

文章编号: 1000-0887(2002) 10-0997-11

双重内共振系统非线性模态 分岔的奇异性分析*

李欣业, 陈予恕, 吴志强

(天津大学 力学系, 天津 300072)

(本刊编委陈予恕来稿)

摘要: 利用多尺度法构造的一类 1:2:5 双重内共振系统的耦合非线性模态的分岔是一个两变量的分岔问题。利用 Maple 计算机代数可以通过消元将耦合的模态分岔方程分离为两个单变量的分岔方程。对分离后的单变量分岔方程进行奇异性分析, 发现随着系统参数的变化, 非线性模态的分岔既可以是一种模态向另一种模态的转化, 也可以是一种模态的突然出现与消失。最后给出了两变量分岔问题可以利用消元后得到的单变量分岔方程和耦合方程进行处理的一种方法。

关键词: 双重内共振; 非线性模态; 耦合模态; 模态分岔; 奇异性理论

中图分类号: O322 文献标识码: A

引 言

非线性模态的分岔主要指模态数目的变化, 它可导致非线性模态数目超过系统的自由度数。研究非线性模态的分岔可以为实验结果的分析及动力系统的参数设计提供一定的理论指导, 所以这方面的研究具有重要的理论与工程实际意义。

Rosenberg^[1]指出, 非线性弹簧连接的双质量弹簧系统的非线性模态的数目可能多于 2 个。文献[2, 3]用数值方法研究了模态分岔, 指出非相似模态不仅其周期与系统的能量有关, 而且其数目也依赖于系统的能量。Anand^[4]分析非线性弹簧连接的两质量系统的自由振动时, 发现系统参数改变时可能产生模态分岔。Yen^[5]通过考虑势能函数展开式中控制大幅运动、小幅运动的项, 分析了这种分岔的物理本质。Shaw 和 Pierre^[6]指出有阻尼双质量弹簧系统的模态数目在一定条件下甚至能达到 6 个。Nayfeh 等在文献[7, 8]中分别用多尺度法和复不变流形法研究了内共振系统的非线性模态, 指出内共振情况下非线性模态的数目可能多于线性模态的数目。Vakakis 等分别用匹配法^[9]和能量方法^[10-12]对一类两自由度无阻尼强非线性系统做了系统的研究, 包括相似模态数目的变化、不同类型模态间的转化、分岔解的局部稳定性, 指出相似模态的分岔可导致系统的混沌运动。文[13]用多尺度方法构造了一类 3 对纯虚根双重内共振系统的非线性模态, 发现其模态分岔方程为二个变量的分岔问题。本文利用奇异性理

* 收稿日期: 2001_05_08; 修订日期: 2002_05_10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(重大 19990510); 国家重点基础研究专项经费资助项目(G1998020316); 教育部博士点基金资助项目(D09901)

作者简介: 李欣业(1966—), 男, 唐山人, 副教授, 博士, 已发表论文 30 余篇(E-mail: xinyeli@eyou.com)。

论对其分析发现非线性模态的分岔可以是一种模态向另一种(或几种)模态的转化,也可以是一种(或几种)模态的突然出现与消失。

1 模态分岔的奇异性分析

文[13]中得到的一类 1:2:5 双重内共振系统耦合非线性模态的分岔方程组如下

$$c_1^3 + t_5 c_1 c_2^2 + t_6 c_2^2 + t_7 c_1 = 0, \quad (1)$$

$$c_1 c_2^2 + t_1 c_1 + t_3 c_1^2 + t_4 c_2^2 + \lambda = 0, \quad (2)$$

其中 $t_1, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, \lambda$ 的意义可见[13], $a_1/a_3 = c_1, a_2/a_3 = c_2$ 分别表示模态振幅之比。(1)和(2)是二个变量的分岔问题。利用 Maple 计算机代数进行消元可得

$$\begin{aligned} c_1^4 - (t_3 t_5 - t_4) c_1^3 - (t_3 t_6 + t_1 t_5 - t_7) c_1^2 - (\lambda_5 + t_1 t_6 - t_4 t_7) c_1 - \lambda_6 = 0, \quad (3) \\ (t_4 t_5 - t_6) c_2^8 + (\lambda_5 + t_4^3 + 2 t_4 t_5 t_1 + 3 t_4 t_6 t_3 - 3 t_1 t_6 - t_3^2 t_5 t_6 + t_4 t_3^2 t_5^2 + \\ t_4 t_7 - 2 t_4^2 t_3 t_5) c_2^6 + (3 t_3 t_6 \lambda + t_3^2 t_5^2 \lambda + t_3^2 t_6^2 - t_1 t_3^2 t_5 t_6 + 3 \lambda_4^2 - 4 \lambda_3 t_4 t_5 - \\ t_3^2 t_6 t_7 + t_1^2 t_4 t_5 + 2 t_1 t_4 t_7 + \lambda_7 + 2 \lambda_1 t_5 + 3 t_1 t_3 t_4 t_6 - 2 t_3 t_4^2 t_7 + 2 t_4 t_3^2 t_5 t_7 - \\ 3 t_1^2 t_6) c_2^4 + (-4 \lambda_3 t_7 + 3 t_4 \lambda^2 - t_1 t_3^2 t_6 t_7 - t_1^3 t_6 + 3 t_1 t_3 \lambda_6 + \lambda_5 t_1^2 + \\ t_4 t_3^2 t_7^2 - 2 t_3 t_5 \lambda^2 + 2 \lambda_3^2 t_5 t_7 + 2 \lambda_1 t_7 + t_4 t_7 t_1^2) c_2^2 + (\lambda^3 + \lambda_7 t_1^2 + \\ \lambda_3^2 t_7^2 - 2 t_3 t_7 \lambda^2) = 0. \quad (4) \end{aligned}$$

