

# 双曲拉伸面上的流动及其热交换\*

A·艾哈迈德<sup>1</sup>, S·阿司哈<sup>1,2</sup>

(1. COMSATS 信息技术研究所,伊斯兰堡 巴基斯坦;  
2. 阿卜杜勒阿齐兹国王大学 数学系,吉达 沙特阿拉伯)

**摘要:** 研究不可压缩粘性流体,在双曲拉伸面上的边界层流动及其热传导.分别使用级数展开法和局部非相似(LNS)法,得到解析结果和数值结果,给出了表面摩擦和 Nusselt 数的解析结果和数值结果,并进行了互相比较.同时发现动量和热边界层厚度,随着离前缘距离的增加而减小.众所周知,线性拉伸项方程的解,可以作为双曲拉伸首次项方程的解.

**关键词:** 双曲拉伸面; 边界层流动; 热交换; 级数展开法; 局部非相似(LNS)方法

**中图分类号:** O357.1;O414.19 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.04.004

## 引言

温度分布给定的,连续拉伸面上的流动和热交换研究备受关注,因为它们在工业和工程的不同领域有着广泛的应用.在平板拉伸的同时,加热或者冷却对产品的质量有一定影响.聚合物的挤压、塑料布的气动吹出和金属板的冷凝加工(参见文献[1-2]),都是这种生产工艺的例子.利用不同的拉伸速度和表面温度分布,建立起实际的加工模型.拉伸模型可以是线性的、多项式的和指数型的.因此,可能始终期望另外寻找理想的拉伸速度和表面温度分布.

Sakiadis<sup>[3]</sup>最先开始研究,不可压缩粘性流体在移动固体表面上的边界层流动.然而,Crane<sup>[4]</sup>对连续的拉伸表面,给出了精确的边界层解.稍后,环绕着拉伸流动开展了方方面面的广泛研究;如,传热和传质、MHD、非 Newton 流体、线性和非线性的平板速度、多孔介质,等等.迄今为止,研究文献的主题非常广泛.文献[5-14]可以看到该方向研究的最新进展.最近,Patrick 和 Magyar<sup>[15]</sup>在适当的横向蒸腾作用下,研究任意拉伸速度时广义的 Crane 流动;Bognár<sup>[16]</sup>在一个幂律拉伸速度的壁面上,证明了 Newton 流体相似边界层方程解析解的存在性.

本文首次提出双曲拉伸面,扩展了当下的拉伸速度范围,以及与此相应的物理加工.首次将控制方程转换成解析解所应服从的适当形式.计算了速度场和温度分布、表面摩擦系数和 Nusselt 数,并给出相应的图形.数值解和解析解的比较表明,两种解吻合程度相当好.还观察到,动量和热边界层厚度沿拉伸速度方向减少.有趣的是,线性拉伸情况下的结果(非常著名),成了双曲拉伸首次分析中的一个特殊情况.

\* 收稿日期: 2011-06-22; 修订日期: 2011-11-24

作者简介: A. Ahmad, 博士(联系人. E-mail: adeelahmed@comstats.edu.pk).

本文原文为英文,吴承平译,张禄坤校.

## 1 问题的描述

设粘性流体流过位于  $z = 0$  的无限拉伸面, 面上的流体速度分布为  $U(x)$ , 温度分布为  $T(x)$ , 随后加以确定. 相关的边界层方程和边界条件为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (3)$$

$$\begin{cases} u(x, y) = U(x), v(x, y) = 0, & \text{当 } y = 0, \\ u(x, y) \rightarrow 0, & \text{当 } y \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} T = T_w = T_\infty + AU(x), & \text{当 } y = 0, \\ T = T_\infty, & \text{当 } y \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (5)$$

其中,  $u$  和  $v$  分别为  $x$  和  $y$  方向的速度分量;  $\nu$  为动粘度;  $A$  为常数. 引入变量

$$\Psi = \nu Re_x^{1/2} f(\eta, x), \quad \theta(\eta, x) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad (6)$$

