

文章编号: 1000-0887(2002) 05-0441-11

宁波甬江大桥的大挠度非线性计算问题*

钱伟长

(上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200436)

(本刊编委钱伟长来稿)

摘要: 研究了宁波甬江铁路大桥的大挠度非线性设计计算问题。提出了非线性方程的叠代近似算法, 同时指出了如果两岸落差约 5m, 两岸跨度约 100m 计算, 则桥梁中间的最大斜度将超过 5%, 这远远超过铁路设计允许的斜度。为此, 提出了减小路轨斜度的设计方案, 即铁路在两岸都有长度约 1km 斜度为 0.5% 的路基, 使两岸的落差减小到约为原来落差的 1/10。这样路轨在跨越甬江时, 其挠度的斜度就会大大缩小, 也在 0.5% ~ 0.6% 之间。

关键词: 大挠度; 弹性模量; 悬臂梁

中图分类号: O343.5; O39:TB12 文献标识码: A

引 言

宁波甬江口的甬江铁路大桥, 设计时曾有用两岸不同高度的悬臂梁对接的方案, 但在施工时, 发现两岸悬臂梁的不足而对接不了。这一事故, 主要是由于两岸高差过大, 造成实际的桥梁的非线性弧长应远远大于甬江的水平跨度, 且中间区域的最大斜度也已远远超过了铁路设计规范的最大允许值。因此, 本问题已经是非线性大挠度问题, 桥梁的最大斜度必须用非线性方程的近似解。

为缩小桥梁的最大斜度, 我们建议两岸都有约 1km 左右微小斜度路轨, 这样就能大大减小两岸铁轨的对接高差。也就是说, 我们可以使两岸的路轨斜度相同(约 0.1%), 从而使得两岸对接的落差减小到原来的 1/10。这样的设计可以使整个路轨斜度大大减小, 甚至用一般材料力学中的小挠度理论计算就足够了。

1 悬臂梁的非线性大挠度方程

现在让我们先导出本题中桥梁的非线性大挠度方程。设铁路桥梁的抗弯刚度为 EI , 其中 E 和 I 分别为路轨的弹性模量与惯性矩。设单位长度的桥梁轨道的自重与车辆的全重之和为 q , 设车辆占据了桥梁的整个长度。不失一般性, 设 EI 和 q 为常数。用 x 表示水平坐标, $w(x)$ 为垂直挠度, 于是铁路桥梁的斜度为(见图 1)

$$\frac{dw}{dx} = \tan \theta \quad (1)$$

而且 s 为桥梁的弧长时, 容易得到

* 收稿日期: 2001_07_01; 修订日期: 2001_11_28

作者简介: 钱伟长(1913—), 男, 江苏无锡人, 教授, 博士, 中科院院士, 全国政协副主席, 大学校长。

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta, \quad \frac{dw}{ds} = \sin\theta, \quad (2a, b)$$

其中, θ 是桥梁的弧线的切线与水平方向的夹角(见图 2)。

设 P 点曲率半径为 R , 则

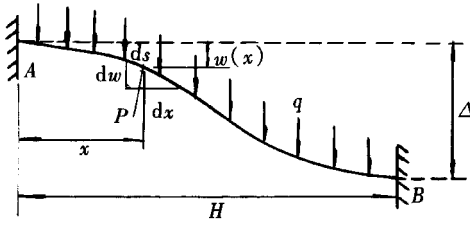


图 1 悬臂梁连接线的坐标、水平跨度和两岸高差的关系

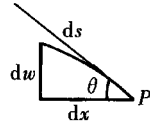


图 2 弧长 ds 、挠度增量 dw 、水平坐标元 dx 与 θ 关系

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{dw}{dx} \right) = \sec^2\theta \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R} \sec^2\theta, \quad (3)$$

于是

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{dw}{dx} \right) = \frac{dx}{ds} \frac{d^2w}{dx^2} = \cos\theta \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{1}{R} \sec^2\theta. \quad (3')$$

由此可以得到梁的曲率半径为

$$\frac{1}{R} = \cos^3\theta \frac{d^2w}{dx^2}, \quad (4)$$

而且

$$\cos\theta = \frac{dx}{(dx^2 + dw^2)^{1/2}} = \left[1 + (dw/dx)^2 \right]^{-1/2}, \quad (4')$$

