

圆板在局部 Gauss 温度场作用下的响应分析*

龙连春, 张超亚

(北京工业大学 机械工程与应用电子技术学院, 北京 100124)

摘要: 基于薄板热弯曲理论,推导了圆板在 Gauss(高斯)温度场作用下的挠度和热应力解析表达式,分析了边界条件和局部温度参数对圆板挠度和热应力的影响,为局部温度变化薄板结构的热力学分析提供理论依据.研究表明:圆板中心处的挠度和压应力有最大值;在热影响区内,圆板内一点的挠度随着该点到板中心距离的增大呈 Gauss 型减小趋势;在热影响区外,圆板挠度的变化趋势与圆板边界约束形式和辐照因子有关,辐照因子越大,边界简支圆板挠度越先呈线性减小趋势;圆板挠度的解析解与有限元解一致.在热影响区内,圆板内一点的热应力随着该点到板中心距离的增大呈 Gauss 型减小趋势,两种边界约束圆板的热应力变化趋势相似;在热影响区外,圆板热应力的变化趋势与圆板边界约束形式和辐照因子有关.

关键词: 圆板; 边界条件; 热应力; 热变形; 局部温度变化

中图分类号: TB125; O343.6 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2016.04.007

引 言

薄板结构常常由于局部温度变化产生热变形和热应力.当薄板结构局部加热或受到辐照时,结构内会形成分布不均匀的空间温度场,温度梯度将引起结构热力学状态的改变,使结构产生热应力和热应变.

强激光辐照是使板壳结构产生局部升温的有效方法,当薄壁结构局部受到激光辐照时,结构表面温度场分布主要取决于光束的光强分布,厚度方向温度场分布则取决于材料的热传导性质^[1-5].前人成果有在已知温度场分布的基础上,根据热弹性基本理论,对自由边界条件下的平面问题^[6-8]和空间问题^[8-12]进行热变形和热应力研究求解.但边界条件会影响结构热变形和热应力,本文探讨不同边界条件下结构局部温度变化引起的热变形和热应力问题.

本文假设结构为局部加热,忽略温度对材料性能的影响,考虑薄板结构在面内和厚度方向均有温度梯度的情形.基于薄板热弯曲理论,推导出了具有轴对称 Gauss 型分布温度场作用的圆板在不同边界条件下的挠度和应力分量表达式,分析了边界约束条件和局部温度参数对挠度和热应力的影响.

* 收稿日期: 2015-11-11; 修订日期: 2016-01-04

基金项目: 国家自然科学基金(11272020)

作者简介: 龙连春(1963—),男,教授,博士,硕士生导师(通讯作者. E-mail: longlc@bjut.edu.cn);
张超亚(1990—),男,硕士生(E-mail: chaoyz_1990@sina.com).

1 局部升温薄板结构变形与应力的解析解

1.1 局部升温薄板结构问题描述

设圆板半径为 R , 板厚为 h ($h \ll R$), 光斑半径为 r_0 (Gauss 光束的束腰半径), 强度为 $I(r)$ 的 Gauss 激光束辐照于圆板表面, 如图 1 所示. Gauss 激光辐照时将产生分布不均匀的空间温度场, 温度场使结构产生热变形与热应力.

针对图 1 的圆板结构, 空间位置采用柱坐标 r, θ, z 表示, 由于其对称性, 温度、热应力等只沿径向 r 和轴向 z 变化, 而沿环向 θ 无变化, 因此空间问题可简化为二维轴对称问题.

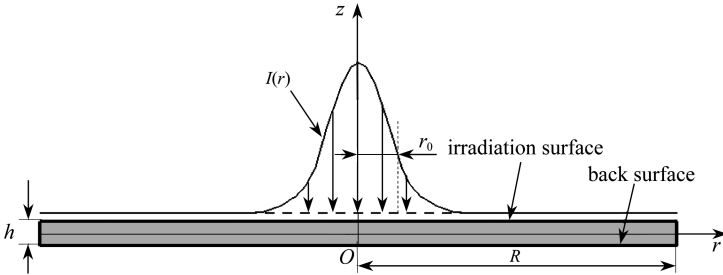


图 1 Gauss 激光辐照圆板模型

Fig. 1 The model of a circular plate irradiated by Gauss laser

1.2 局部 Gauss 温度场中圆板结构的变形与热应力

圆板无垂向载荷时, 以挠度 w 表示的热弹性基本微分方程为^[13]

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = - \frac{1}{1 - \mu} \nabla^2 M_T(r), \quad (1)$$

其中, $D = Eh^3 / (12(1 - \mu^2))$ 为圆板的弯曲刚度, Laplace (拉普拉斯) 算子

$$\nabla^2 = \frac{d}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr},$$

h 为圆板的厚度, $M_T(r) = \alpha E \int_{-h/2}^{h/2} T_z dz$ 为温度变化产生的合力矩, E, μ, α 分别为材料的弹性模量、Poisson (泊松) 比及热膨胀系数, $T = T(r, z)$ 为圆板中任一点的温度变化. 则式(1)可写为

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dw}{dr} \right) + \frac{M_T(r)}{D(1 - \mu)} \right] \right\} = 0. \quad (2)$$

式(2)的通解为

$$w(r) = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 - \frac{1}{D(1 - \mu)} \int_0^r \frac{1}{r} \left[\int_0^r r M_T(r) dr \right] dr. \quad (3)$$

由于在实心圆板中心处挠度及弯矩均为有限值, 故 C_1, C_2 皆为 0, 所以式(3)可化简为

$$w(r) = C_3 r^2 + C_4 - \frac{1}{D(1 - \mu)} \int_0^r \frac{1}{r} \left[\int_0^r r M_T(r) dr \right] dr. \quad (4)$$