将  $f$  和  $\theta$  代入方程(2)和(3), 得到

$$f''' + \frac{x}{2} \frac{1}{Re_x} \frac{dRe_x}{dx} ff'' - \frac{x}{U} \frac{dU}{dx} f'^2 = x \left( f' \frac{\partial f'}{\partial x} - f'' \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad (7)$$

$$\frac{1}{Pr} \theta'' - \frac{x}{\Delta T} \frac{d\Delta T}{dx} f' \theta + \frac{1}{2} \frac{x}{Re_x} \frac{dRe_x}{dx} f \theta' = x \left( f' \frac{\partial \theta}{\partial x} - \theta' \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad (8)$$

这里,  $\eta = (y/x) Re_x^{1/2}$ , 其中  $Re_x = U(x)x/\nu$  为局部的 Reynolds 数, 利用式(6), 边界条件(4)和(5)可以改写成

$$\begin{cases} f'(\eta, x) = 1, f(\eta, x) = 0, \theta(\eta, x) = 1, & \text{当 } \eta = 0, \\ f'(\eta, x) \rightarrow 0, \theta(\eta, x) \rightarrow 0, & \text{当 } \eta \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (9)$$

在式(7)和(8)中, 引入双曲拉伸速度  $U(x) = u_0 \sinh x$ , 得到

$$f''' + \frac{1}{2}(1 + x \coth x) ff'' - x \coth x f'^2 = x \left( f' \frac{\partial f'}{\partial x} - f'' \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad (10)$$

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + \frac{1}{2}(1 + x \coth x) f \theta' - x \coth x f' \theta = x \left( f' \frac{\partial \theta}{\partial x} - \theta' \frac{\partial f}{\partial x} \right). \quad (11)$$

## 2 求解方法

本节对小数值  $x$  给出级数解, 对相对较大的  $x$  给出数值解(LNS)<sup>[16]</sup>. 注意到方程(10)和(11)本质上是非相似的. 因此, 为了更好地理解并便于比较, 同时构建解析结果和数值结果是可取的. 对小数值的  $x$ , 解析解用级数展开表达; 对相对较大的  $x$ , 采用 LNS 的数值解.

### 2.1 小数值 $x$ 时的级数解

将  $f(\eta, x)$  和  $\theta(\eta, x)$  展开为  $x$  的幂级数, 记

$$\begin{cases} f(\eta, x) = f_0(\eta) + x f_1(\eta) + x^2 f_2(\eta) + \dots, \\ \theta(\eta, x) = \theta_0(\eta) + x \theta_1(\eta) + x^2 \theta_2(\eta) + \dots. \end{cases} \quad (12)$$

将展开式(12)代入方程(10)和(4),保留  $O(1)$  项,得到如下首次项方程:

$$f_0''' + f_0 f_0'' - f_0'^2 = 0, \tag{13}$$

$$\begin{cases} f_0'(\eta) = 1, f_0(\eta) = 0, & \text{当 } \eta = 0, \\ f_0'(\eta) \rightarrow 0, & \text{当 } \eta \rightarrow \infty, \end{cases} \tag{14}$$

在式(13)中,利用展开式

$$\coth x = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 + \dots,$$

Crane<sup>[4]</sup>给出了该方程的精确解:

$$f_0(\eta) = 1 - e^{-\eta}. \tag{15}$$

令人感兴趣的是,边值问题(13)和(14)所具有的精确解(15),表示在一个线性拉伸面上的流动.其  $O(x)$  次项方程的解为0:

$$f_1(\eta) = 0. \tag{16}$$

同样,  $O(x^2)$  次项方程如下给出:

$$f_2''' + f_2'' - e^{-\eta}(f_2'' + 4f_2' + 3f_2) = \frac{1}{6}e^{-\eta}(1 + e^{-\eta}), \tag{17}$$

$$\begin{cases} f_2'(\eta) = 0, f_2(\eta) = 0, & \text{当 } \eta = 0, \\ f_2'(\eta) \rightarrow 0, & \text{当 } \eta \rightarrow \infty. \end{cases} \tag{18}$$