这样, 梁的曲率半径可写成

$$\frac{1}{R} = \left[1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{-3/2} \frac{d^2w}{dx^2}. \quad (5)$$

根据弹性理论, 梁的任意一点 P 下的弹性弯矩为

$$M(x) = \frac{EI}{R} = \frac{EI d^2w/dx^2}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}. \quad (6)$$

现在, 让我们来研究梁 AP 段的力矩平衡条件。梁的左端固定端 A 的反作用力矩和反作用剪力分别为 M_0 和 Q_0 (见图 3), 在 P 点所受的弯矩和剪力分别为 $M(x)$ 和 $Q(x)$ 。同时 AP 段每单位弧长受到的垂直作用力为 $q ds$ 。根据平衡条件, 可以得到

$$Q_0 + Q(x) = \int_0^x q \frac{ds}{dx} dx = \int_0^x q \left[1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx, \quad (7a)$$

$$M(x) = M_0 + xQ(x) - \int_0^x qx \left[1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx. \quad (7b)$$

从(7)式中消去 $Q(x)$ 可以得到

$$M(x) = M_0 - xQ_0 + x \int_0^x q \left[1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx - \int_0^x qx \left[1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx. \quad (8)$$

从(6)式和(8)式消去 $M(x)$, 得到梁的大挠度非线性微分方程

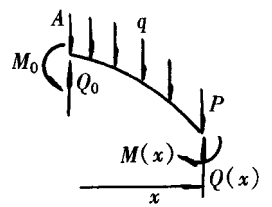


图 3 AP 段力和力矩的关系

$$\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) \left[1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{3/2} = \frac{M_0}{EI} - \frac{Q_0}{EI} x + \frac{q}{EI} x \int_0^x \left[1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx - \frac{q}{EI} \int_0^x x \left[1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx, \quad (9)$$

式中, $M_0/(EI)$ 和 $Q_0/(EI)$ 是待定常数, 它们可以根据梁两端的边界条件来决定

$$w = 0, \quad \frac{dw}{dx} = 0 \quad (x = 0), \quad (10a, b)$$

$$w = \Delta, \quad \frac{dw}{dx} = 0 \quad (x = H), \quad (10c, d)$$

其中, Δ 为左右端的高差, H 为桥梁的水平跨度. 由于(9)式是 w 的非线性大挠度方程, 由此只能用逐级叠代的方法求得各阶近似解的表达式. 为了便于求近似解, 引入下列无量纲量

$$\left. \begin{aligned} \xi = \frac{x}{H}, \quad W = \frac{w}{H}, \quad m_0 = \frac{M_0 H}{EI}, \quad \Omega_0 = \frac{Q_0 H^2}{EI}, \\ \alpha = \frac{1}{12} \frac{q H^3}{EI}, \quad \beta = 6 \frac{\Delta}{H}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

于是, 非线性大挠度方程(9)式可以改写为

$$\left(\frac{d^2 W/d\xi^2}{1 + \left(dW/d\xi \right)^2} \right)^{3/2} = m_0 - \Omega_0 \xi + 12 \alpha \xi \int_0^\xi \left[1 + \left(\frac{dW}{d\xi} \right)^2 \right]^{1/2} dx - 12 \alpha \int_0^\xi \xi \left[1 + \left(\frac{dW}{d\xi} \right)^2 \right]^{1/2} dx, \quad (12)$$

边界条件(11)式可以写成

$$W = 0, \quad \frac{dW}{d\xi} = 0 \quad (x = 0), \quad (13a, b)$$

$$W = \frac{1}{6} \beta, \quad \frac{dW}{d\xi} = 0 \quad (x = 1). \quad (13c, d)$$

从(12)式可以看出, 本题的非线性主要是由 $(1 + W'^2)^{3/2}$ 和 $(1 + W'^2)^{1/2}$ 中的 W'^2 引起的, 所以, 如果 $W'(\xi)$ 本身是小量, 则 $(1 + W'^2)^{3/2}$ 和 $(1 + W'^2)^{1/2}$ 的展开式是 $1 +$ 小量的二次项 $+ 小量的四次项相等. 即$

$$(1 + W'^2)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} W'^2 - \frac{1}{8} W'^4 + \dots, \quad (14a)$$

$$(1 + W'^2)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2} W'^2 + \frac{3}{8} W'^4 + \dots \quad (14b)$$