对(3)取变换 $c_1 = c_1 - (t_4 - t_3 t_5)/4$, 可将其化成如下形式

$$c_1^4 + \alpha_1 c_1^2 + (\alpha_2 + \lambda) c_1 + \alpha_3 + \alpha_4 \lambda = 0, \quad (5)$$

其中

$$\alpha_1 = -\frac{3}{8}(t_4 - t_3 t_5)^2 + t_7 - t_3 t_6 - t_1 t_5,$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{8}(t_4 - t_3 t_5)^3 + (t_7 - t_3 t_6 - t_1 t_5)(t_4 - t_3 t_5) + t_4 t_7 - t_1 t_6,$$

$$\alpha_3 = -\frac{3}{256}(t_4 - t_3 t_5)^4 + \frac{1}{16}(t_7 - t_3 t_6 - t_1 t_5)(t_4 - t_3 t_5)^2 - \\ \frac{1}{4}(t_4 t_7 - t_1 t_6)(t_4 - t_3 t_5),$$

$$\alpha_4 = -\frac{1}{4}(t_4 - t_3 t_5) + \frac{t_6}{t_5}, \quad \lambda_1 = -\lambda_5.$$

作为工程开折问题, (5)中的 $\alpha_1 \sim \alpha_4$ 既是开折参数, 又代表系统的物理参数的组合。

根据奇异性理论, (5)的转迁集如下

分岔集

$$\alpha_1 \alpha_4^2 = \alpha_2 \alpha_4 - \alpha_3 - \alpha_4^4;$$

滞后集

$$\alpha_1 = -6\beta^2,$$

其中 β 满足

$$3\beta^4 + \alpha_3 + 8\alpha_4 \beta^3 - \alpha_2 \alpha_4 = 0;$$

双极限点集

$$\alpha_1^2 = 4(\alpha_3 - \alpha_2 \alpha_4).$$

下面给出(5)在开折参数空间的 6 种投影面上的转迁集(图 1a~ 图 6a)及分岔图(图 1b~ 图 6b)。

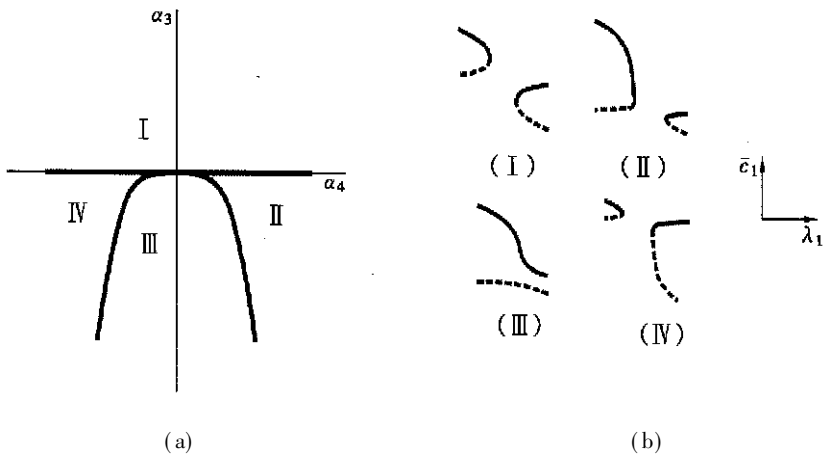


图1 ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$)

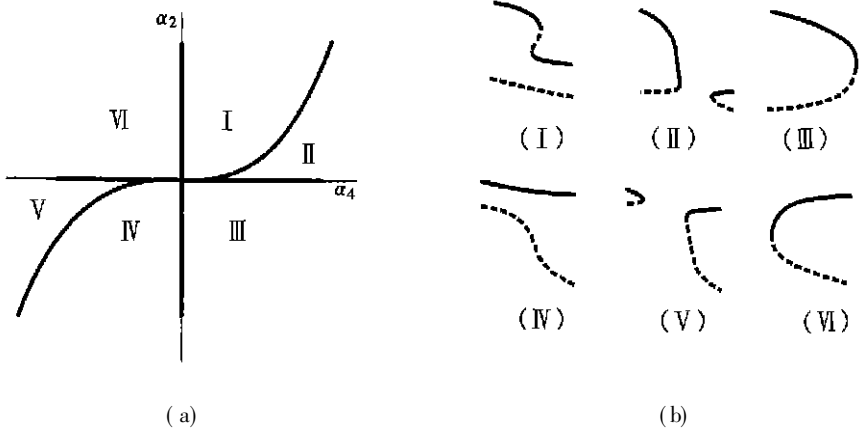


图2 ($\alpha_1 = \alpha_3 = 0$)

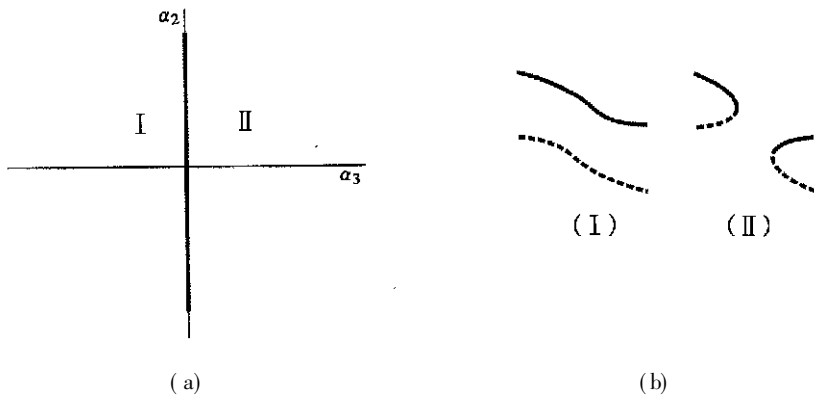


图3 ($\alpha_1 = \alpha_4 = 0$)