为求解上述方程,在方程(17)中作变换  $\xi = e^{-\eta}$ , 得到

$$\begin{cases} \xi^2 \frac{d^3 f}{d\xi^3} + \xi(\xi + 2) \frac{d^2 f}{d\xi^2} + -3\xi \frac{df}{d\xi} + 3f = -\frac{1}{6}(1 + \xi), \\ f_2'(\xi) = 0, f_2(\xi) = 0, & \text{当 } \xi = 1, \\ f_2'(\xi) \rightarrow 0, & \text{当 } \xi \rightarrow 0. \end{cases} \tag{19}$$

方程(19)是一个三阶线性常微分方程,并有3个边界条件:  $\xi = 1$  处有2个条件,  $\xi = 0$  处有1个条件.为了将该边值问题转换为初值问题,引入另一个条件:  $\xi = 1$  时,  $f_2''(\xi) = \alpha$ . 所得初值问题可以用级数求解,未知量  $\alpha$  可以用边界条件  $\xi = 0$  确定,  $\alpha = -0.10779$ . 二次项方程(19)的级数解用变量  $\eta$  写出

$$f_2(\eta) = \frac{1}{2}\alpha(e^{-\eta} - 1)^2 + \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{2}\alpha\right)(e^{-\eta} - 1)^3. \tag{20}$$

方程(9)和(10)前3项级数解最终可以写成

$$f(\eta, x) = 1 - e^{-\eta} - x^2 \left( \frac{1}{2}\alpha(e^{-\eta} - 1)^2 + \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{2}\alpha\right)(e^{-\eta} - 1)^3 \right). \tag{21}$$

## 2.2 能量方程

将变换  $\zeta = -Pre^{-\eta}$  代入方程(11)和(9), 所得结果方程的首次项方程为

$$\zeta \frac{d^2 \theta_0}{d\zeta^2} + (1 - Pr - \zeta) \frac{d\theta_0}{d\zeta} + \theta_0 = 0, \tag{22}$$

$$\theta_0(-Pr) = 1, \theta_0(0) = 0. \tag{23}$$

文献[21-22]给出了上述方程的精确解:

$$\theta_0(\zeta) = \left(-\frac{\zeta}{Pr}\right)^{Pr} \frac{Ku(Pr - 1, Pr + 1, \zeta)}{Ku(Pr - 1, Pr + 1, -Pr)}, \tag{24}$$

其中,  $Ku$  为 Kummer 函数. 注意到,边值问题(22)和(23)的精确解(24),表示线性拉伸面上的

热交换. 得到  $O(x)$  次项方程的平凡解和  $O(x^2)$  次项方程为

$$\begin{aligned} \zeta \frac{d^2 \theta_2}{d\zeta^2} + (1 - Pr - \zeta) \frac{d\theta_2}{d\zeta} + 3\theta_2 + \left(0.1078 \left(\frac{\zeta}{Pr} - 1\right) \zeta + \right. \\ \left. 0.00498 \left(\frac{\zeta}{Pr} + 1\right)^2 \zeta + 0.3333\zeta\right) \theta_0 + Pr \left(0.1617 \left(\frac{\zeta}{Pr} + 1\right)^2 - \right. \\ \left. 0.00498 \left(\frac{\zeta}{Pr} + 1\right)^3 - 0.1667 \left(1 + \frac{\zeta}{Pr}\right)\right) \frac{d\theta_0}{d\zeta} = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\theta_2(-Pr) = 0, \quad \theta_2(0) = 0. \quad (26)$$

采用和以前同样的方法, 得到不同 Prandtl 数时方程(25)的级数解. 满足  $Pr = 1$  的级数解可表示为

$$\begin{aligned} \theta_2(\eta) = \beta(1 - e^{-\eta}) + 0.5(0.333 + \beta)(1 - e^{-\eta})^2 + \\ 0.04167(1.568 + 0.16\beta)(1 - e^{-\eta})^3 + \\ 0.0694(0.8473 + 7.8\beta)(1 - e^{-\eta})^4, \end{aligned} \quad (27)$$

其中  $\beta = -0.1074$ . 该问题的表面摩擦因数和 Nusselt 数, 可通过如下关系计算:

$$C_f = 2Re_x^{-1/2}f''(0), \quad Nu_x = -Re_x^{1/2}\theta'(0).$$

### 2.3 局部的非相似方法

LNS 法最先由 Sparrow 和 Yu<sup>[17]</sup> 提出, 用于非相似边值问题的数值解, 并得到了非常广泛的应用(例如文献[18-20]). 在该方法中, 我们引入两个新函数:

$$g(\eta, x) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \varphi(\eta, x) = \frac{\partial \theta}{\partial x}. \quad (28)$$