如果用(14)式的一阶近似, 即

$$(1 + W'^2)^{1/2} \approx 1, \quad (1 + W'^2)^{3/2} \approx 1, \quad (15)$$

则(12)式的一级近似就是一个线性的常微分方程, 而 m_0 和 Ω_0 是由这个一级近似的线性方程的解在满足边界条件(13a, b, c, d)时决定的, 其中, 只有两个独立的小量 α 和 β . 所以 $W(\xi)$ 和 $W'(\xi)$ 的一级近似中也只包含这两个小量. 如果我们采用(14)式中的二级近似小量, 即含有 α 和 β 的二级小量, 如 α^2 、 $\alpha\beta$ 和 β^2 . 则由 $W(\xi)$ 的近似式一定可以求出其二阶导数. 则 $W(\xi)$ 、 m_0 和 Ω_0 的待定系数一定是 α 和 β 的三次项组成的, 即 α^3 、 $\alpha^2\beta$ 、 $\alpha\beta^2$ 和 β^3 四种量. 由边界条件(13)式, 所有待定量都能唯一确定. 根据设计的计算精度, 我们可以选用合适的近似阶数. 这种计算方法实际是小参数摄动的解法, 只是本题有两个小参数 α 和 β , 计算时比较复杂. 一般情况下, 只要计算到二阶近似解, 就能满足精度的要求. 本文也只计算到

二级近似量。

2 略去 $(dW/d\xi)^2$ 后的一级近似解

从(12)式中略去 $(dW/d\xi)^2$ 以后, 就可以把(12)式改写为

$$\frac{d^2 W^{(1)}}{d\xi^2} = m^{(1)} - \Omega^{(1)}\xi + 6\alpha\xi^2, \quad (16)$$

其中 $W^{(1)}$, $m^{(1)}$ 和 $\Omega^{(1)}$ 分别是 W , m_0 和 Ω_0 的一级近似量, 确切地说 $W^{(1)}(\xi)$ 待定函数, $m^{(1)}$ 和 $\Omega^{(1)}$ 待定常数, 它们都将由边界条件来确定。 (16) 式积分两次以后, 得

$$\frac{dW^{(1)}}{d\xi} = m^{(1)}\xi - \frac{1}{2}\Omega^{(1)}\xi^2 + 2\alpha\xi^3 + A, \quad (17a)$$

$$W^{(1)} = \frac{1}{2}m^{(1)}\xi^2 - \frac{1}{6}\Omega^{(1)}\xi^3 + \frac{1}{2}\alpha\xi^4 + A\xi + B, \quad (17b)$$

其中, A 和 B 为积分常数。 端点条件为

$$W^{(1)}(0) = B = 0, \quad (18a)$$

$$W'^{(1)}(0) = A = 0, \quad (18b)$$

$$W^{(1)} = \frac{1}{2}m^{(1)} - \frac{1}{6}\Omega^{(1)} + \frac{1}{2}\alpha + A + B = \frac{1}{6}\beta, \quad (18c)$$

$$W'^{(1)} = m^{(1)} - \frac{1}{2}\Omega^{(1)} + 2\alpha + A = 0. \quad (18d)$$

线性代数方程(18)的解为

$$A = 0, \quad B = 0, \quad m^{(1)} = \alpha + \beta, \quad \Omega^{(1)} = 6\alpha + 2\beta. \quad (19)$$

所以, 一级近似解为

$$W^{(1)} = \frac{1}{2}\xi^2(1-\xi)^2\alpha + \frac{1}{6}\xi^2(3-2\xi)\beta. \quad (20)$$

而 $W^{(1)}$ 的导数为

$$W'^{(1)} = \frac{dW^{(1)}}{d\xi} = \xi(1-\xi)(1-2\xi)\alpha + \xi(1-\xi)\beta, \quad (21a)$$

$$W''^{(1)} = \frac{d^2 W^{(1)}}{d\xi^2} = (1-6\xi+6\xi^2)\alpha + (1-2\xi)\beta. \quad (21b)$$

上式也可以简化为

$$\frac{dW^{(1)}}{d\xi} = \Phi_1\alpha + \Phi_2\beta, \quad \frac{d^2 W^{(1)}}{d\xi^2} = \frac{d\Phi_1}{d\xi}\alpha + \frac{d\Phi_2}{d\xi}\beta, \quad (22)$$