对(4)可将其简写成如下形式

$$c_2^8 + c_2^6(\mu + \alpha_1) + c_2^4(\alpha_2 + \alpha_3\mu) + c_2^2(\mu^2\alpha_4 + \alpha_5\mu + \alpha_6) + \mu^3\alpha_7 + \mu^2\alpha_8 + \mu\alpha_9 = 0, \tag{6}$$

式中

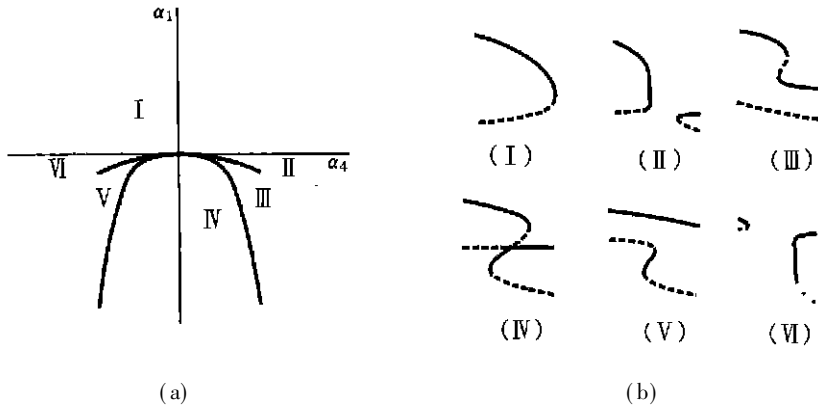


图4 ($\alpha_2 = \alpha_3 = 0$)

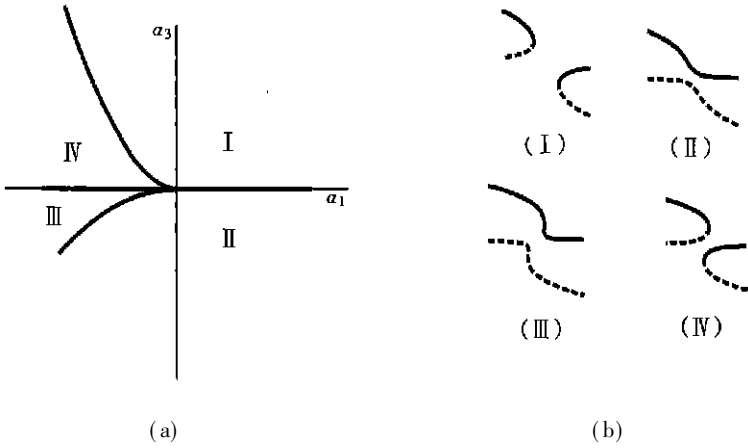


图5 ($\alpha_2 = \alpha_4 = 0$)

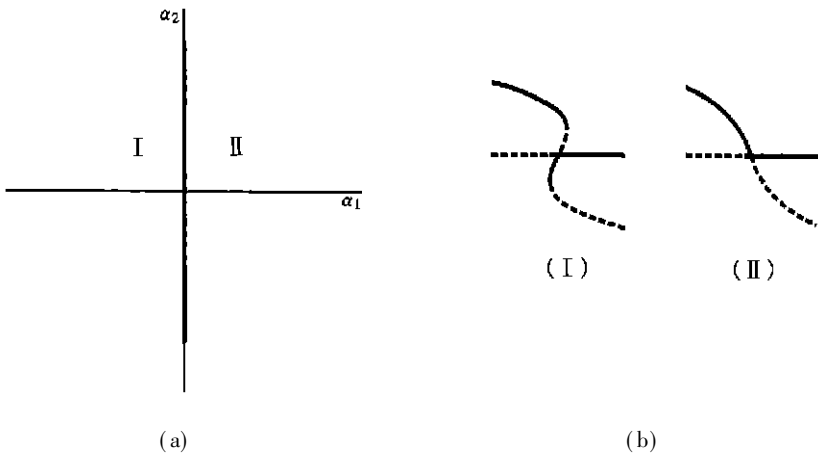


图6 ($\alpha_3 = \alpha_4 = 0$)

$$\alpha_1 = \frac{t^3 - t_6 t_3 t_5 - 3t_6 t_1 + 3t_3 t_4 t_6 - 2t_3 t_5 t_4^2 + 2t_1 t_4 t_5 + t_4 t_7 + t_5^2 t_3^2 t_4}{t_4 t_5 - t_6},$$