在式(10)和(11)中, 分别略去项  $x(f' \partial f' / \partial x - f'' \partial f / \partial x)$  和  $x(f' \partial \theta / \partial x - \theta' \partial f / \partial x)$  后, 有

$$f''' + \frac{1}{2}(1 + x \coth x)ff'' - x \coth x f'^2 = 0, \quad (29)$$

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + \frac{1}{2}(1 + x \coth x)f\theta' - x \coth x f' \theta = 0. \quad (30)$$

相应的边界条件为

$$\begin{cases} f'(\eta, x) = 1, f(\eta, x) = 0, \theta(\eta, x) = 1, & \text{当 } \eta = 0, \\ f'(\eta, x) \rightarrow 0, \theta(\eta, x) \rightarrow 0, & \text{当 } \eta \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (31)$$

接着, 方程(10)和(11)对  $x$  取导数, 并略去项  $x(f' \partial g' / \partial x - f'' \partial g / \partial x)$  和  $x(f' \partial \varphi / \partial x - \theta' \partial g / \partial x)$ , 得到

$$\begin{aligned} g''' + \frac{1}{2}(1 + x \coth x)(fg'' + gf'') + \frac{1}{2}(\coth x + x(1 - \coth^2 x))ff'' - \\ 2x \coth x f' g' - (\coth x + x(1 - \coth^2 x))f'^2 - \\ f' g' + f'' g - x(g'^2 - g' g) = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} \varphi'' + \frac{1}{2}(1 + x \coth x)(f\varphi' + g\theta') + \frac{1}{2}(\coth x + x(1 - \coth^2 x))f\theta' - \\ x \coth x (g'\theta + f'\varphi) - (\coth x + x(1 - \coth^2 x))f'\theta - \\ f'\varphi + \theta' g - x(g'\varphi - \varphi' g) = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{cases} g'(\eta, x) = 0, g(\eta, x) = 0, \varphi(\eta, x) = 0, & \text{当 } \eta = 0, \\ g'(\eta, x) \rightarrow 0, \varphi(\eta, x) \rightarrow 0, & \text{当 } \eta \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (34)$$

应用 Runge-Kutta 迭代格式的打靶法, 求得方程(29)~(34)精确的数值解. 绘出关于  $x$  的局部

表面摩擦和 Nusselt 数的数值解和解析解图形。

### 2.4 大 Prandtl 数时的渐近分析

对于大 Prandtl 数, 动量边界层占据支配地位, 因此在热边界层中如下选取是合理的:

$$f(\eta, x) = \eta. \tag{35}$$

在热边界层方程(11)中使用式(35), 得

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + \frac{1}{2}(1 + x \coth x) \eta \theta' - x \coth x \theta = x \frac{\partial \theta}{\partial x}. \tag{36}$$

导入伸长变量  $\zeta$  为

$$\zeta = \sqrt{Pr} \eta. \tag{37}$$

将式(37)和式(12)代入式(36), 得到首次项方程

$$\frac{d^2 \theta_0}{d\zeta^2} + \zeta \frac{d\theta_0}{d\zeta} - \theta_0 = 0, \tag{38}$$

$$\theta_0(0) = 1, \theta_0(\infty) = 0, \tag{39}$$

该方程的精确解为

$$\theta_0(\zeta) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi} \zeta \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{\zeta}{\sqrt{2}} \right) \right) + e^{-\zeta^2/2}. \tag{40}$$

$O(x)$  次项方程的平凡解和  $O(x^2)$  次项方程变为

$$\frac{d^2 \theta_2}{d\zeta^2} + \zeta \frac{d\theta_2}{d\zeta} - 3\theta_2 = -\frac{1}{6\sqrt{2}} \sqrt{\pi} \zeta \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{\zeta}{\sqrt{2}} \right) \right) + \frac{1}{3} e^{-\zeta^2/2}, \tag{41}$$

$$\theta_2(0) = 0, \theta_2(\infty) = 0. \tag{42}$$

上述方程的精确解可展开为

$$\theta_2(\zeta) = \zeta \{ \operatorname{erf}(0.7071\zeta) (0.1305 + 0.0783\zeta^2) - 0.1305 - 0.0783\zeta^2 + 0.0625e^{-\zeta^2/2}\zeta \}. \tag{43}$$