其中

$$\Phi_1 = \xi(1-\xi)(1-2\xi), \quad \Phi_2 = \xi(1-\xi), \quad (22)'$$

$$\frac{d\Phi_1}{d\xi} = (1-6\xi+6\xi^2), \quad \frac{d\Phi_2}{d\xi} = (1-2\xi). \quad (22)''$$

由此, (20) 式就是本题的一级近似解, 其一阶、二阶导数由(22)式给出。

3 由一级近似解求 $W^{(2)}(\xi)$ 的二级近似解

由上节的结果可以看到, 本题的一级近似解是 α 和 β 的线性组合, 且满足了所有的端点条

件(13)式· 二级近似解是在(14)式的展开式中略去了(α, β)的四级及四级以上项获得的·

因此, 如果我们在二级近似中保留了 $W^{(1)}$ 的(α, β)的二级近似项, 则有

$$\left(1 + \left(\frac{dW^{(1)}}{d\xi}\right)^2\right)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dW^{(1)}}{d\xi}\right)^2, \tag{23a}$$

$$\left(1 + \left(\frac{dW^{(1)}}{d\xi}\right)^2\right)^{3/2} \approx 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{dW^{(1)}}{d\xi}\right)^2 \tag{23b}$$

或更精确地, 有

$$\left(1 + \left(\frac{dW^{(1)}}{d\xi}\right)^2\right)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} (\Phi_1^2 \alpha^2 + 2 \Phi_1 \Phi_2 \alpha \beta + \Phi_2^2 \beta^2), \tag{24a}$$

$$\left(1 + \left(\frac{dW^{(1)}}{d\xi}\right)^2\right)^{3/2} \approx 1 + \frac{3}{2} (\Phi_1^2 \alpha^2 + 2 \Phi_1 \Phi_2 \alpha \beta + \Phi_2^2 \beta^2). \tag{24b}$$

同时, 待定常数 m_0 和 Ω_0 也可以展开为

$$m_0 - \Omega_0 \xi = m^{(1)} - \Omega^{(1)} \xi + (m_1^{(2)} - \Omega_1^{(2)} \xi) \alpha^3 + (m_2^{(2)} - \Omega_2^{(2)} \xi) \alpha^2 \beta + (m_3^{(2)} - \Omega_3^{(2)} \xi) \alpha \beta^2 + (m_4^{(2)} - \Omega_4^{(2)} \xi) \beta^3, \tag{25}$$

其中, $m^{(1)}$ 和 $\Omega^{(1)}$ 分别是前一节中已决定的 m_0 和 Ω_0 一级近似, $m_i^{(2)}$ 和 $\Omega_i^{(2)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) 是(α, β)的二级近似项, 它们将由二级近似项的近似端点条件来决定, 端点的边界条件为

$$W^{(2)}(0) = W^{(2)'}(0) = W^{(2)}(1) = W^{(2)'}(1) = 0, \tag{26}$$

这里必须指出二级近似项都含有 α^3 、 $\alpha^2\beta$ 、 $\alpha\beta^2$ 和 β^3 · 如果采用与式(25)类似的记号, 则详细的边界条件为

$$\text{项 } \alpha^3 \quad W_1^{(2)}(0) = 0, \quad W_1^{(2)'}(0) = 0, \tag{27a}$$

$$\text{项 } \alpha^2\beta \quad W_2^{(2)}(0) = 0, \quad W_2^{(2)'}(0) = 0, \tag{27b}$$

$$\text{项 } \alpha\beta^2 \quad W_3^{(2)}(0) = 0, \quad W_3^{(2)'}(0) = 0, \tag{27c}$$

$$\text{项 } \beta^3 \quad W_4^{(2)}(0) = 0, \quad W_4^{(2)'}(0) = 0; \tag{27d}$$

$$\text{项 } \alpha^3 \quad W_1^{(2)}(1) = 0, \quad W_1^{(2)'}(1) = 0, \tag{28a}$$

$$\text{项 } \alpha^2\beta \quad W_2^{(2)}(1) = 0, \quad W_2^{(2)'}(1) = 0, \tag{28b}$$

$$\text{项 } \alpha\beta^2 \quad W_3^{(2)}(1) = 0, \quad W_3^{(2)'}(1) = 0, \tag{28c}$$