$$\alpha_2 = (t_5 t_1^2 t_4 - 3t_6 t_1^2 + t_3^3 t_6^2 - 2t_7 t_3 t_4^2 - t_6^2 t_3 t_5 t_1 + 2t_1 t_4 t_7 + 3t_6 t_1 t_3 t_4 + 2t_5 t_4 t_7 t_3 - t_6 t_3^2 t_7) / (t_4 t_5 - t_6),$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \frac{3t_4^2 + t_3^2 t_5^2 - 4t_3 t_4 t_5 + 3t_3 t_6 + t_7 + 2t_1 t_5}{t_5}, \\ \alpha_4 &= \frac{(t_4 t_5 - t_6)(3t_4 - 2t_3 t_5)}{t_5^2}, \\ \alpha_5 &= \frac{2t_1 t_7 + t_5 t_1^2 - 4t_3 t_4 t_7 + 2t_5 t_7 t_3^2 + 3t_1 t_3 t_6}{t_5}, \\ \alpha_6 &= \frac{t_4 t_7 t_1^2 - t_6 t_1^3 + t_3^2 t_7^2 t_4 - t_1 t_6 t_7 t_3^2}{t_4 t_5 - t_6}, \quad \alpha_7 = \frac{(t_4 t_5 - t_6)^2}{t_5^3}, \\ \alpha_8 &= -\frac{2t_3 t_7 (t_4 t_5 - t_6)}{t_5^2}, \quad \alpha_9 = \frac{t_3^2 t_7^2 + t_7 t_1^2}{t_5}, \quad \mu = \frac{t_5 \lambda}{t_4 t_5} - t_6 \end{aligned}$$

为分析简单, 我们讨论 $t_1 = t_7 = 0$ 的情形. 此时 $\alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_8 = \alpha_9 = 0$, 故(6) 简化为

$$c_2^8 + c_2^6(\mu + \alpha_1) + c_2^4(\alpha_2 + \alpha_3 \mu) + c_2^2 \mu^2 \alpha_4 + \mu^3 \alpha_7 = 0 \quad (7)$$

根据奇异性理论, (7) 的转迁集如下

分岔集

$$\alpha_1 = -\frac{1}{3}(-3\beta^4 \alpha_7 - 3\alpha_3 \beta^4 + 3\alpha_4 \beta^4 + 6\alpha_2 \alpha_7 \beta^4 - 4\alpha_2 \alpha_4 \beta^2 - 3\alpha_7 \alpha_2^2 + 5\alpha_2 \beta^3 + 2\alpha_3 \alpha_2 \beta^2 + \alpha_2 \alpha_4)^2 / \beta^4,$$

其中 β 满足

$$\beta^5 + (3\alpha_7 + \alpha_3 - 2\alpha_4) \beta^4 + (2\alpha_2 \alpha_4 - 6\alpha_2 \alpha_7) \beta^2 + 3\alpha_7 \alpha_2^2 = 0;$$

滞后集

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -(-12\beta^4 \alpha_4 \alpha_7 + 3\beta^3 \alpha_3 \alpha_4^2 - 8\beta^3 \alpha_3^2 \alpha_7 + 4\beta^4 \alpha_2 \alpha_4 \alpha_7 + 3\beta^4 \alpha_4^2 - 6\beta^4 \alpha_3 \alpha_7 - \beta^2 \alpha_2 \alpha_4^2 + 3\beta^2 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_7 + \alpha_7 \alpha_4 \alpha_2^2) / \\ & \quad [(-6\beta^2 \alpha_4 \alpha_7 + \beta \alpha_3 \alpha_4^2 - 3\beta \alpha_3^2 \alpha_7 + 3\alpha_2 \alpha_4 \alpha_7) \beta], \end{aligned}$$

其中 β 满足

$$\begin{aligned} 72\beta^6 \alpha_7^2 + (-9\alpha_4^3 + 30\alpha_3 \alpha_4 \alpha_7) \beta^5 + (-\alpha_3^2 \alpha_4^2 - 108\alpha_2 \alpha_7^2 + 3\alpha_7 \alpha_3^3) \beta^4 + \\ (-21\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_7 + 6\alpha_2 \alpha_4^3) \beta^3 + 54\beta^2 \alpha_2^2 \alpha_7^2 + (3\alpha_3 \alpha_4 \alpha_2^2 \alpha_7 - \alpha_4^2 \alpha_2^2) \beta - 9\alpha_2^3 \alpha_7^2 = 0; \end{aligned}$$

双极限集

$$\alpha_1 = \beta(8\beta \alpha_4 \alpha_7 - 4\alpha_3 \alpha_7 \beta + \alpha_4^2 \beta - 4\alpha_2 \alpha_7) / (4\alpha_3 \alpha_7 \beta - \beta \alpha_4^2 + 4\alpha_2 \alpha_7),$$

其中 β 满足

$$\begin{aligned} 64\beta^3 \alpha_7^3 + (-16\alpha_7^2 \alpha_3^2 + 8\alpha_3 \alpha_7 \alpha_4^2 - \alpha_4^4) \beta^2 + \\ (8\alpha_2 \alpha_7 \alpha_4^2 - 32\alpha_2 \alpha_3 \alpha_7^2) \beta - 16\alpha_2^2 \alpha_7^2 = 0 \end{aligned}$$

下面给出(7) 在开折参数空间的 10 种投影面上的转迁集和分岔图.

1) $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$, 其余开折参数为零

转迁集(只包含分岔集 $\alpha_2 = 0$) 和分岔图如图 7(a) 和 7(b) 所示.

2) $\alpha_1 \neq 0, \alpha_3 \neq 0$, 其余开折参数为零

转迁集包括分岔集: $\alpha_1 = \alpha_3 (\alpha_3 < 0)$; 滞后集: $\alpha_3 = 0$; 双极限集: $\alpha_1 = 0$. 转迁集及分岔图分别如图 8(a) 和 8(b) 所示.