最后, 大 Prandtl 数时, 能量方程(11)前3项解为

$$\begin{aligned} \theta(\eta, x) = & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi} \sqrt{Pr} \eta \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{Pr} \eta}{\sqrt{2}} \right) \right) + e^{-Pr\eta^2/2} + \\ & \sqrt{Pr} \eta x^2 \{ (\operatorname{erf}(0.7071\sqrt{Pr}\eta) - 1) (0.1305 + 0.0783Pr\eta^2) + \\ & 0.0625e^{-Pr\eta^2/2} \sqrt{Pr} \eta \}. \end{aligned} \tag{44}$$

### 3 结果和讨论

利用  $x$  的幂级数解和 LNS 法, 求解方程组(9) ~ (11). 图 1 给出了速度分布的数值结果和解析结果. 图 2 给出了不同  $x$  值时的速度分布. 图 2 清楚地表明, 边界层厚度随着  $x$  值的增大而减小. 这是合理的, 因为动量边界层与  $\sqrt{x/\sinh x}$  成比例, 而它是  $x$  的减函数.

图 3 给出了不同 Prandtl 数时的温度分布. 图 4 显示出大 Prandtl 数时温度的分布特点, 可以看到热边界层厚度随着 Prandtl 数的增大而减小. 这是因为 Prandtl 数增大时, 介质的导热率在下降, 接着使热边界层厚度减小.

当 Prandtl 数和  $x$  取定值时, 图 5 给出了温度分布的数值解和解析解的比较. 图 6 清楚地表明, 热边界层厚度随着  $x$  的增大而减小. 这是因为热边界层和  $\sqrt{x/(\sinh x Pr^{2/3})}$  成正比, 而它是  $x$  的减函数.

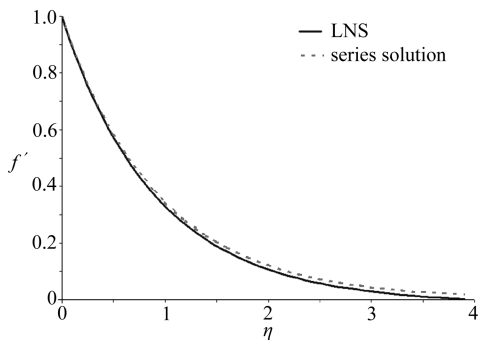


图1  $x = 1.0$  时速度分布的解析解和数值解的比较

Fig. 1 Comparison of analytical and numerical results of velocity profile for  $x = 1.0$

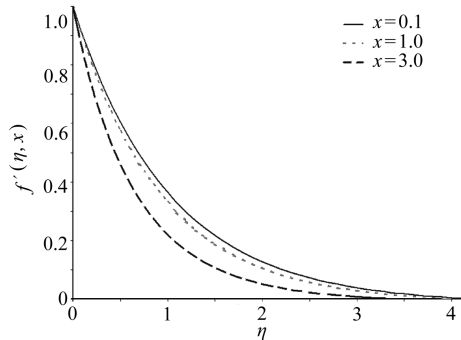


图2 用LNS法,  $x$ 取不同数值时速度随 $\eta$ 的变化

Fig. 2 Variation of velocity profile against  $\eta$  at selected values of  $x$  using LNS method

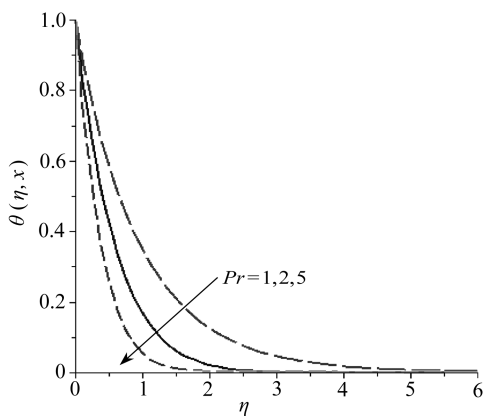


图3 利用级数展开法, 当 $x = 0.8$ ,  $Pr$ 取不同数值时, 温度随 $\eta$ 分布的变化

Fig. 3 Variation of temperature profile against  $\eta$  for  $x = 0.8$  and different values of  $Pr$  using series expansion method