以挠度 w 表示的应力分量表达式为

$$\begin{cases} \sigma_r = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left[\frac{d^2w(r)}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw(r)}{dr} \right] - \frac{\alpha ET(r,z)}{1-\mu}, \\ \sigma_\theta = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left[\mu \frac{d^2w(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw(r)}{dr} \right] - \frac{\alpha ET(r,z)}{1-\mu}, \\ \sigma_{r\theta} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

式(4)中的常数 C_3, C_4 可由边界条件确定,即可分别求出周边固支、周边简支、周边自由圆板的挠度和应力分量表达式:

1) 对于 $r = R$ 处周边固支圆板,如图 2(a)所示,其边界条件为

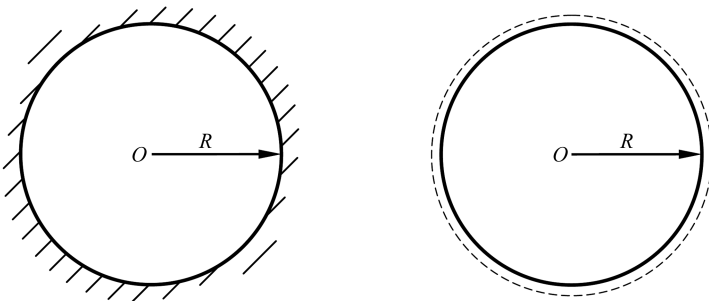
$$w(r) \Big|_{r=R} = 0, \quad \frac{dw(r)}{dr} \Big|_{r=R} = 0. \quad (6)$$

2) 对于 $r = R$ 处周边简支圆板,如图 2(b)所示,其边界条件为

$$w(r) \Big|_{r=R} = 0, \quad \left[\frac{d^2w(r)}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw(r)}{dr} \right] \Big|_{r=R} = -\frac{M_T(r)}{D(1-\mu)}. \quad (7)$$

3) 在 $r = R$ 处周边自由圆板的边界条件为

$$\begin{cases} \left[\frac{d^2w(r)}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw(r)}{dr} \right] \Big|_{r=R} = -\frac{M_T(r)}{D(1-\mu)}, \\ \left[D \frac{d(\nabla^2 w(r))}{dr} + \frac{1}{1-\mu} \frac{dM_T(r)}{dr} \right] \Big|_{r=R} = 0. \end{cases} \quad (8)$$



(a) 周边固支

(b) 周边简支

(a) The clamped boundary condition

(b) The simple boundary condition

图2 边界约束圆板

Fig. 2 The boundary constraints on the circular plate

当局部 Gauss 激光辐照初始温度为 0°C 的圆板时,某一时刻产生的不均匀分布温度场为

$$T(r,z) = \frac{A}{C\sqrt{2\pi}} e^{Bz-r^2/(2C^2)}, \quad (9)$$

式中, A, B, C 为常数,圆板中面中心处的温度为 $A/(\sqrt{2\pi}C)$, Gauss 光斑半径为 $\sqrt{2}C$, 温度在厚度方向上的渗透率为 B . 由此可求得温度变化产生的合力矩为

$$M_T(r) = \alpha E \int_{-h/2}^{h/2} T(r,z) z dz = \frac{\alpha EA}{\sqrt{2\pi}C} e^{-r^2/(2C^2)} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} e^{Bz} z dz = H e^{-r^2/(2C^2)}, \quad (10)$$

式中

$$H = \frac{\alpha EA}{2\sqrt{2\pi}C} \cdot \frac{e^{-Bh/2}(Bh+2) + e^{Bh/2}(Bh-2)}{B^2}.$$

将式(4)代入式(6),式(9)与式(10)代入式(4)和式(5),可求得周边固支圆板的挠度和热应力

$$w(r) = \frac{-HC^2}{D(1-\mu)} \int_r^R \frac{1}{r} (e^{-r^2/(2C^2)} - 1) dr + \frac{HC^2}{2D(1-\mu)} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) (e^{-R^2/(2C^2)} - 1), \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{He^{-r^2/(2C^2)}}{D(1-\mu)} + \frac{HC^2}{D} \cdot \frac{e^{-r^2/(2C^2)} - 1}{r^2} + \frac{HC^2(e^{-R^2/(2C^2)} - 1)(1+\mu)}{R^2D(1-\mu)} \right) - \frac{\alpha EAe^{Bz-r^2/(2C^2)}}{(1-\mu)C\sqrt{2\pi}}, \\ \sigma_\theta &= \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\mu He^{-r^2/(2C^2)}}{D(1-\mu)} - \frac{HC^2}{D} \cdot \frac{e^{-r^2/(2C^2)} - 1}{r^2} + \frac{HC^2(e^{-R^2/(2C^2)} - 1)(1+\mu)}{R^2D(1-\mu)} \right) - \frac{\alpha EAe^{Bz-r^2/(2C^2)}}{(1-\mu)C\sqrt{2\pi}}. \end{aligned} \right. \quad (12)$$

将式(4)代入式(7),式(9)与式(10)代入式(4)和式(5),可求得周边简支圆板的挠度和热应力

$$w(r) = \frac{-HC^2}{D(1-\mu)} \int_r^R \frac{1}{r} (e^{-r^2/(2C^2)} - 1) dr - \frac{HC^2}{2D(1+\mu)} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) (e^{-R^2/(2C^2)} - 1), \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{He^{-r^2/(2C^2)}}{D(1-\mu)} + \frac{HC^2}{D} \cdot \frac{e^{-r^2/(2C^2)} - 1}{r^2} - \frac{HC^2(e^{-R^2/(2C^2)} - 1)}{R^2D} \right) - \frac{\alpha EAe^{Bz-r^2/(2C^2)}}{(1-\mu)C\sqrt{2\pi}}, \\ \sigma_\theta &= \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\mu He^{-r^2/(2C^2)}}{D(1-\mu)} - \frac{HC^2}{D} \cdot \frac{e^{-r^2/(2C^2)} - 1}{r^2} - \frac{HC^2(e^{-R^2/(2C^2)} - 1)}{R^2D} \right) - \frac{\alpha EAe^{Bz-r^2/(2C^2)}}{(1-\mu)C\sqrt{2\pi}}. \end{aligned} \right. \quad (14)$$

将式(4)代入式(8),式(9)与式(10)代入式(4)和式(5),可得周边自由圆板的挠度和热应力.因为在边界约束处简支圆板和自由圆板弯矩均为0,同时未考虑圆板中面面内位移的影响,所以周边简支圆板与周边自由圆板的挠度之间相差一个常数,两种边界下的圆板应力分量分别相同.