3) $\alpha_1 \neq 0, \alpha_4 \neq 0$, 其余开折参数为零

转迁集包括分岔集: $\alpha_1 = -\alpha_4 (\alpha_4 > 0)$; 滞后集: $\alpha_1 = 0$; 双极限集: $\alpha_4 = 0$. 转迁集及分岔

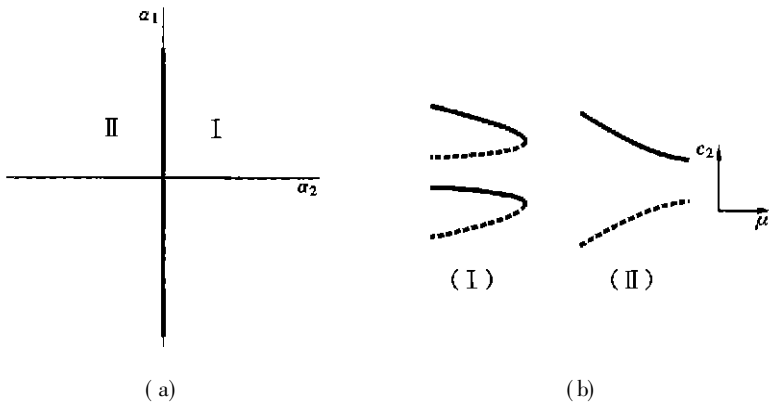


图 7

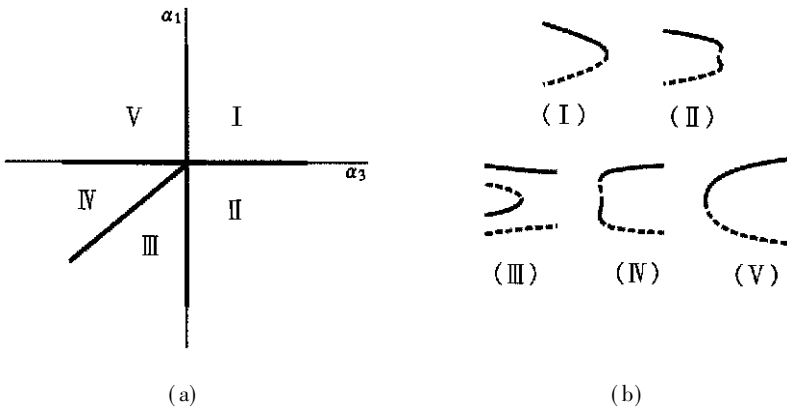


图 8

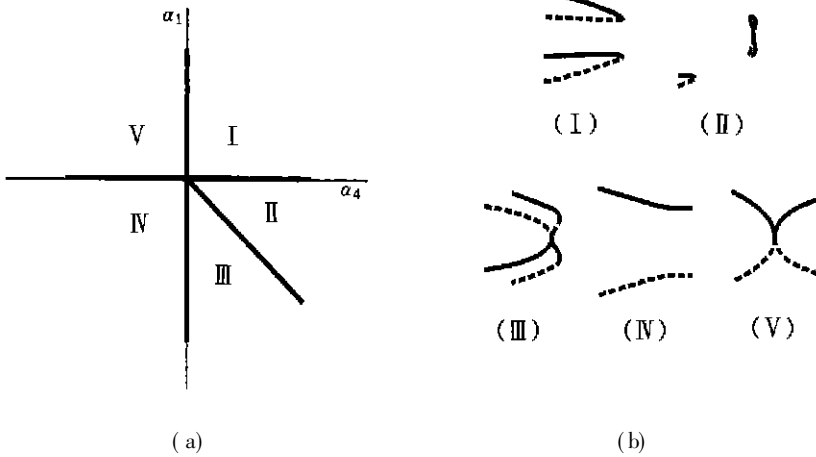


图 9

图分别如图 9(a) 和 9(b) 所示。

4) $\alpha_1 \neq 0, \alpha_7 \neq 0$, 其余开折参数为零

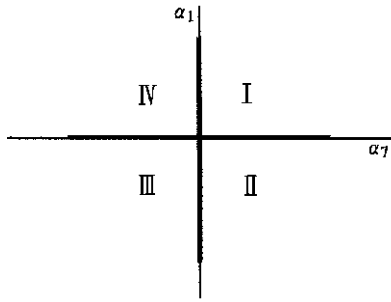
转迁集包括滞后集: $\alpha_7 = 0$; 双极限集: $\alpha_1 = 0$ 。转迁集及分岔图分别如图 10(a) 和 10(b)

所示。

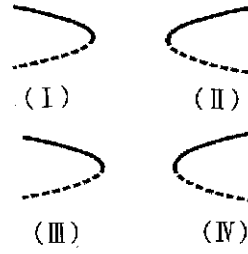
5) $\alpha_2 \neq 0, \alpha_3 \neq 0$, 其余开折参数为零

转迁集包括分岔集: $\alpha_2 = -\alpha_3^2, \alpha_3 = 0$; 滞后集: $\alpha_2 = 0 (\alpha_3 < 0)$ 。转迁集及分岔图分别如

图 11(a) 和 11(b) 所示。

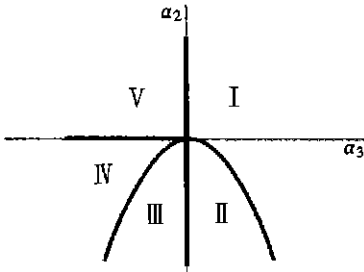


(a)

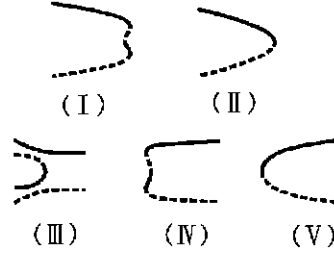


(b)

