

3:1 内共振下超临界输液管受迫振动响应*

毛晓晔¹, 丁虎¹, 陈立群^{1,2}

(1. 上海大学 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;
2. 上海大学 力学系, 上海 200444)

(我刊编委陈立群来稿)

摘要: 首次研究了超临界流速输液管在 3:1 内共振条件下的稳态幅频响应, 考虑超临界速度引起的管道屈曲位形, 建立描述连续体非线性振动的偏微分-积分方程. 通过 Galerkin 截断方法, 将连续体方程离散化. 对于同时含有平方与立方非线性的多自由度系统, 发展高阶多尺度法建立可解性条件. 稳态幅频响应曲线揭示了内共振条件下, 不同模态间能量的转移. 最后, 数值仿真结果验证了近似解析分析的有效性.

关键词: 输液管; 内共振; 超临界; 多尺度法; 非线性

中图分类号: O32 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2016.04.002

引 言

输液管道应用于各种流体运输以及机械中, 由于液体的流动, 管壁与流体之间会产生非常复杂的动力学行为, 进而引起管道的剧烈振动, 流速越大, 横向振动越明显^[1]. 例如火箭发射过程中发生的燃料泄漏, 原因之一就是燃料管道的振动引起密封失效甚至管道脱落.

国内外学者在对输液管的研究中发现了很多有趣的现象^[2-3]. 当流体速度超过临界值时, 悬臂管发生颤振失稳^[4-5], 而两端支撑的输液管会发生屈曲失稳^[6]. 由于连续系统具有无穷多个模态, 在一定条件下, 可能出现内共振现象^[7]. 徐鉴及杨前彪研究了悬臂输液管的 1:1, 2:1 以及 3:1 内共振^[4-5], 发现了鞍结分岔以及 Hopf 分岔. 席红敏、张伟等研究了变速输液管的周期及混沌运动^[8]. Zhang(张艳雷)等利用多尺度法及数值方法详细研究了两端简支的超临界输液管 2:1 内共振特性^[9-12], 发现了连续陀螺运动体中的双跳跃现象, 而该系统的 3:1 内共振特性还有待研究.

本文利用多尺度法研究两端简支超临界输液管的 3:1 内共振特性, 解析过程中同时考虑平方非线性以及立方非线性, 并将解析与仿真做对比, 以验证解析方法的有效性.

1 控制方程及内共振条件

考虑一段如图 1 所示的输液管, 两端支撑形式为简支, 假设输液管的振动限制在纸平面

* 收稿日期: 2016-01-15; 修订日期: 2016-03-03

基金项目: 国家自然科学基金(重点项目)(11232009); 国家自然科学基金(11372171; 11422214)

作者简介: 毛晓晔(1987—), 男, 硕士生(E-mail: maoxiaoye1987920@aliyun.com);

丁虎(1978—), 男, 研究员, 博士生导师(通讯作者. E-mail: dinghu3@shu.edu.cn).

内,其中 U 为管道中液体流速,是一个恒定值; v 表示管道横向的振动位移,是空间坐标 x 和时间 t 的函数; p 为由于安装误差引起的初始应力,基础受一简谐位移激励;单位长度管道质量为 M ;单位长度内液体质量为 m ; A 为材料的粘弹性系数; E 为管道材料的弹性模量; L 为管道长度; A 为流通截面积; I 为管道的惯性矩。

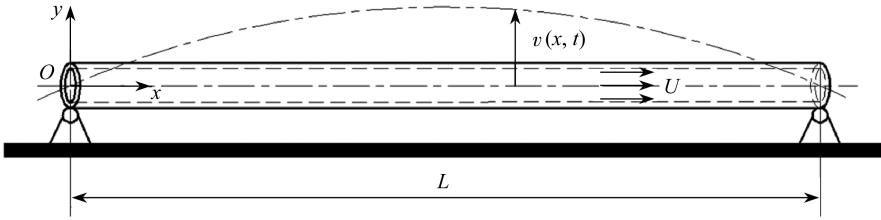


图 1 输液管示意图

Fig. 1 Diagram of the pipe conveying fluid

忽略非定常流的作用,利用 Newton(牛顿)第二定律,可以得到超临界流速的输液管横向振动控制方程:

$$\begin{aligned} \eta_{,\tau\tau} + 2M_r u \eta_{,\xi\tau} + u^2 \eta_{,\xi\xi} + \kappa^2 \hat{\eta}_k^{\pm''} \int_0^1 \hat{\eta}_k^{\pm''} \eta d\xi - \\ \left[P + \frac{\kappa^2}{2} \int_0^1 (\hat{\eta}_k^{\pm'})^2 d\xi \right] \eta_{,\xi\xi} + \eta_{,\xi\xi\xi\xi} + \alpha \eta_{,\tau\xi\xi\xi} = \\ f \omega^2 \sin(\omega\tau) + \frac{\kappa^2}{2} \left(\hat{\eta}_k^{\pm''} \int_0^1 \eta_{,\xi}^2 d\xi - 2\eta_{,\xi\xi} \int_0^1 \hat{\eta}_k^{\pm''} \eta d\xi + \eta_{,\xi\xi} \int_0^1 \eta_{,\xi}^2 d\xi \right) + \\ \alpha \kappa^2 \hat{\eta}_k^{\pm''} \int_0^1 \hat{\eta}_k^{\pm'} \eta_{,\xi\tau} d\xi + \\ \alpha \kappa^2 \left(\eta_{,\xi\xi} \int_0^1 \hat{\eta}_k^{\pm'} \eta_{,\xi\tau} d\xi + \hat{\eta}_k^{\pm''} \int_0^1 \eta_{,\xi} \eta_{,\xi\tau} d\xi + \eta_{,\xi\xi} \int_0^1 \eta_{,\xi} \eta_{,\xi\tau} d\xi \right), \end{aligned} \quad (1)$$

无量纲系数为

$$\begin{cases} \eta = \frac{v}{L}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{M+m}}, \quad u = LU \sqrt{\frac{M}{EI}}, \quad P = \frac{pL^2}{EI}, \quad \kappa = \sqrt{\frac{AL^2}{I}}, \\ \alpha = \frac{\Lambda}{L^2} \sqrt{\frac{I}{(M+m)E}}, \quad M_r = \sqrt{\frac{M}{M+m}}, \quad f = \frac{B}{L}, \quad \omega = \Omega L^2 \sqrt{\frac{M+m}{EI}}, \end{cases} \quad (2)$$

式中, B 和 Ω 分别为外部激励的幅值和频率,带标记的 η 即为第一阶非平凡超临界静平衡位形,其表达式为

$$\hat{\eta}_k^{\pm}(\xi) = \pm \frac{2}{k\pi\kappa} \sqrt{u^2 - u_k^2} \sin(k\pi\xi) \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (3)$$

u_k 为第 k 阶临界速度,其表达式为

$$u_k = \sqrt{P + (k\pi)^2}. \quad (4)$$

由于只有第一阶非平凡静平衡位形是稳定的,且屈曲位形上下对称,因此只需要研究第一阶正非平凡静平衡位形上的振动即可。

采用 Galerkin 截断法^[13],对连续控制方程(1)进行两阶截断,考虑两端简支边界条件,最终得到截断的方程为

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 - G\dot{q}_2 + k_{11}q_1 = h\sin(\omega\tau) + \alpha\alpha_{11}\dot{q}_1 + \alpha_{12}(3q_1^2 + 4q_2^2) + \alpha_{13}q_1(q_1^2 + 4q_2^2) + \\ \alpha\alpha_{14}(2q_1\dot{q}_1 + 4q_2\dot{q}_2) + \alpha\alpha_{15}q_1(q_1\dot{q}_1 + 4q_2\dot{q}_2), \\ \ddot{q}_2 + G\dot{q}_1 + k_{21}q_2 = 16\alpha\alpha_{21}\dot{q}_2 + 8\alpha_{12}q_1q_2 + 4\alpha_{13}q_2(q_1^2 + 4q_2^2) + \\ 4\alpha\alpha_{14}q_2\dot{q}_1 + 4\alpha\alpha_{15}q_2(q_1\dot{q}_1 + 4q_2\dot{q}_2), \end{cases} \quad (5)$$

式中,截断系数由 Galerkin 截断计算得出.