$$\text{项 } \beta^3 \quad W_4^{(2)}(1) = 0, \quad W_4^{(2)'}(1) = 0. \tag{28d}$$

从(12)和(25)式可以推导出二级近似的微分方程, 其表达式为

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 W_1^{(2)}}{d\xi^2} \alpha^3 + \frac{d^2 W_2^{(2)}}{d\xi^2} \alpha^2 \beta + \frac{d^2 W_3^{(2)}}{d\xi^2} \alpha \beta^2 + \frac{d^2 W_4^{(2)}}{d\xi^2} \beta^3 = \\ & (m_1^{(2)} - \Omega_1^{(2)} \xi) \alpha^3 + (m_2^{(2)} - \Omega_2^{(2)} \xi) \alpha^2 \beta + (m_3^{(2)} - \Omega_3^{(2)} \xi) \alpha \beta^2 + (m_4^{(2)} - \Omega_4^{(2)} \xi) \beta^3 + \\ & \frac{3}{2} \left[\frac{d\Phi_1}{d\xi} \alpha + \frac{d\Phi_2}{d\xi} \beta \right] (\Phi_1^2 \alpha^2 + 2 \Phi_1 \Phi_2 \alpha \beta + \Phi_2^2 \beta^2) + \\ & 6\alpha \left[\xi \int_0^\xi \Phi_1^2 d\xi \alpha^2 + 2\xi \int_0^\xi \Phi_1 \Phi_2 d\xi \alpha \beta + \xi \int_0^\xi \Phi_2^2 d\xi \beta^2 \right] - \end{aligned}$$

$$6\alpha \left(\int_0^\xi \xi \Phi_1^2 d\xi \alpha^2 + 2 \int_0^\xi \xi \Phi_1 \Phi_2 d\xi \alpha\beta + \int_0^\xi \xi \Phi_2^2 d\xi \beta^2 \right). \quad (29)$$

(29) 式中已略去了小于 α^5 、 $\alpha^4\beta$ 、 $\alpha^3\beta^2$ 、 $\alpha^2\beta^3$ 、 $\alpha\beta^4$ 和 β^5 的各级近似量, 而且(29) 式对任何小量的 (α , β) 都适用, 因此可以得到下列独立的微分方程

α^3 项给出

$$\frac{d^2 W_1}{d\xi^2} = \binom{(2)}{m_1 - \Omega_1 \xi} + \frac{3}{2} \Phi_1^2 \frac{d\Phi_1}{d\xi} + 6\xi \int_0^\xi \Phi_1^2 d\xi - 6 \int_0^\xi \xi \Phi_1^2 d\xi \quad (30a)$$

$\alpha^2\beta$ 项给出

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W_2}{d\xi^2} = & \binom{(2)}{m_2 - \Omega_2 \xi} + \frac{3}{2} \Phi_1^2 \frac{d\Phi_2}{d\xi} + 3 \Phi_1 \Phi_2 \frac{d\Phi_1}{d\xi} + \\ & 12\xi \int_0^\xi \Phi_1 \Phi_2 d\xi - 12 \int_0^\xi \xi \Phi_1 \Phi_2 d\xi \end{aligned} \quad (30b)$$

$\alpha\beta^2$ 项给出

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W_3}{d\xi^2} = & \binom{(2)}{m_3 - \Omega_3 \xi} + \frac{3}{2} \Phi_2^2 \frac{d\Phi_1}{d\xi} + 3 \Phi_1 \Phi_2 \frac{d\Phi_2}{d\xi} + \\ & 6\xi \int_0^\xi \Phi_2^2 d\xi - 6 \int_0^\xi \xi \Phi_2^2 d\xi \end{aligned} \quad (30c)$$

β^3 项给出

$$\frac{d^2 W_4}{d\xi^2} = \binom{(2)}{m_4 - \Omega_4 \xi} + \frac{3}{2} \Phi_2^2 \frac{d\Phi_2}{d\xi}. \quad (30d)$$

由 Φ_1 和 Φ_2 的表达式, 我们可以得到

$$\Phi_1^2 = \xi^2 - 6\xi^3 + 13\xi^4 - 12\xi^5 + 4\xi^6, \quad (31a)$$

$$2\Phi_1\Phi_2 = 2\xi^2 - 8\xi^3 + 10\xi^4 - 4\xi^5, \quad (31b)$$

$$\Phi_2^2 = \xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4; \quad (31c)$$