图 10



(a)

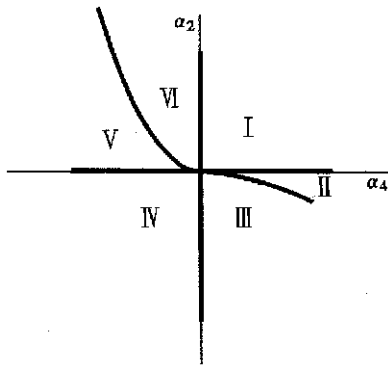


(b)

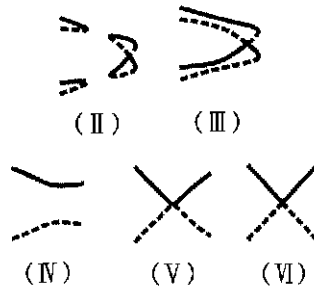
图 11

6) $\alpha_2 \neq 0, \alpha_4 \neq 0$, 其余参数全为零

转迁集包括分岔集: $\alpha_2 = -64\alpha_4^2/27 (\alpha_4 > 0)$, $\alpha_2 = 0$; 滞后集: $\alpha_2 = 243\alpha_4^2 (\alpha_4 < 0)$; 双极限集: $\alpha_4 = 0$ 。转迁集及分岔图分别如图 12(a) 和 12(b) 所示, 其中区域 I 中无解。



(a)



(b)

图 12

7) $\alpha_2 \neq 0, \alpha_7 \neq 0$, 其余参数全为零

转迁集包括分岔集: $\alpha_2 = -11664\alpha_7^2/3125 (\alpha_7 < 0)$; 滞后集: $\alpha_7 = 0$; 双极限集: $\alpha_2 = 0$ 。转迁集及分岔图分别如图 13(a) 和 13(b) 所示。

8) $\alpha_3 \neq 0, \alpha_4 \neq 0$, 其余参数全为零

转迁集包括分岔集: $\alpha_3 = \alpha_4 (\alpha_4 > 0)$; 滞后集: $\alpha_4 = 0$ 。转迁集及分岔图分别如图 14(a) 和

14(b) 所示。

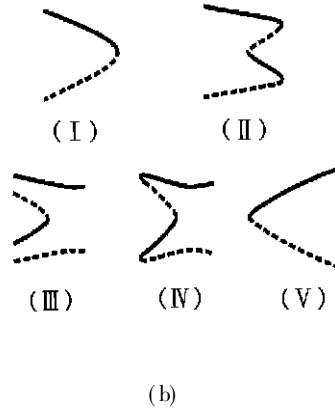
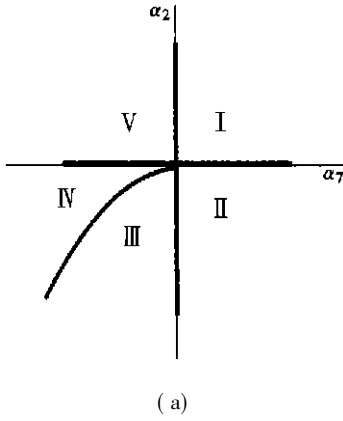


图 13

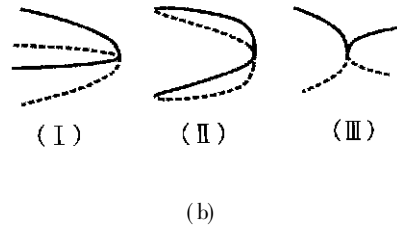
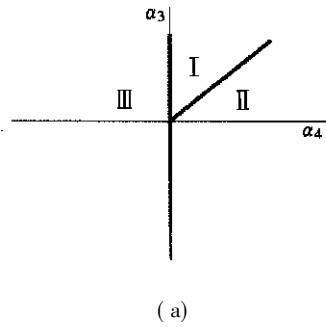


图 14

9) $\alpha_3 \neq 0, \alpha_7 \neq 0$, 其余参数全为零

转迁集包括分岔集: $\alpha_3 = 0$; 滞后集: $\alpha_3 = -128\alpha_7/3$; 双极限集: $\alpha_7 = 0$ 。转迁集及分岔图分别如图 15(a) 和 15(b) 所示。

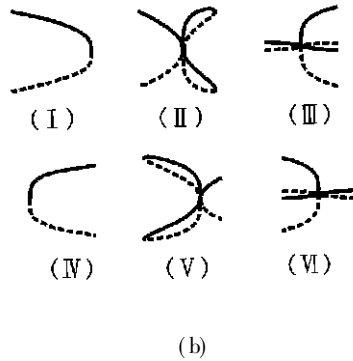
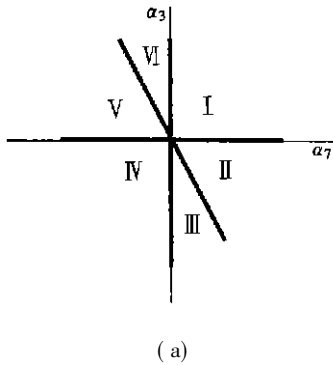


图 15

10) $\alpha_4 \neq 0, \alpha_7 \neq 0$, 其余参数全为零

转迁集包括分岔集: $\alpha_4 = \alpha_7 (\alpha_7 < 0)$; 滞后集: $\alpha_7 = 0, \alpha_4 = 0$; 双极限点集 $\alpha_4 = -8\alpha_7 (\alpha_7 < 0)$ 。转迁集及分岔图分别如图 16(a) 和 16(b) 所示。