2 结果与讨论

2.1 边界条件对圆板挠度及热应力的影响

设圆形薄板半径 $R = 80 \text{ mm}$, 厚度 $h = 1 \text{ mm}$, 圆板材料 Poisson 比 $\mu = 0.3$, 弹性模量 $E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$, 热膨胀系数 $\alpha = 1.2 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. 为了方便表达, 设初始温度为 $0 \text{ }^\circ\text{C}$. Gauss 激光辐照圆

板时产生的温度场分布可由式(9)得到,当 $A = 1\ 600\ ^\circ\text{C}$, $B = 0.5$, $C = 8\ \text{mm}$ 时,圆板表面温度分布如图 3 所示。

在辐照区域,圆板在轴向和径向均产生了温度梯度,由于结构表面温度场分布主要取决于激光光束的光强分布,因此温度场在径向也呈 Gauss 分布形式;在非辐照区域,温度变化较小,尤其在距离辐照区的较远区域,可认为无温度变化。

2.1.1 圆板的挠度

将圆板参数和温度场分布参数分别代入式(11)和式(13),可分别求得边界固支圆板和边界简支圆板挠度的解析解,并与有限元解作比较,如图 4 所示。

图 4 中,边界固支圆板挠度的最大误差为 1.34%,边界简支圆板挠度最大误差为 1.15%,挠度的解析解和有限元解吻合度很高。在辐照中心处,Gauss 激光光强最大,温度变化等效载荷值最大,且距离约束边界处最远,两种边界条件下圆板在 $r = 0$ 处均有最大挠度。由于辐照区域的径向和轴向产生了较大的温度梯度,且圆板的变形在热弹性范围内,温度梯度决定圆板的弯曲方向,因此当圆板的一侧受到 Gauss 激光辐照时,圆板向辐照面膨胀弯曲。在热影响区内,圆板的热变形与 Gauss 激光光强空间分布有关,随着 r 的增加,两种边界约束圆板的挠度均呈 Gauss 型减小趋势。在热影响区外,因为板内无温度变化,作用在圆板上的温度变化等效载荷为 0,且简支圆板边界处的弯矩也为 0,所以边界简支圆板挠度随着 r 的增加呈线性减小的趋势;在板边界附近区域,由于固支圆板边界处的挠度和圆板弹性曲面的斜率均为 0,故边界固支圆板的挠度变化很小。边界约束形式影响圆板的变形程度,因此除了在 $r = R$ 处均为 0 外,其他位置简支圆板挠度均比固支圆板的大。

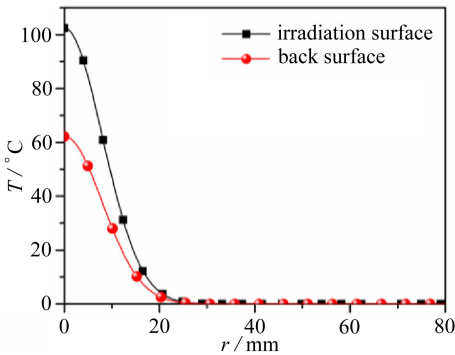


图 3 圆板表面温度分布

Fig. 3 The surface temperature distributions of the circular plate

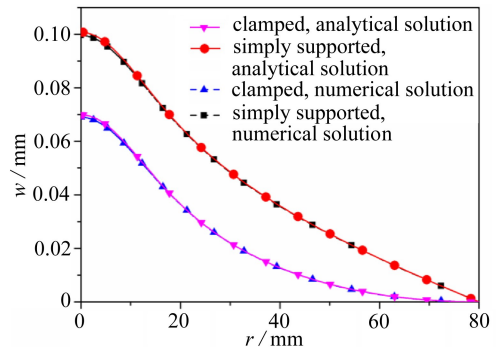


图 4 圆板的挠度

Fig. 4 The deflections of the circular plate

2.1.2 径向应力

将圆板参数和温度场分布参数分别代入式(12)和式(14),可分别求得边界固支圆板和边界简支圆板表面径向应力,如图 5 所示。

圆板受 Gauss 激光辐照时,温度变化引起圆板发生热膨胀,温度随着 r 的增加逐渐降低,高温区的热膨胀量大于低温区的,沿着径向的热膨胀受到了约束,因此热影响区内的径向应力表现为压应力。辐照面中心处的温度最高,热膨胀量最大,在 $r = 0$ 处径向压应力值最大。由式(12)和式(14)可知,径向应力的分布和温度场分布形式有关,因此随着 r 的增加,径向压应力呈 Gauss 型减小的趋势。

边界固支圆板辐照面的压应力值比边界简支圆板辐照面的压应力值大,边界固支圆板背

面的压应力值比边界简支圆板背面的压应力值小,边界固支圆板与边界简支圆板辐照面的径向应力之差的绝对值和二者背面的径向应力之差的绝对值相等.径向压应力随着离辐照面距离增加逐渐减小,在光斑边缘附近温度梯度 ∇T 有最大值,引起板厚度方向有较大的应力场变化,使板辐照背面被拉伸而产生径向拉应力,并在光斑边缘附近拉应力有最大值.在圆板边界附近,由于无温度变化,中面 $z = 0$ 的径向应力为 0,故在热弹性范围内,两种边界约束圆板的辐照面径向压应力和背面径向拉应力大小分别相等.