2 主共振的多尺度法分析

由于控制方程中同时包含平方非线性以及立方非线性,并且 3:1 内共振必须在立方非线性的作用下才能实现,因此按照多尺度方法^[14-15],引入两个广义坐标的三阶展开摄动解以及 3 个时间尺度:

$$\begin{cases} q_1 = q_{10}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon q_{11}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 q_{12}(T_0, T_1, T_2), \\ q_2 = q_{20}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon q_{21}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 q_{22}(T_0, T_1, T_2). \end{cases} \quad (6)$$

同时,为使阻尼、非线性项以及外激励出现在同一个方程中,令 $\alpha \leftrightarrow \varepsilon^2 \alpha$ 以及 $f \leftrightarrow \varepsilon^3 f$. 将以上变换都代入方程(5)中,提取等式两边小参数系数,最终得到

ε^0 项系数:

$$\begin{cases} D_0^2 q_{10} - GD_0 q_{20} + k_{11} q_{10} = 0, \\ D_0^2 q_{20} - GD_0 q_{10} + k_{21} q_{20} = 0; \end{cases} \quad (7)$$

ε^1 项系数:

$$\begin{cases} D_0^2 q_{11} - GD_0 q_{21} + k_{11} q_{11} = 3\alpha_{12} q_{10}^2 + 4\alpha_{12} q_{20}^2 + GD_1 q_{20} - 2D_0 D_1 q_{10}, \\ D_0^2 q_{21} + GD_0 q_{11} + k_{21} q_{21} = 8\alpha_{12} q_{10} q_{20} - GD_1 q_{10} - 2D_0 D_1 q_{20}; \end{cases} \quad (8)$$

ε^2 项系数:

$$\begin{cases} D_0^2 q_{12} - GD_0 q_{22} + k_{11} q_{12} = h\sin(\omega t) + \alpha_{13} q_{10}^3 + 4\alpha_{13} q_{10} q_{20}^2 + \alpha\alpha_{11} D_0 q_{10} + \\ GD_1 q_{21} + GD_2 q_{20} - 2D_0 D_1 q_{11} - 2D_0 D_2 q_{10} - \\ D_1^2 q_{10} + 6\alpha_{12} q_{10} q_{11} + 8\alpha_{12} q_{20} q_{21}, \\ D_0^2 q_{22} + GD_0 q_{12} + k_{21} q_{22} = 8\alpha_{12} q_{10} q_{21} + 8\alpha_{12} q_{11} q_{20} + 4\alpha_{13} q_{20} q_{10}^2 - 2D_0 D_1 q_{21} - \\ 2D_0 D_1 q_{20} - D_1^2 q_{20} + 16\alpha_{13} q_{20}^3 + 16\alpha\alpha_{21} D_0 q_{20} - GD_2 q_{10} - GD_1 q_{11}. \end{cases} \quad (9)$$

方程(7)中考虑了系统的线性恢复力,方程(8)中考虑了系统的平方非线性恢复力,方程(9)中考虑了系统的立方非线性恢复力以及线性阻尼力.由于一般系统中阻尼系数较小,只考虑线性阻尼力的解已经足够精确.

方程(7)为齐次线性常微分方程,其解为

$$\begin{cases} q_{10} = A_1(T_1, T_2) \exp(i\omega_1 T_0) + A_2(T_1, T_2) \exp(i\omega_2 T_0) + cc, \\ q_{20} = p_1 A_1(T_1, T_2) \exp(i\omega_1 T_0) + p_2 A_2(T_1, T_2) \exp(i\omega_2 T_0) + cc, \end{cases} \quad (10)$$

式中, cc 为前面各项的共轭复数, A_n 为待定函数,表征响应的幅值以及相角, p_n 用待定系数方法可以求得.