上面的分析分别给出了消元后的 c_1 和 c_2 在各自的一些特殊参数空间中的分岔模式。下面以 $t_1 = t_6 = 0, t_5 = 1$ 的情况为例, 给出在同一组参数下 c_1 和 c_2 的分岔情况。此时, 消元后 c_1, c_2 的方程分别为

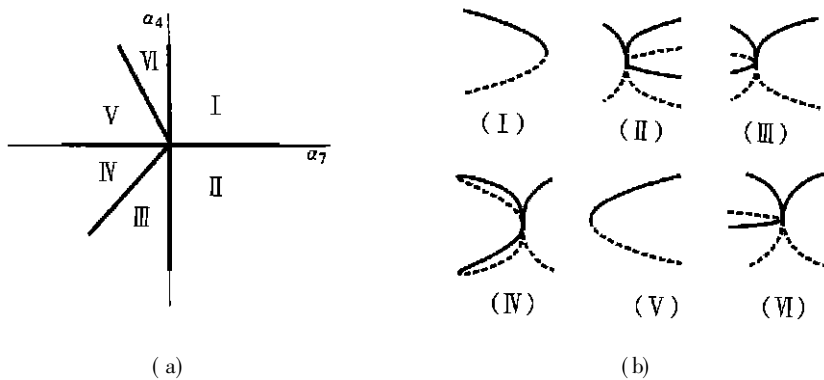


图 16

$$c_1^3 + c_1 \alpha_{11} + \alpha_{12} - \lambda = 0, \tag{8}$$

$$c_2^6 + c_2^4 \alpha_{21} + c_2^2 (\alpha_{22} + \alpha_{23} \lambda) - 2\alpha_{24} \lambda + \alpha_{24}^2 + \lambda^2 = 0, \tag{9}$$

其中

$$c_1 = c_1 + \frac{1}{3}(t_3 - t_4), \quad \alpha_{11} = -\frac{1}{3}(t_3 - t_4)^2 + t_7,$$

$$\alpha_{12} = -\frac{2}{27}(t_3 - t_4)^3 + \frac{1}{3}t_7(t_3 + 2t_4),$$

$$\alpha_{21} = -2t_3t_4 + t_7 + t_3^2 + t_4^2, \quad \alpha_{24} = t_3t_7,$$

$$\alpha_{22} = 2t_3^2t_7 - 2t_3t_4t_7, \quad \alpha_{23} = 2(t_4 - t_3).$$

(8) 的转迁集及分岔图示于图 17 中。

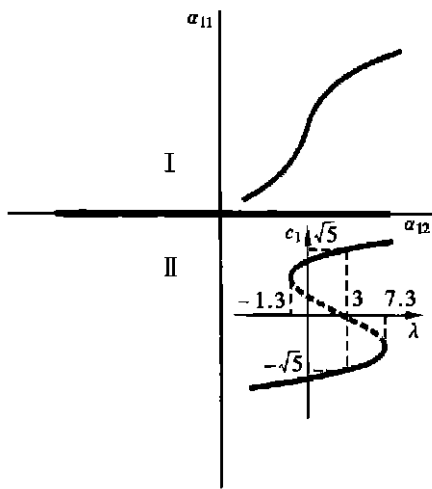


图 17

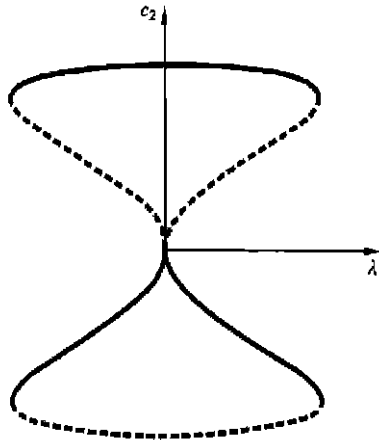


图 18

当 $t_3 = t_4$ 时, $c_1 = c_1, \alpha_{11} = \alpha_{21} = t_7, \alpha_{12} = \alpha_{24} = t_4t_7, \alpha_{22} = \alpha_{23} = 0$. 对确定的 t_4, t_7 比如 $t_4 = -3/5, t_7 = -5$, c_1 的分岔图已在图 17 的区域 II 给出. 由于此时(9) 可以写成下面的形式

$$c_2^6 + \alpha_{21}c_2^4 + (\alpha_{24} - \lambda)^2 = 0, \tag{10}$$

因此可以确定在此组参数下 c_2 的分岔图如图 18 所示. 由(10) 知当 $t_7 > 0$ 时, 虽然 c_1 有实数解(图 17 区域 I), 但 c_2 却无实数解. 因而 $t_7 = 0$ 是整个分岔问题的转迁集.

事实上,有了 $c_1(c_2)$ 的分岔情况就可以根据(1)或(2)确定 $c_2(c_1)$ 的分岔情况。仍以上面讨论的情况为例,此时方程(1)为

$$c_1^3 + c_1 c_2^2 + t_7 c_1 = 0 \quad (11)$$

当 $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$ 时有

$$c_1^2 + c_2^2 + t_7 = 0 \quad (12)$$

根据(12)依 c_1 确定的 c_2 的分岔情况亦如图 18 所示。显然(12)中的 c_1, c_2 当 $t_7 < 0$ 时有非零解;当 $t_7 = 0$ 时只有零解;而当 $t_7 > 0$ 时没有实数解。这恰恰验证了 $t_7 = 0$ 为二变量分岔问题的转迁集。不过根据(12)可知此时 $|c_1| \leq \sqrt{|t_7|}, |c_2| \leq \sqrt{|t_7|}$ 。可见后一种分析由于考虑了两个变量之间的耦联关系,所以可以更准确地了解 c_1 和 c_2 的分岔情况。