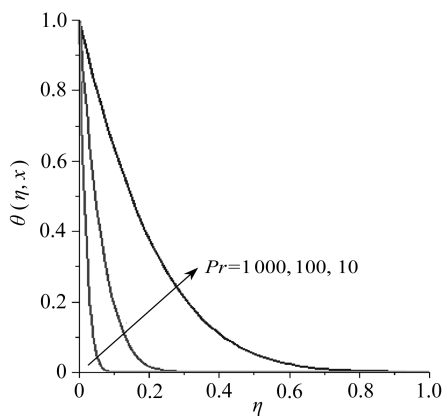


图4 利用级数展开法, 当 $x = 0.6$ ,  $Pr$ 取不同数值时, 温度随 $\eta$ 分布的渐近结果

Fig. 4 Asymptotic results for temperature distribution against  $\eta$  for different  $Pr$  (large) and  $x = 0.6$  using series expansion method

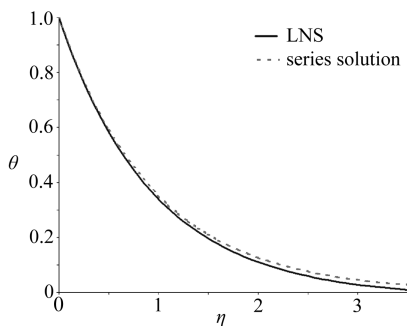


图5 当 $Pr = 1$ 和 $x = 0.8$ 时, 温度分布的解析解和数值解的比较

Fig. 5 Comparison of analytical and numerical results of temperature distribution for  $Pr = 1$  and  $x = 0.8$

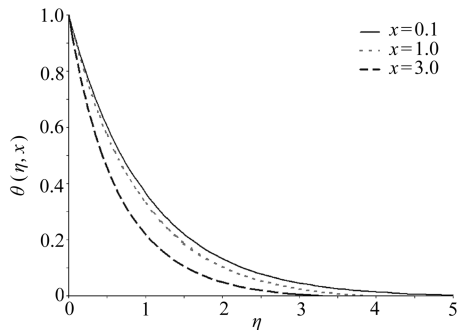


图6 利用LNS法, 当 $Pr = 1$ ,  $x$ 取不同数值时, 温度分布随 $\eta$ 的变化

Fig. 6 Variation of temperature distribution against  $\eta$  at selected values of  $x$  when  $Pr = 1$  using LNS method

图 7 给出了表面摩擦力的数值结果和解析结果的比较,直到  $x = 2$  为止,两者有着很好的一致性.图 7 还可以进一步观察到,表面摩擦力沿着线性伸长的表面在减小,对所有的  $x$ ,表面摩擦力减小的速率保持不变.这增加了我们对双曲拉伸面的研究兴趣.图 8 显示出不同 Prandtl 数时,Nusselt 数的解析结果和数值结果的比较,直到  $x = 2$  为止,两种结果是吻合的.图 8 和图 9 表明,Nusselt 数随着  $x$  的增加而增加,也随着 Prandtl 数的提高而增大.Prandtl 数  $Pr$  的提高,使流体的热交换性能下降,表面附近产生更大的温度梯度,从而热交换率也更高.

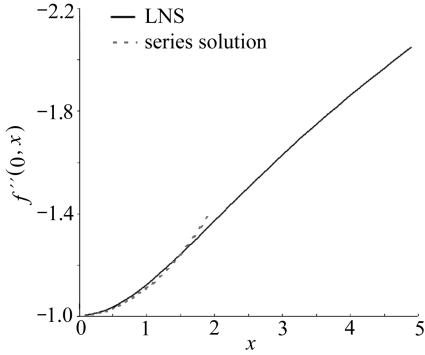


图 7 表面摩擦力的解析结果和数值结果随  $x$  的变化.直到  $x = 2$ ,解析结果(级数展开法)与数值结果(LNS)是吻合的

Fig. 7 Comparison of analytical and numerical results of skin friction against  $x$ . Analytical (series expansion method) result is in good agreement with numerical (LNS) result for  $x$  up to 2