将解(10)代入方程(8)中,消去长期项得到 $D_1 A_n = 0$. 方程(8)的特解具有如下形式:

$$\begin{cases} q_{11} = r_{11} e^{2i\omega_1 T_0} + r_{12} e^{2i\omega_2 T_0} + r_{13} e^{i\omega_1 T_0 + i\omega_2 T_0} + r_{14} e^{i\omega_2 T_0 - i\omega_1 T_0} + cc + r_{15}, \\ q_{21} = r_{21} e^{2i\omega_1 T_0} + r_{22} e^{2i\omega_2 T_0} + r_{23} e^{i\omega_1 T_0 + i\omega_2 T_0} + r_{24} e^{i\omega_2 T_0 - i\omega_1 T_0} + cc + r_{25}, \end{cases} \quad (11)$$

式中各系数可以通过待定系数法求得。

2.1 一阶主共振

为表征前两阶固有频率以及外激励频率与第一阶固有频率间的可公度关系,引入解谐因子 σ_1 与 σ_2 ;用解谐参数 σ_1 表示第二阶固有频率 ω_2 接近 $3\omega_1$ 的程度;用解谐参数 σ_2 表示外激励频率 ω 接近第一阶固有频率 ω_1 的程度:

$$\omega_2 = 3\omega_1 + \varepsilon^2 \sigma_1, \quad \omega = \omega_1 + \varepsilon^2 \sigma_2. \tag{12}$$

利用陀螺系统可解条件的方法,假设方程(9)的解为

$$\begin{cases} q_{12} = P_{11} \exp(i\omega_1 T_0) + P_{12} \exp(i\omega_2 T_0), \\ q_{22} = P_{21} \exp(i\omega_1 T_0) + P_{22} \exp(i\omega_2 T_0). \end{cases} \tag{13}$$

将以上3个方程的解代入方程(9)中,并利用式(12)的解谐关系,分别提取等式两端 $\exp(i\omega_1 T_0)$ 和 $\exp(i\omega_2 T_0)$ 的系数,同时引入待定函数 A_n 的极坐标表达式:

$$A_n(T_2) = \frac{1}{2} a_n(T_2) \exp [i\theta_n(T_2)], \tag{14}$$

式中, a_n 为响应幅值, θ_n 为响应相角。

利用陀螺系统的可解条件,代入数值 $M_r = 0.5, P = -5, \kappa = 4, \alpha = 0.0001, f = 0.00005$;并消去相角,即可得到耦合的幅频响应方程;同时,利用 Routh-Hurwitz (劳斯-霍尔威兹)判据得到响应的稳定边界。