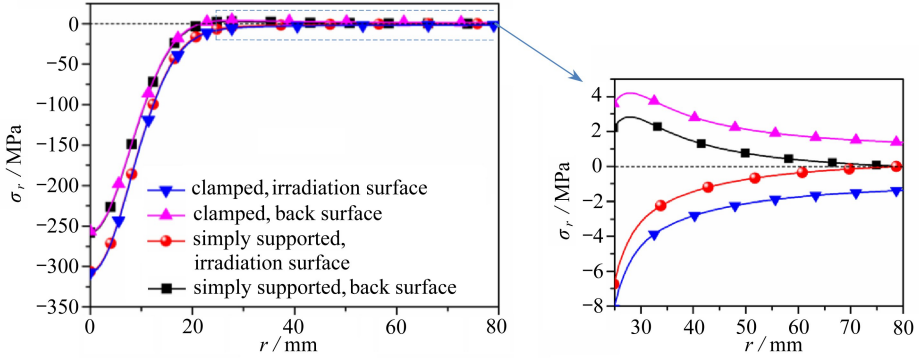


图 5 圆板表面径向应力

Fig. 5 The radial stresses in the circular plate surfaces

2.1.3 环向应力

将与上节相同的圆板参数和温度分布参数分别代入式(12)和式(14),可分别求得边界固支圆板和边界简支圆板环向应力,表面环向应力如图 6 所示.

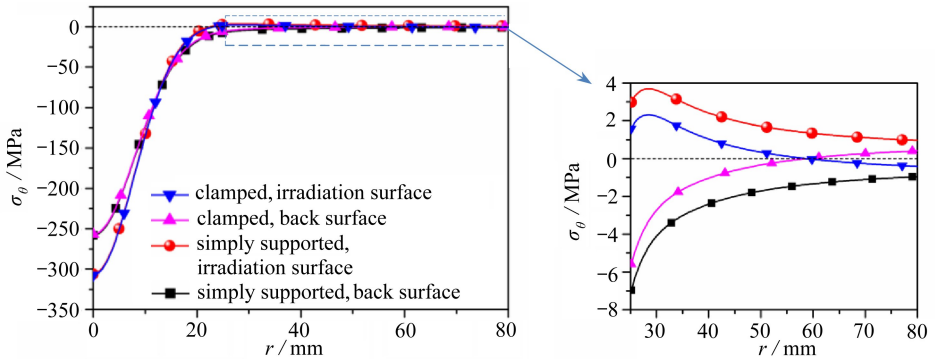


图 6 圆板表面环向应力

Fig. 6 The circumferential stresses in the circular plate surfaces

热影响区内两种边界约束圆板辐照面的环向压应力与背面环向压应力变化趋势分别相似,如图 6 所示.且在 $r = 0$ 处压应力值最大,随着 r 的增加,环向压应力呈 Gauss 型减小趋势.对于圆板中面 $z = 0$ 的环向应力,由式(12)和式(14)可得,边界简支圆板中面上的环向应力与边界固支圆板中面上的环向应力相等,故在热弹性范围内,边界固支圆板与边界简支圆板辐照面的环向应力之差的绝对值和二者背面的环向应力之差的绝对值相等.随着 r 的增加,两种边界约束圆板的辐照面环向压应力逐渐转变为拉应力,边界简支圆板辐照面环向压应力先于边界固支圆板辐照面转为拉应力,且两边界约束圆板辐照面环向拉应力在光斑边缘附近同一位置处达到最大值,然后随着 r 的增加,拉应力值逐渐减小.

在光斑边缘附近,厚度方向较大的温度梯度变化引起应力场的变化,靠近辐照面的区域的环向应力为拉应力,随着轴向深度的增加,环向拉应力逐渐减小,圆板底部的环向应力为压应力.在拉应力区域内,边界简支圆板辐照面环向拉应力大于边界固支圆板辐照面的环向拉应力,在圆板边界附近,边界固支圆板辐照面环向拉应力转为压应力,背面环向压应力转为拉应力,边界固支圆板辐照面环向压应力和背面环向拉应力大小相等,边界简支圆板辐照面环向拉应力和背面环向压应力大小相等.

2.2 局部温度参数对圆板挠度及热应力的影响

用辐照因子表示局部温度变化区域的大小,令辐照因子 $\lambda = C/R$,由于圆板温度场分布需具有局部性,故取 $\lambda \leq 0.3$.由温度变化表达式(9)得,当 $A = 1\ 600\ ^\circ\text{C}$, $B = 0.5$, $\lambda = 0.1, 0.2, 0.3$ 时,圆板表面温度分布如图 7 所示.

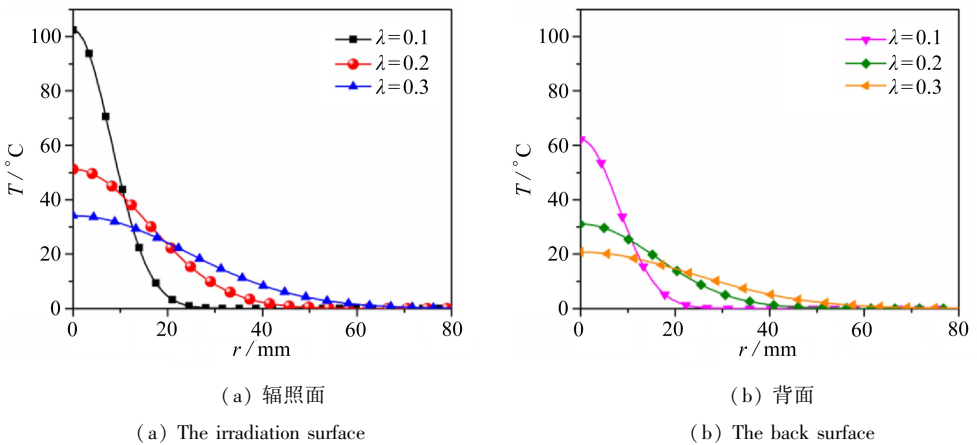


图 7 圆板表面温度分布

Fig. 7 The surface temperature distributions of the circular plate

由式(9)和式 $\lambda = C/R$ 可知,对平行于圆板中面的任一,当 λ 取不同的值时,不同的温度分布曲线和横轴所围成的面积相同,即 Gauss 激光总功率相同时,辐照因子越大,Gauss 激光光强越小,不同的光斑半径对应的温度场分布不同.在辐照区域,圆板在轴向和径向均产生温度梯度,温度场在径向呈 Gauss 分布形式,在距离辐照区较远的区域,可认为无温度变化.