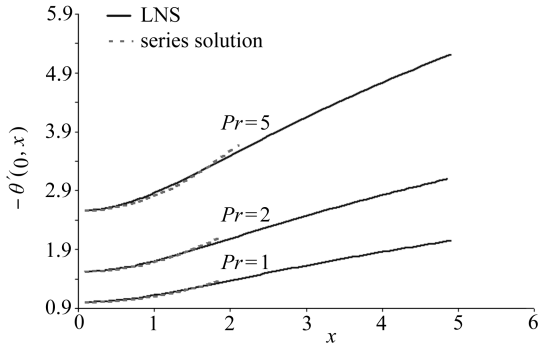


图 8 对不同的  $Pr$ , Nusselt 数的解析结果和数值结果随  $x$  的变化.直到  $x = 2$ ,解析结果(级数展开法)与数值结果(LNS)是吻合的

Fig. 8 Comparison of analytical and numerical results of Nusselt number against  $x$  for different  $Pr$ . Analytical (series expansion method) result is in good agreement with numerical (LNS) result for  $x$  up to 2

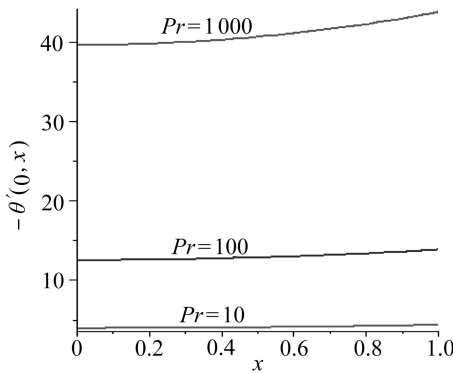


图 9  $Pr$  取不同的大数值时, Nusselt 数的渐进结果随  $x$  的变化

Fig. 9 Asymptotic results for Nusselt number against  $x$  for different large values of  $Pr$

## 4 结 论

本文研究不可压缩粘性流体,在双曲拉伸面上的稳定流动及其热交换问题.主要结果可以归纳如下:

- 1) 温度分布强烈地依赖于 Prandtl 数,热边界层厚度随着 Prandtl 数的提高而减小.
- 2) 动量和热边界层与  $\sqrt{x/\sinh x}$  成正比,因此,边界层厚度随着  $x$  的增加而减小.