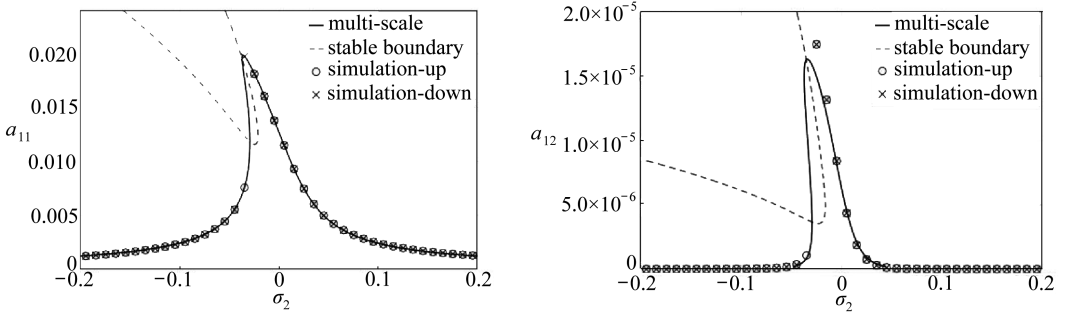


图2 第一阶振型上前两阶模态幅频响应曲线

Fig. 2 Amplitude-frequency curves of q_1 for the first 2 modes

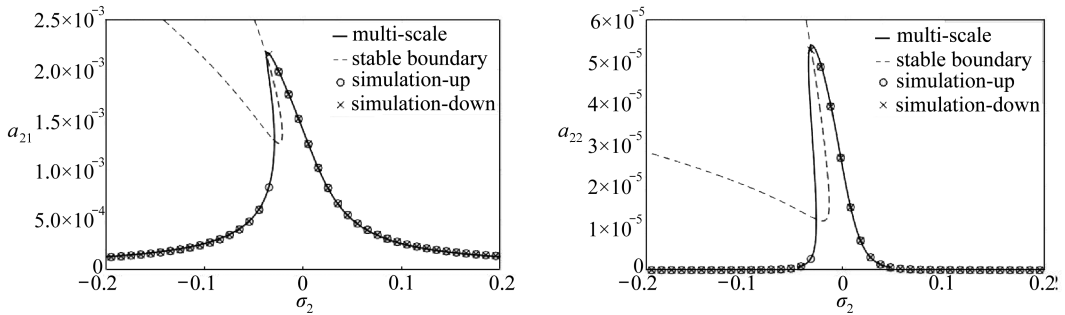


图3 第二阶振型上前两阶模态幅频响应曲线

Fig. 3 Amplitude-frequency curves of q_2 for the first 2 modes

图2以及图3中纵坐标 a_{11} 以及 a_{12} 分别代表第一阶振型上前两阶模态上的振幅, a_{21} 以及 a_{22} 代表第二阶振型在前两阶模态上的振幅,且

$$a_{11} = a_1, \quad a_{12} = a_2, \quad a_{21} = p_1 a_1, \quad a_{22} = p_2 a_2. \tag{15}$$

此外,虚线代表稳定边界,边界内区域为不稳定区域,边界外区域为稳定区域,实线代表多尺度法得到的近似解析解,圆圈以及叉号分别代表利用 Runge-Kutta(龙格-库塔)法^[16]仿真正扫频以及反扫频的结果,仿真结果验证了近似解析解的有效性以及正确性.从幅频响应曲线可以看出,在一阶主共振时,外激励引起了系统非常大的响应,并且系统的响应呈现软特性.由于立方非线性作用,外激励激起了3倍一阶频率的谐波偶响应,由于此时第二阶固有频率恰好为3倍的一阶固有频率,谐波偶响应又激起了第二阶模态上的主共振响应,能量向第二阶模态转移.

2.2 二阶主共振

为表征前两阶固有频率以及外激励频率与第二阶固有频率间的可公度关系,引入解谐因子 σ_1 与 σ_2 ;用解谐参数 σ_1 表示第二阶固有频率 ω_2 接近 $3\omega_1$ 的程度;用解谐参数 σ_2 表示外激励频率 ω 接近第二阶固有频率 ω_2 的程度:

$$\omega_2 = 3\omega_1 + \varepsilon^2 \sigma_1, \quad \omega = \omega_2 + \varepsilon^2 \sigma_2. \quad (16)$$

类似于 2.1 小节,求出此时幅频响应曲线及稳定边界.与一阶主共振时的双模态响应不同,此时,在内共振条件下系统仅有第二阶模态上的响应.