2.2.1 圆板的挠度

将 $\lambda = C/R$,圆板参数和温度分布参数分别代入式(11)和式(13),可分别求得 λ 取不同值时边界固支圆板和边界简支圆板的挠度,如图 8 所示.

两种边界条件下圆板的挠度在 $r = 0$ 处均取得最大值,随着 r 的增加,挠度均逐渐减小,对于边界固支圆板,在热影响区内,挠度减小的速率随着 λ 的增加而减小,在板边界附近区域,挠度变化均很小;对于边界简支圆板,除了 $r = R$ 处的挠度为 0 外,其他位置的挠度随着 λ 的增加而增加, λ 越大,温度变化等效载荷在中面上的作用面积越大,等效载荷值的变化范围越小,因此挠度越先呈线性减小的趋势.

由式(11)、式(13)和式 $\lambda = C/R$ 可求得边界固支圆板挠度,边界简支圆板挠度分别与 r, λ 的关系式,在 $r = 0$ 处,挠度 w 与 λ 关系曲线如图 9 所示.

在 $r = 0$ 处,边界固支圆板的挠度随着 λ 的增加呈先增大后减小的趋势,挠度在 $\lambda = 0.21$ 附近取得最大值;边界简支圆板的挠度随着 λ 的增加逐渐增大.

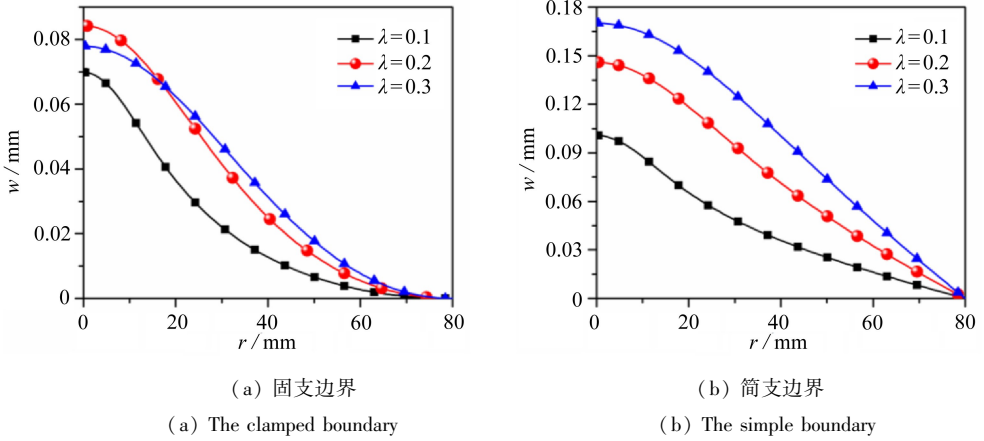


图 8 圆板的挠度

Fig. 8 The deflections of the circular plate

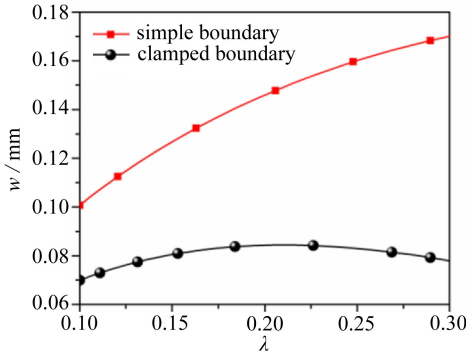


图 9 $r = 0$ 处挠度与 λ 关系曲线

Fig. 9 The curves of relationship between the plate deflection and λ for $r = 0$

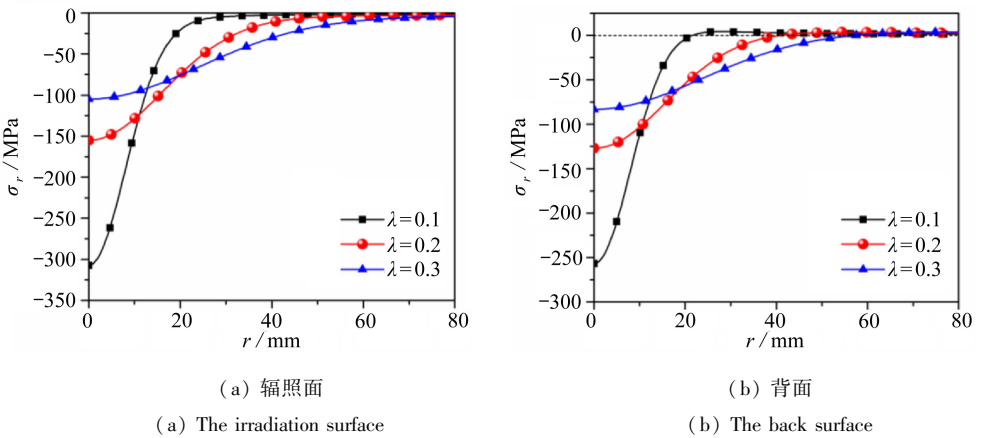


图 10 边界固支圆板表面径向应力

Fig. 10 The radial stresses in the clamped circular plate surfaces

2.2.2 径向应力

将 $\lambda = C/R$, 圆板参数和温度分布参数分别代入式(12), 可求得 λ 取不同值时边界固支圆板表面径向应力, 如图 10 所示.

