\xi_B))^2 - c(\xi_B)^2 = 0, \tag{57}$$

$$1 + \lambda_+(\xi_B)f'(\xi_B) = 0. \tag{58}$$

如图 7 所示. 由方程组(46)的第 3 式可知上述构造的简单波为一疏散的简单波. 类似的,如果常状态流动区域是以 C_-^A 特征线为终界,我们也能构造上述弯曲部附近的简单波结构,该简单波为一压缩的简单波.

致谢 赖耕感谢宾夕法尼亚州立大学数学系,他在作为交换生访问宾夕法尼亚州立大学时所得到的帮助. 两位作者均要感谢张同教授和郑玉玺教授有益的讨论.

参考文献:

[1] Li J, Zhang T, Yang S. *The Two-Dimensional Riemann Problem in Gas Dynamics*[M]. London: Addison Wesley Longman Limited, 1998.

[2] Zhang T, Zheng Y. Conjecture on the structure of solution of the Riemann problem for two-dimensional gas dynamics system[J]. *SIAM J. Math Anal*, 1990, **21**(3): 593-630.

[3] Zheng Y. *Systems of Conservation Laws: Two-Dimensional Riemann Problems*[M]. Boston: 38 PNLDE, Bikhäuser, 2001.

[4] John F. *Partial Differential Equations*[M]. New York: Springer-Verlag, 1982.

[5] Courant R, Friedrichs K O. *Supersonic Flow and Shock Waves*[M]. New York: Interscience,

1948.

[6] Li J, Zhang T, Zheng Y. Simple waves and a characteristic decomposition of the two dimensional compressible Euler equations[J]. *Commu Math Phys*, 2006, **267**(1): 1-12 .

[7] Bang S. *Rarefaction Wave Interaction of Pressure Gradient System*[M]. State college: Pennsylvania State University, 2007.

[8] Dai Z, Zhang T. Existence of a global smooth solution for a degenerate Goursat problem of gas dynamics[J]. *Arch Ration Mech Anal*, 2000,**155**(4): 277-298.

[9] Lei Z, Zheng Y. A complete global solution to the pressure gradient equation[J]. *J Differential Equations*, 2007, **236**(1): 280-292.

[10] Song K, Zheng Y. Semi-Hyperbolic patches of solutions of the pressure gradient system[J]. *Discrete and Continuous Dynamic System*, 2009, **24**(4): 1365-1380.

[11] Li J. On the two-dimensional gas expansion for the compressible Euler equations[J]. *SIAM J Appl Math*, 2002, **62**(3): 831-852.

[12] Li J. Global solutions of an initial value problem for two-dimensional compressible Euler equations[J]. *J Diff Equs*, 2002, **179**(1): 178-194.

[13] Li J, Zheng Y. Interaction of rarefaction waves of the two-dimensional self-similar Euler equations[J]. *Arch Rat Mech Anal*, 2009, **193**(3): 623-657.

[14] Chang T, Chen G, Yang S. On the 2-D Riemann problem for the compressible Euler equation, Ⅱ. Interaction of contact discontinuities[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2000, **6**(2): 419-430.

[15] Glimm J, Ji X, Li J, Li X, Zhang P, Zhang T, Zheng Y. Transonic shock formation in a rarefaction Riemann problem for the 2-D compressible Euler Equations[J]. *SIAM J Appl Math*, 2008, **69**(3): 720-742.

Simple Waves for Two-Dimensional Pseudo-Steady Compressible Euler System

LAI Geng, SHENG Wan-cheng

(*Department of Mathematics*, *Shanghai University*, *Shanghai* 200444, *P. R. China*)

Abstract: A simple wave was defined as a flow in a region whose image is a curve in phase space. It is well known that "the theory of simple waves is fundamental in building up the solutions of flow problems out of elementary flow patterns". Geometric construction of simple waves for the 2D pseudo-steady compressible Euler system were mainly concerned with. Based on the geometric interpretation the expansion or compression simple wave flow construction around a pseudo-stream line with a bend part was constructed. It is a building block which appears in the global solution to four contact discontinuities Riemann problems.

Key words: self-similar Euler system; pseudo-stream line; generalized characteristic analysis; simple wave; sonic circle; sonic edge