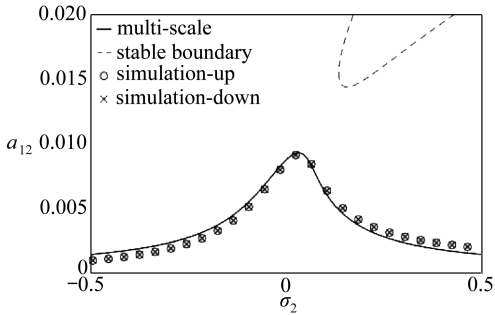


图 4 一阶振型第二阶模态幅频响应图

Fig. 4 Amplitude-frequency curves of q_1 for mode 2

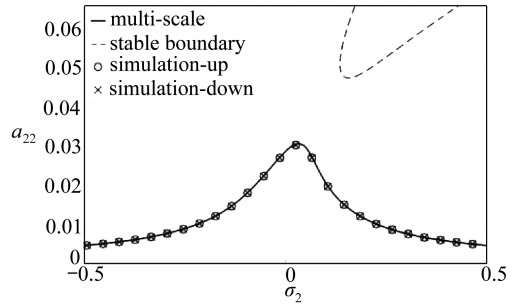


图 5 二阶振型第二阶模态幅频响应

Fig. 5 Amplitude-frequency curves of q_2 for mode 2

图 4 以及图 5 是二阶主共振时的幅频响应,图中纵坐标 a_{12} 以及 a_{22} 分别代表第一阶振型以及第二阶振型在第二阶模态上的振幅,且

$$a_{12} = a_2, \quad a_{22} = p_2 a_2. \quad (17)$$

实线代表解析解,虚线代表稳定边界,边界内为不稳定区域,边界外为稳定区域,此时响应曲线上所有的点都是稳定的.仿真结果证实了近似解析解的有效性以及正确性.此外,二阶主共振响应呈现硬特性,这与一阶主共振的软特性有所区别.

3 结 论

输液管是典型的陀螺系统,在解析过程中,每个振形实际上都耦合了多个模态.本文用两个振型耦合两个模态来近似描述连续方程的解,得到了令人满意的结果.此外,在超临界状态下,控制方程中出现了平方非线性,系统响应特性变得不可预测.文中利用三阶展开的摄动解综合考虑了平方非线性以及立方非线性,发现该系统在一阶主共振时呈现软特性,而在二阶主共振时呈现硬特性.一阶主共振时,3:1 内共振发挥了模态耦合的作用,外部输入的能量传递到了第二阶模态上.

参考文献(References):

- [1] Païdoussis M P. Flow induced instability of cylindrical structures[J]. *ASME Applied Mechanics Reviews*, 1987, **40**(2): 163-175.
- [2] 黄玉盈, 邹时智, 钱勤, 徐鉴, 李琳. 输液管的非线性振动、分叉与混沌——现状与展望[J]. 力学进展, 1998, **28**(1): 30-42.(HUANG Yu-ying, ZOU Shi-zhi, QIAN Qin, XU Jian, LI Lin. Advances and trends of nonlinear dynamics of pipes conveying fluid[J]. *Advances in Mechanics*, 1998, **28**(1): 30-42.(in Chinese))
- [3] 徐鉴, 杨前彪. 输液管模型及其非线性动力学近期研究进展[J]. 力学进展, 2004, **34**(2): 182-194.(XU Jian, YANG Qian-biao. Recent development on models and nonlinear dynamics of pipes conveying fluid[J]. *Advances in Mechanics*, 2004, **34**(2): 182-194.(in Chinese))
- [4] 徐鉴, 杨前彪. 流体诱发水平悬臂输液管的内共振和模态转换(I)[J]. 应用数学和力学, 2006, **27**(7): 819-824.(XU Jian, YANG Qian-biao. Flow-induced internal resonances and mode exchange in horizontal cantilevered pipe conveying fluid (I)[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, **27**(7): 819-824.(in Chinese))
- [5] 徐鉴, 杨前彪. 流体诱发水平悬臂输液管的内共振和模态转换(II)[J]. 应用数学和力学, 2006, **27**(7): 825-832.(XU Jian, YANG Qian-biao. Flow-induced internal resonances and mode exchange in horizontal cantilevered pipe conveying fluid (II)[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, **27**(7): 825-832.(in Chinese))
- [6] Païdoussis M P, Issid N T. Dynamic stability of pipes conveying fluid[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1974, **33**(3): 267-294.
- [7] Nayfeh A H, Mook D T. *Nonlinear Oscillations*[M]. New York: Wiley, 1979.
- [8] 席红敏, 张伟, 姚明辉. 变流速输液管的周期和混沌运动[J]. 动力学与控制学报, 2008, **6**(3): 243-246.(XI Hong-min, ZHANG Wei, YAO Ming-hui. Periodic and chaotic oscillations of the fluid conveying pipes with pulse fluid[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, **6**(3): 243-246.(in Chinese))
- [9] ZHANG Yan-lei, CHEN Li-qun. Internal resonance of pipes conveying fluid in the supercritical regime[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012, **67**(2): 1505-1514.
- [10] CHEN Li-qun, ZHANG Yan-lei. Multi-scale analysis on nonlinear gyroscopic systems with multi-degree-of-freedoms[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, **333**(19): 4711-4723.
- [11] CHEN Li-qun, ZHANG Yan-lei, ZHANG Guo-ce, DING Hu. Evolution of the double-jumping in pipes conveying fluid flowing at the supercritical speed[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2014, **58**: 11-21.
- [12] 黄慧春, 张艳雷, 陈立群. 受迫振动的超临界输液管 Galerkin 数值模拟[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(10): 1100-1106.(HUANG Hui-chun, ZHANG Yan-lei, CHEN Li-qun. A Galerkin numerical method for the pipe conveying supercritical fluid under forced vibration[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(10): 1100-1106.(in Chinese))
- [13] 张国策, 丁虎, 陈立群. 复模态分析超临界轴向运动梁横向非线性振动[J]. 动力学与控制学报, 2015, **13**(4): 283-285.(ZHANG Guo-ce, DING Hu, CHEN Li-qun. Complex modal analysis of transversally non-linear vibration for supercritically axially moving beams[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2015, **13**(4): 283-285.(in Chinese))
- [14] 熊柳杨, 张国策, 丁虎, 陈立群. 黏弹性屈曲梁非线性内共振稳态周期响应[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(11): 1188-1196.(XIONG Liu-yang, ZHANG Guo-ce, DING Hu, CHEN Li-qun. Steady-state periodic responses of a viscoelastic buckled beam in nonlinear internal resonance