边界固支圆板辐照面和背面径向压应力均在 $r = 0$ 处取得最大值,且压应力最大值随着 λ 的增加而减小.由式(12)可知, $\lambda = 0.1$ 时径向压应力的最大值约为 $\lambda = 0.2$ 时压应力的 2 倍, $\lambda = 0.3$ 时压应力的 3 倍.辐照面径向应力为压应力,在热影响区内,随着 r 的增加,径向压应力呈 Gauss 型减小的趋势;背面径向压应力均在温度变化刚趋于较小附近转为拉应力,拉应力区域随着 λ 的增加而减小;随着辐照因子 λ 的增加,热影响区的范围增大,边界约束作用越明显,因此在板边界附近,圆板辐照面和背面径向拉应力均随之增加.

将 $\lambda = C/R$ 和圆板参数分别代入式(14),可求得 λ 取不同值时边界简支圆板表面径向应力,如图 11 所示.

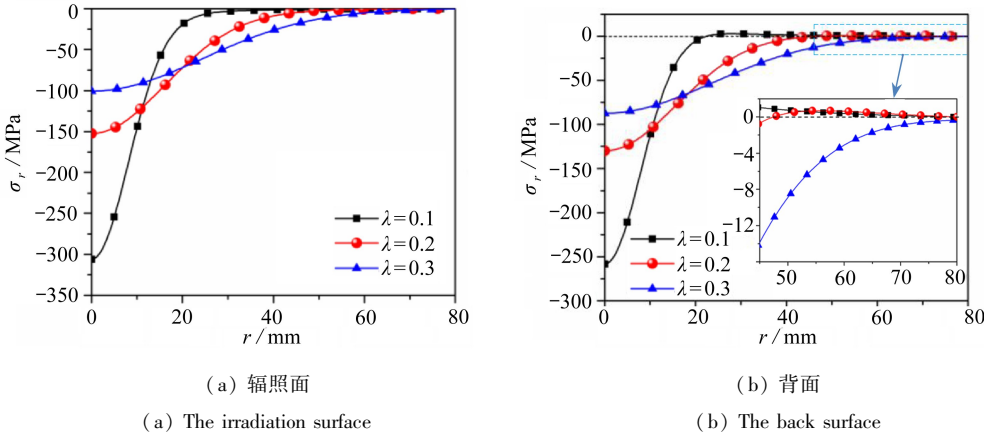


图 11 边界简支圆板表面径向应力

Fig. 11 The radial stresses in the simply supported circular plate surfaces

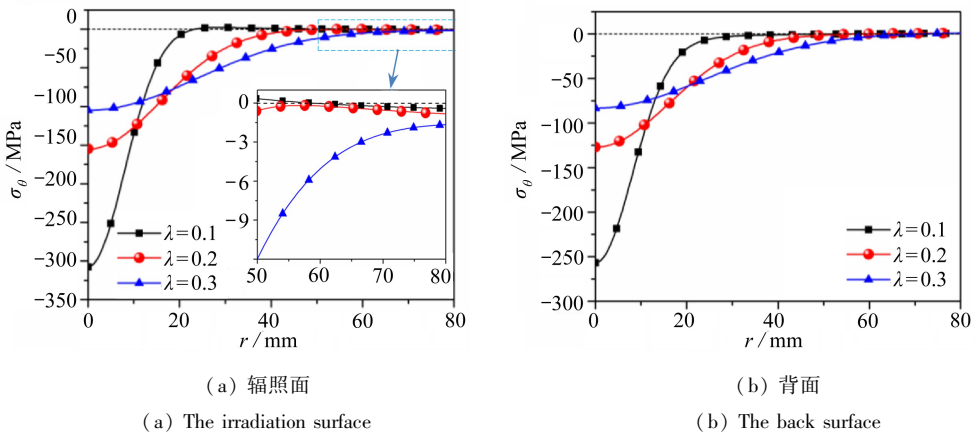


图 12 边界固支圆板表面环向应力

Fig. 12 The circumferential stresses in the clamped circular plate surfaces

边界简支圆板辐照面和背面径向压应力均在 $r = 0$ 处取得最大值,且压应力最大值随着 λ 的增加而减小.由式(14)可知, $\lambda = 0.1$ 时径向压应力的最大值约为 $\lambda = 0.2$ 时压应力的 2 倍, $\lambda = 0.3$ 时压应力的 3 倍.辐照面径向应力为压应力,在热影响区内,随着 r 的增加,径向压应力呈 Gauss 型减小的趋势;在圆板边界附近,辐照面径向压应力随着 λ 的增加而增加;当 $\lambda = 0.3$ 时,背面径向应力均为压应力,当 $\lambda = 0.1, 0.2$ 时,背面径向应力在热影响区外温度变化平缓已转为拉应力, $\lambda = 0.2$ 时拉应力区域小于 $\lambda = 0.1$ 时的拉应力区域,在圆板边界附近, $\lambda = 0.2$ 时的背面

径向应力大于 $\lambda = 0.1$ 时的径向应力。

2.2.3 环向应力

将 $\lambda = C/R$ 和圆板参数分别代入式(12), 可求得 λ 取不同值时边界固支圆板表面环向应力, 如图 12 所示。

边界固支圆板辐照面和背面环向压应力均在 $r = 0$ 处取得最大值, 且压应力最大值随着 λ 的增加而减小。由式(12) 可知, $\lambda = 0.1$ 时环向压应力的最大值约为 $\lambda = 0.2$ 时压应力的 2 倍, $\lambda = 0.3$ 时压应力的 3 倍。在热影响区内, 随着 r 的增加, 环向压应力呈 Gauss 型减小的趋势。当 $\lambda = 0.1$ 时, 随着 r 的增加, 辐照面环向应力先由压应力转为拉应力, 再转为压应力; 当 $\lambda = 0.2, 0.3$ 时, 辐照面环向应力均为压应力; λ 越小, 背面环向压应力越先于转为拉应力。在圆板边界附近, 辐照面环向压应力和背面环向拉应力均随着 λ 的增加而增加。