- 3) 随着离前缘距离的迅速增加,表面摩擦因数下降,而 Nusselt 数增大。
- 4) 线性拉伸和线性温度分布解,可以在双曲拉伸首次项解中找到。

**致谢** 作者感谢审稿人的宝贵建议,感谢巴基斯坦伊斯兰堡 COMSATS 信息技术学院研究资助计划(16-69/CRGP/CIIT/IBD/10/711)的资助。

#### 参考文献 (References) :

- [1] Altan T, Oh S I, Gegel H L. *Metal Forming Fundamentals and Applications*[M]. 85. Metals Park, Ohio: American Society for Metals, 1983.
- [2] Fisher E G. *Extrusion of Plastics*[M]. New York: John Wiley, 1976: 14-140.
- [3] Sakiadis B C. Boundary layer behavior on continuous solid surfaces[J]. *American Institute of Chemical Engineers Journal*, 1961, 7(1): 26-28.
- [4] Crane L J. Flow past a stretching plate[J]. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 1970, 21(4): 645-647.
- [5] Dandapat B S, Singh S K. Thin film flow over a heated nonlinear stretching sheet in presence of uniform transverse magnetic field[J]. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2011, 38(3): 324-328.
- [6] Labropulu F, Li D, Pop I. Non-orthogonal stagnation-point flow towards a stretching surface in a non-Newtonian fluid with heat transfer[J]. *International Journal Thermal Sciences*, 2010, 49(6): 1042-1050.
- [7] Fang T G, Zhang J, Yao S S. New family of unsteady boundary layers over a stretching surface[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2010, 217(8): 3747-3755.
- [8] Yao S S, Fang T G, Zhong Y F. Heat transfer of a generalized stretching/shrinking wall problem with convective boundary conditions[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, 16(2): 752-760.
- [9] 纳丁 S,侯赛因 A. 同伦分析法求解非线性多孔收缩表面上黏性磁流体的流动[J]. *应用数学和力学*, 2009, 30(12): 1473-1481. (Nadeem S, Hussain A. MHD flow of a viscous fluid on a non-linear porous shrinking sheet with homotopy analysis method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2009, 30(12): 1569-1578.)
- [10] 阿里 F M, 纳扎尔 R, 阿里菲 N M, 波普 I. 考虑感应磁场影响时, 拉伸表面上的 MHD 驻点流动及热传递[J]. *应用数学和力学*, 2011, 32(4): 391-399. (Ali F M, Nazar R, Arifin N M, Pop I. MHD stagnation-point flow and heat transfer towards stretching sheet with induced magnetic field[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2011, 32(4): 409-418.)
- [11] Kechil S A, Hashim I. Series solution of flow over nonlinearly stretching sheet with chemical reaction and magnetic field[J]. *Physics Letters A*, 2008, 372(13): 2258-2263.
- [12] Hayat T, Qasim M, Abbas Z. Homotopy solution for the unsteady three-dimensional MHD flow and mass transfer in a porous space[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, 15(9): 2375-2387.
- [13] Hayat T, Qasim M. Influence of thermal radiation and Joule heating on MHD flow of a Maxwell fluid in the presence of thermophoresis[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2010, 53(21/22): 4780-4788.
- [14] Ishak A. MHD boundary layer flow due to an exponentially stretching sheet with radiation effect[J]. *Sains Malaysiana*, 2011, 40(4): 391-395.



- [15] Patrick D W, Magyari E. Generalized crane flow induced by continuous surfaces stretching with arbitrary velocities[J]. *Acta Mech*, 2010, **209**(3/4): 353-362.
- [16] Bognár G. Analytic solutions to the boundary layer problem over a stretching wall[J]. *Computers and Mathematics With Applications*, 2011, **61**(8): 2256-2261.
- [17] Sparrow E M, Yu H S. Local non-similarity thermal boundary layer solution[J]. *Trans ASME J Heat Transfer*, 1971, **93**(4): 328-334.
- [18] Sparrow E M, Quack H, Boerner C J. Local non-similarity boundary layer solution[J]. *AIAA J*, 1970, **8**: 1936-1942.
- [19] Mahmood M, Asghar S, Hossain M A. Squeezed flow and heat transfer over a porous surface for viscous fluid[J]. *Heat Mass Transfer*, 2007, **44**(2): 165-173.
- [20] Mushtaq M, Asghar S, Hossain M A. Mixed convection flow of second grade fluid along a vertical stretching flat surface with variable surface temperature[J]. *Heat Mass Transfer*, 2007, **43**(10): 1049-1061.
- [21] Chen C K, Char M I. Heat transfer of a continuous stretching surface with suction and blowing[J]. *J Math Anal Appl*, 1988, **135**(2): 568-580.
- [22] Fang T, Zhang J. Note on the heat transfer of flows over a stretching wall in porous media: exact solutions[J]. *Transport in Porous Media*, 2011, **86**(2): 579-584.

## Flow and Heat Transfer Over a Hyperbolic Stretching Sheet

A. Ahmad<sup>1</sup>, S. Asghar<sup>1,2</sup>

(1. COMSATS Institute of Information Technology, Islamabad, Pakistan;

2. Department of Mathematics, King Abdulaziz University, Jeddah, Saudi Arabia)

**Abstract:** The boundary layer flow and heat transfer analysis of an incompressible viscous fluid for a hyperbolically stretching sheet was presented. The analytical and numerical results were obtained using series expansion method and local non-similarity (LNS) methods respectively. Analytical and numerical results for skin friction and Nusselt number were calculated and compared with each other. The significant observation was that the momentum and thermal boundary layer thicknesses decrease as the distance from the leading edge increases. The well known solution of linear stretching was found as the leading order solution for the hyperbolic stretching.

**Key words:** hyperbolic stretching sheet; boundary layer flow; heat transfer; series expansion; LNS methods