- [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(11): 1188-1196. (in Chinese))
- [15] 赵健, 张国策, 陈立群. 磁振子压电能量采集器的多尺度分析[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(8): 805-813. (ZHAO Jian, ZHANG Guo-ce, CHEN Li-qun. Multi-scale analysis of piezoelectric energy harvesters with magnetic oscillators [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(8): 805-813. (in Chinese))
- [16] 王珺, 赵环迪, 陈力奋. 预变形对非线性结构响应特征的影响[J]. 动力学与控制学报, 2015, **13**(3): 188-193. (WANG Jun, ZHAO Huan-di, CHEN Li-fen. Effects of the initial deformation on the dynamic response of local nonlinear systems [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2015, **13**(3): 188-193. (in Chinese))

Forced Vibration Responses of Supercritical Fluid-Conveying Pipes in 3:1 Internal Resonance

MAO Xiao-ye¹, DING Hu¹, CHEN Li-qun^{1,2}

(1. *Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P.R.China;*

2. *Department of Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200444, P.R.China*)

(Contributed by CHEN Li-qun, M. AMM Editorial Board)

Abstract: The multi-scale method was used to investigate the vibration responses of supercritical fluid-conveying pipes in the 3:1 internal resonance condition. In view of the buckling pipe shape under the supercritical flow velocity, the partial differential-integral equation for the nonlinear vibration of continuous bodies was established and then discretized into a set of ordinary differential equations with the Galerkin truncation method. Both quadratic and cubic nonlinearities of the MDOF system were taken into consideration, and the high-order multi-scale method was applied to build the solvable conditions. 2 natural modes with 2 vibration shapes were introduced to express the approximate solution. The 3:1 internal resonance causes the first 2 modes couple in the primary resonance, where the vibration response of the nonlinear system is soft. But in the secondary resonance the vibration response of the nonlinear system is hard. The quadratic nonlinearity makes the system response properties unpredictable. The analytical solutions are perfectly consistent with the numerical simulation results.

Key words: pipe conveying fluid; internal resonance; supercritical; multi-scale method; nonlinear vibration

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (Key Program) (11232009); The National Natural Science Foundation of China (11372171; 11422214)

引用本文/Cite this paper:

毛晓晔, 丁虎, 陈立群. 3:1 内共振下超临界输液管受迫振动响应[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(4): 345-351.

MAO Xiao-ye, DING Hu, CHEN Li-qun. Forced vibration responses of supercritical fluid-conveying pipes in 3:1 internal resonance[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(4): 345-351.