和

$$\frac{3}{2} \Phi_1^2 \frac{d\Phi_1}{d\xi} = \frac{3}{2} \xi^2 - 18\xi^3 + \frac{165}{2} \xi^4 - 189\xi^5 + 231\xi^6 - 144\xi^7 + 36\xi^8, \quad (32a)$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \Phi_1^2 \frac{d\Phi_2}{d\xi} + 3\Phi_1\Phi_2 \frac{d\Phi_1}{d\xi} = \\ \frac{9}{2} \xi^2 - 42\xi^3 + \frac{285}{2} \xi^4 - 225\xi^5 + 168\xi^6 - 48\xi^7, \end{aligned} \quad (32b)$$

$$\frac{3}{2} \Phi_2^2 \frac{d\Phi_1}{d\xi} + 3\Phi_1\Phi_2 \frac{d\Phi_2}{d\xi} = \frac{9}{2} \xi^2 - 30\xi^3 + \frac{135}{2} \xi^4 - 63\xi^5 + 21\xi^6, \quad (32c)$$

$$\frac{3}{2} \Phi_2^2 \frac{d\Phi_2}{d\xi} = \frac{3}{2} \xi^2 - 6\xi^3 + \frac{15}{2} \xi^4 - 3\xi^5; \quad (32d)$$

$$6\xi \int_0^\xi \Phi_1^2 d\xi = 2\xi^4 - 9\xi^5 + \frac{78}{5} \xi^6 - 12\xi^7 + \frac{24}{7} \xi^8, \quad (33a)$$

$$12\xi \int_0^\xi \Phi_1 \Phi_2 d\xi = 4\xi^4 - 12\xi^5 + 12\xi^6 - 4\xi^7, \quad (33b)$$

$$6\xi \int_0^\xi \Phi_2^2 d\xi = 2\xi^4 - 3\xi^5 + \frac{6}{5} \xi^6; \quad (33c)$$

$$-6 \int_0^\xi \xi \Phi_1^2 d\xi = -\frac{3}{2} \xi^4 + \frac{36}{5} \xi^5 - 13\xi^6 + \frac{72}{7} \xi^7 - 3\xi^8, \quad (34a)$$

$$- 12 \int_0^\xi \xi \Phi_1 \Phi_2 d\xi = - 3\xi^4 + \frac{48}{5}\xi^5 - 10\xi^6 + \frac{24}{7}\xi^7, \quad (34b)$$

$$- 6 \int_0^\xi \xi \Phi_2^2 d\xi = - \frac{3}{2}\xi^4 + \frac{12}{5}\xi^5 - \xi^6. \quad (34c)$$

将(32)至(34)诸式代入方程(30a~ d)四式中,可得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W_1^{(2)}}{d\xi^2} = & m_1 - \Omega_1 \xi + \frac{3}{2}\xi^2 - 18\xi^3 + 83\xi^4 - \\ & \frac{954}{5}\xi^5 + \frac{1168}{5}\xi^6 - \frac{1020}{7}\xi^7 + \frac{255}{7}\xi^8, \end{aligned} \quad (35a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W_2^{(2)}}{d\xi^2} = & m_2 - \Omega_2 \xi + \frac{9}{2}\xi^2 - 42\xi^3 + \frac{287}{2}\xi^4 - \\ & \frac{1137}{5}\xi^5 + 170\xi^6 - \frac{340}{7}\xi^7, \end{aligned} \quad (35b)$$

$$\frac{d^2 W_3^{(2)}}{d\xi^2} = m_3 - \Omega_3 \xi + \frac{9}{2}\xi^2 - 30\xi^3 + 68\xi^4 - \frac{318}{5}\xi^5 + \frac{106}{5}\xi^6, \quad (35c)$$

$$\frac{d^2 W_4^{(2)}}{d\xi^2} = m_4 - \Omega_4 \xi + \frac{3}{2}\xi^2 - 6\xi^3 + \frac{15}{2}\xi^4 - 3\xi^5. \quad (35d)$$