将 $\lambda = C/R$ 和圆板参数分别代入式(14), 可求得 λ 取不同值时边界简支圆板表面环向应力, 如图 13 所示。

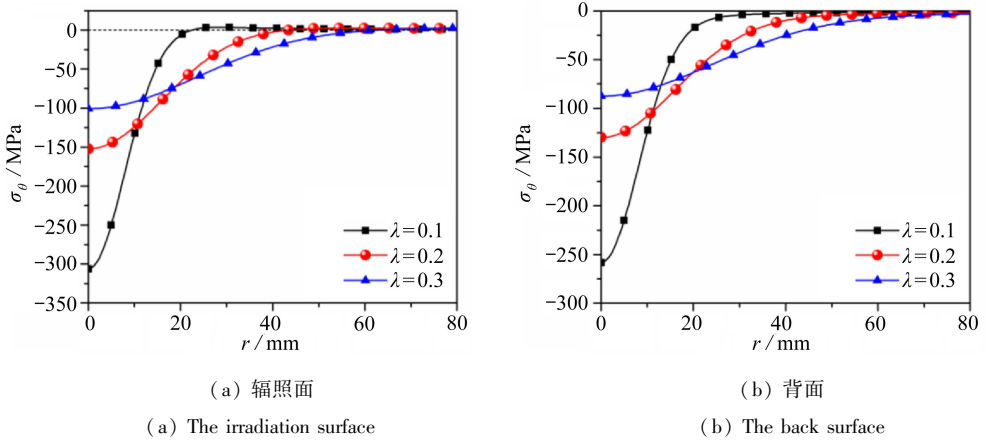


图 13 边界简支圆板表面环向应力

Fig. 13 The circumferential stresses in the simply supported circular plate surfaces

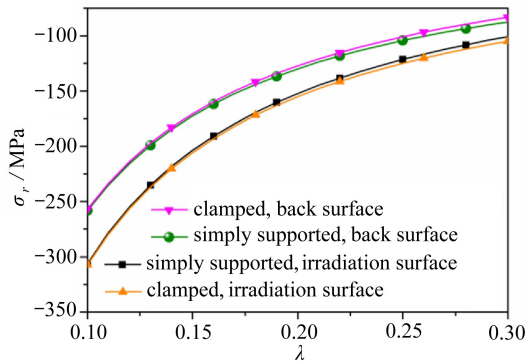


图 14 $r = 0$ 处圆板表面径向应力与 λ 关系曲线

Fig. 14 The curves of relationship between the circular plate surface radial stress and λ at $r = 0$

边界简支圆板辐照面和背面环向压应力均在 $r = 0$ 处取得最大值, 且压应力最大值随着 λ 的增加而减小。由式(14) 可知, $\lambda = 0.1$ 时环向压应力的最大值约为 $\lambda = 0.2$ 时压应力的 2 倍, $\lambda = 0.3$ 时压应力的 3 倍。在热影响区内, 随着 r 的增加, 环向压应力呈 Gauss 型减小的趋势; 辐照面环向压应力均在温度变化刚趋于较小附近转为拉应力, 拉应力区域随着 λ 的增加而减小; 背

面环向应力为压应力,并随着 r 的增加呈 Gauss 型减小的趋势,在圆板边界附近,背面环向压应力随着 λ 的增加而增加。

2.2.4 热应力与辐照因子 λ 的关系

由式(12)、式(14)和式 $\lambda = C/R$ 可分别求得边界固支圆板的热应力,边界简支圆板的热应力与 r, λ 的关系式,在 $r = 0$ 处的圆板表面径向应力与 λ 的变化关系如图 14 所示。

在 $r = 0$ 处,由式(12)、式(14)可知,辐照面、背面的径向应力和环向应力分别相等。由图 14 可以看出,圆板辐照面和背面的热应力均随 λ 的增加呈抛物线型减小趋势。边界固支圆板辐照面的压应力比边界简支圆板辐照面的大,边界简支圆板背面的压应力比边界固支圆板的大,边界固支圆板与边界简支圆板辐照面的压应力之差的绝对值和二者背面的压应力之差的绝对值相等。由于随着 λ 的增加,边界约束形式对圆板的作用越来越明显,故应力差的绝对值随着 λ 的增加而逐渐增大。

2.3 边界自由圆板的热应力

虽然周边自由的圆板在 $r = R$ 处径向应力不为 0,但其合力及合力矩均为 0(参见图 11),因此在 Saint Venant(圣维南)原理的基础上满足板边自由的边界条件。

3 结 论

本文基于薄板热弯曲理论得到了圆板在局部 Gauss 温度场作用下的响应结果,研究了局部加热或受到辐照的薄板结构的热力学效应。通过算例,分析了边界约束条件和局部温度参数对圆板挠度和热应力的影响,具体结论如下:

1) 圆板的挠度均在板中心位置处取得最大值,约束边界处挠度为 0,边界简支圆板挠度大于边界固支圆板挠度。在热影响区内,圆板内一点的挠度随该点到板中心距离增大呈 Gauss 型减小趋势;在热影响区外,圆板挠度的变化趋势与圆板边界约束形式和辐照因子有关。圆板挠度的解析结果与有限元结果一致。

2) 由于在约束边界处简支圆板和自由圆板弯矩均为 0,故二者的热变形相同,其挠度之间相差一个刚体位移常数,两种边界条件下圆板的应力分量分别相同。

3) 圆板中心有最大压应力,且热应力最大值随着辐照因子的增加呈抛物线型减小趋势。在热影响区内,圆板内一点的热应力随该点到板中心距离的增大呈 Gauss 型减小趋势,两种边界约束圆板的热应力变化趋势相似;在热影响区外,圆板热应力的变化趋势与圆板边界约束形式和辐照因子有关。

参考文献(References):