不难看出,与单重内共振系统相比, $\omega_1: \omega_2: \omega_3 = 1: 2: 5$ 双重内共振系统的非线性模态具有更丰富的分叉模式。显然,我们这里的分析还只是一个初步的探讨。

2 分析与结论

本文对二个变量的模态分岔问题进行奇异性分析时,发现分岔点的数目可多达 3 个,除一些常见的情况外,分岔点两侧模态解的情况还有左(右)4右(左)0型(即以分岔点为基准向左(右)变化可能有 4 种解存在,向右(左)则模态消失)、左 4 右 4 型、左 2 右 2 型、左(右)2 右(左)4 型这几种比较复杂的情况。所以模态分岔导致的模态数目的变化包含两种情况:其一为两个非零数之间的变化,这体现的是一种模态向另一种模态的转化;其二为零与非零数之间的变化,这体现的是某一种模态的突然出现与消失。模态分岔点的数目越多,则系统运动模式发生改变的临界点越多。对系统进行动力学设计时,应尽量避免这些临界点对应的系统参数,从而避免系统的运动状态发生突变。分岔点两侧解的数目变化越大,则系统受扰后的运动状态越丰富。由于模态分岔反映了系统可能存在的模态运动数目的变化,所以对分析实验现象、数值计算结果和研究多自由度系统的非线性响应都具有一定的理论指导意义。虽然利用消元法可以对两变量分岔问题中每一个变量的分岔情况进行比较全面的了解,但研究表明,这样处理得到的某些结果对整个两变量分岔问题来讲可能是不可靠的。而利用消元法并结合耦联方程可以较好地解决两变量分岔问题的分析。

[参 考 文 献]

- [1] Rosenberg R M. On normal vibration of a general class of nonlinear dual_mode systems[J]. Journal of Applied Mechanics, 1961, 28: 275—283.
- [2] Atkinson C P, Beverly T. A Study of nonlinearly related modal solutions of coupled nonlinear systems by supersition technique[J]. Journal of Applied Mechanics, 1965, 32: 359—373.
- [3] Jonson T L, Rand R H. On the existence and bifurcation of minimal modes[J]. International Journal of Nonlinear Mechanics, 1979, 14: 1—12.
- [4] Anand G V. Nature mode of a coupled nonlinear system[J]. International Journal of Nonlinear Mechanics, 1972, 7: 81—91.
- [5] Yen D. On the normal modes of nonlinear dual_mass systems[J]. International Journal of Nonlinear Mechanics, 1974, 9: 45—53.
- [6] Shaw S W, Pierre C. Normal modes for nonlinear vibrating systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 1993, 164(1): 85—124.
- [7] Nayfeh A, Lacabbonara W, Chin Char_Ming. Nonlinear normal modes of buckled beams three_to

- one and one_to_one internal resonances[J]. *Nonlinear Dynamics*, 1999, **18**: 253—273.
- [8] Nayfeh A H, Chin C, Nayfeh S A. On nonlinear normal modes of systems with internal resonance [J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 1994, **118**: 340—345.
- [9] Caughey T K, Vakakis A F, Sivo J M. Analytical study of similar normal modes and their bifurcation in a class of strongly nonlinear system[J]. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 1990, **25** (5): 521—533.
- [10] King M E, Vakakis A F. An Energy_based formulation for computing nonlinear normal modes in undamped continuous systems[J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 1994, **116**: 332—340.
- [11] Vakakis A F, Rand R H. Normal modes and global dynamics of a two_degree_of_freedom nonlinear system—I Low energies[J]. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 1992, **27**(5): 861—874.
- [12] Vakakis A F, Vakakis R H, Rand R H. Normal modes and global dynamics of a two_degree_of_freedom nonlinear system—II High energies[J]. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 1992, **27**(5): 875—888.
- [13] 李欣业. 多自由度内共振系统的非线性模态及其分岔[D]. 博士论文. 天津: 天津大学, 2000, 49—59.
- [14] CHEN Yu_shu, Andrew Y T Leung. *Bifurcation and Chaos in Engineering* [M]. London: Springer-Verlag London Limited, 1998, 220—234.
- [15] 唐云. 对称性分岔理论基础[M]. 北京: 科学出版社, 1998, 135—141.
- [16] 刘济科, 赵令诚, 方同. 非线性系统的模态分岔与模态局部化现象[J]. *力学学报*, 1995, **27**(5): 614—617.
- [17] Rand R H. Nonlinear normal modes in a two degrees of freedom system[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1971, **38**: 561—573.

Singular Analysis of Bifurcation of Nonlinear Normal Modes for a Class of Systems With Dual Internal Resonances

LI Xin_ye, CHEN Yu_shu, WU Zhi_qiang

(Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P R China)

Abstract: The nonlinear normal modes(NNMs) associated with internal resonance can be classified into two kinds: uncoupled and coupled. The bifurcation problem of the coupled NNM of systems with 1: 2: 5 dual internal resonance is in two variables. The singular analysis of it is presented after separating the two variables by taking advantage of Maple algebra, and some new bifurcation patterns are found. Different from the NNMs of systems with single internal resonance, the number of the NNMs of systems with dual internal resonance may be more or less than the number of the degrees of freedom. At last, it is pointed out that bifurcation problems in two variables can be conveniently solved by separating variables as well as using coupling equations.

Key words: dual internal resonance; nonlinear normal mode; mode coupling; mode bifurcation; the singularity theory