- [1] Qin Y, Wang B, Ni X W, Shen Z H, Lu J. Axisymmetric analytical solution for pulsed laser melting of metals[J]. *Computational Materials Science*, 2012, **54**: 1-6.
- [2] Qin Y, Chen Y B, Ni X W, Shen Z H, Bi J, Zhang X H. Axisymmetric numerical simulation of plastic damage in aluminum alloy induced by long pulsed laser[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2010, **48**(3): 361-367.
- [3] 付耀龙, 温泽胜, 张喜和. 长脉冲激光与硅材料相互作用的温度场[J]. 长春大学学报, 2012, **22**(10): 1212-1214. (FU Yao-long, WEN Ze-sheng, ZHANG Xi-he. Temperature field of long pulse laser and Si material interaction[J]. *Journal of Changchun University*, 2012, **22**(10): 1212-1214. (in Chinese))

- [4] 周益春, 段祝平, 王春奎. 反冲塞效应的热弹性理论分析(I)——温度场分析[J]. 应用数学和力学, 1995, **16**(10): 851-860. (ZHOU Yi-chun, DUAN Zhu-ping, WANG Chun-qui. The analytical study on the laser induced reverse-plugging effect by using the classical elastic plate theory (I)—temperature fields [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1995, **16**(10): 851-860. (in Chinese))
- [5] Beck J V. Transient three-dimensional heat conduction problems with partial heating[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2011, **54**(11/12): 2479-2489.
- [6] Yilbas B S, Al-Aqeeli N. Analytical investigation into laser pulse heating and thermal stresses [J]. *Optics & Laser Technology*, 2009, **41**(2): 132-139.
- [7] 强希文. 强激光与靶材相互作用的力学效应研究[J]. 激光与红外, 2000, **30**(3): 141-144. (QIANG Xi-wen. Investigation on mechanical effects of laser-targets interaction [J]. *Laser & Infrared*, 2000, **30**(3): 141-144. (in Chinese))
- [8] 牛燕雄, 张书练, 姚建铨, 黄峰. 高功率激光对光电器件的热-力破坏效应[J]. 激光与光电子学进展, 2007, **44**(9): 32-42. (NIU Yan-xiong, ZHANG Shu-lian, YAO Jian-quan, HUANG feng. Thermal and mechanical breakage induced by high power laser on optical and photoelectric elements [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2007, **44**(9): 32-42. (in Chinese))
- [9] LI Gang, SHEN Hong-bin, LI Li, ZHANG Chu, MAO Shao-juan, WANG Yuan-bo. Laser-induced damages to charge coupled device detector using a high-repetition-rate and high-peak-power laser [J]. *Optics & Laser Technology*, 2013, **47**: 221-227.
- [10] 黄峰, 牛燕雄, 汪岳峰, 段晓峰. 光学窗口材料激光辐照热-力效应的解析计算研究[J]. 光学学报, 2006, **26**(4): 576-580. (HUANG Feng, NIU Yan-xiong, WANG Yue-feng, DUAN Xiao-feng. Calculation of thermal and mechanical effect induced by laser in optical window materials [J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(4): 576-580. (in Chinese))
- [11] 赵建君, 宋春荣, 牛燕雄. 强激光辐照光学材料的热力效应研究[J]. 激光杂志, 2005, **26**(1): 31-32. (ZHAO Jian-jun, SONG Chun-rong, NIU Yan-xiong. Study of thermal and mechanical damage in optical material induced by high-power laser [J]. *Laser Journal*, 2005, **26**(1): 31-32. (in Chinese))
- [12] 罗强, 任庆利. 高斯激光束照射圆柱体一端面上引起温升和热应力的分析[J]. 强度与环境, 2001, **28**(3): 14-21. (LUO Qiang, REN Qing-li. Analysis of the temperature rise and the thermal stress which produced by Gauss laser radiated on an end of the cylinder [J]. *Structure & Environment Engineering*, 2001, **28**(3): 14-21. (in Chinese))
- [13] 严宗达, 王洪礼. 热应力[M]. 北京: 高等教育出版社, 1993: 286-312. (YAN Zong-da, WANG Hong-li. *Thermal Stresses* [M]. Beijing: Higher Education Press, 1993: 286-312. (in Chinese))

Response Analysis of Thin Circular Plates in the Local Gaussian Temperature Field

LONG Lian-chun, ZHANG Chao-ya

(College of Mechanical Engineering and Applied Electronics Technology,
Beijing University of Technology, Beijing 100124, P.R.China)

Abstract: Based on the theory for thermal bending of thin plates, the analytical expressions for deflections and thermal stresses of circular plates were derived in the Gaussian temperature field, and the influences of boundary conditions and local temperature parameters on the deflections and thermal stresses were discussed, thus to provide a theoretical basis for the thermodynamics analysis of thin plate structures under local heating. The results show that, the maximum values of both deflections and compressive stresses occur at the circular plates' centers. Within the heat-impacted zone of the circular plate, the deflection at a point shows a trend of the Gaussian decrease with the increase of the distance from the point to the plate center. Outside the heat-impacted zone, the boundary constraints on the circular plate and the irradiation factor influence the changes of deflections. The analytical solutions of the circular plate deflections are consistent with the numerical results. The deflection of the simply supported circular plate firstly decreases linearly with the irradiation factor. Within the heat-impacted zone, thermal stresses at a point show a trend of the Gaussian decrease with the increase of the distance from the point to the plate center. The changing trends of the thermal stresses are similar between the simply supported and the clamped circular plates. Outside the heat-impacted zone, the boundary constraints and the irradiation factor influence the changing trends of thermal stresses.

Key words: circular plate; boundary condition; thermal stress; thermal deformation;
local temperature change

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11272020)

引用本文/Cite this paper:

龙连春, 张超亚. 圆板在局部 Gauss 温度场作用下的响应分析[J]. 应用数学和力学, 2016, 37(4): 391-403.

LONG Lian-chun, ZHANG Chao-ya. Response analysis of thin circular plates in the local Gaussian temperature field[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, 37(4): 391-403.