方程(35)诸式可用于确定 $W_1(\xi)$, $W_2(\xi)$, $W_3(\xi)$ 和 $W_4(\xi)$ 第二级近似项的表达式. 将(35)式积分一次,并考虑到 $W_1(\xi)$ 、 $W_2(\xi)$ 、 $W_3(\xi)$ 和 $W_4(\xi)$ 的一次导数在 $\xi = 0$ 的边界条件,可得

$$\begin{aligned} \frac{dW_1^{(2)}}{d\xi} = & m_1 \xi - \frac{1}{2}\Omega_1 \xi^2 + \frac{1}{2}\xi^3 - \frac{9}{2}\xi^4 + \frac{83}{5}\xi^5 - \\ & \frac{159}{5}\xi^6 + \frac{1168}{35}\xi^7 - \frac{255}{14}\xi^8 + \frac{85}{21}\xi^9, \end{aligned} \quad (36a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dW_2^{(2)}}{d\xi} = & m_2 \xi - \frac{1}{2}\Omega_2 \xi^2 + \frac{3}{2}\xi^3 - \frac{21}{2}\xi^4 + \\ & \frac{287}{10}\xi^5 - \frac{379}{10}\xi^6 + \frac{170}{7}\xi^7 - \frac{85}{14}\xi^8, \end{aligned} \quad (36b)$$

$$\frac{dW_3^{(2)}}{d\xi} = m_3 \xi - \frac{1}{2}\Omega_3 \xi^2 + \frac{3}{2}\xi^3 - \frac{15}{2}\xi^4 + \frac{68}{5}\xi^5 - \frac{53}{5}\xi^6 + \frac{106}{35}\xi^7, \quad (36c)$$

$$\frac{dW_4^{(2)}}{d\xi} = m_4 \xi - \frac{1}{2}\Omega_4 \xi^2 + \frac{1}{2}\xi^3 - \frac{3}{2}\xi^4 + \frac{3}{2}\xi^5 - \frac{1}{2}\xi^6. \quad (36d)$$

再将(36)式积分一次,同时考虑到 $\xi = 0$ 处的边界条件,可推出

$$\begin{aligned} W_1 = & \frac{1}{2}m_1 \xi^2 - \frac{1}{6}\Omega_1 \xi^3 + \frac{1}{8}\xi^4 - \frac{9}{10}\xi^5 + \\ & \frac{83}{30}\xi^6 - \frac{159}{35}\xi^7 + \frac{146}{35}\xi^8 - \frac{85}{42}\xi^9 + \frac{17}{42}\xi^{10}, \end{aligned} \quad (37a)$$

$$\begin{aligned} W_2 = & \frac{1}{2}m_2 \xi^2 - \frac{1}{6}\Omega_2 \xi^3 + \frac{3}{8}\xi^4 - \frac{21}{10}\xi^5 + \\ & \frac{287}{60}\xi^6 - \frac{379}{70}\xi^7 + \frac{85}{28}\xi^8 - \frac{85}{126}\xi^9, \end{aligned} \quad (37b)$$

$$W_3 = \frac{1}{2}m_4 \xi^2 - \frac{1}{6}\Omega_3 \xi^3 + \frac{3}{8}\xi^4 - \frac{3}{2}\xi^5 + \frac{34}{15}\xi^6 - \frac{53}{35}\xi^7 + \frac{53}{140}\xi^8, \quad (37c)$$

$$W_4^{(2)} = \frac{1}{2} m_4^{(2)} \xi^2 - \frac{1}{6} \Omega_4^{(2)} \xi^3 + \frac{1}{8} \xi^4 - \frac{3}{10} \xi^5 + \frac{1}{4} \xi^6 - \frac{1}{14} \xi^7. \quad (37d)$$

8 个未知常数 $m_i^{(2)}$ 和 $\Omega_i^{(2)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) 可以由 $\xi = 1$ 处的边界条件确定, 它们具有以下形式

$$\begin{cases} W_1^{(2)}(1) = \frac{1}{2} m_1^{(2)} - \frac{1}{6} \Omega_1^{(2)} + \frac{1}{840} = 0, \\ W_1^{(2),\prime}(1) = m_1^{(2)} - \frac{1}{2} \Omega_1^{(2)} + \frac{1}{210} = 0; \end{cases} \quad (38a)$$

$$\begin{cases} W_2^{(2)}(1) = \frac{1}{2} m_2^{(2)} - \frac{1}{6} \Omega_2^{(2)} + \frac{13}{2520} = 0, \\ W_2^{(2),\prime}(1) = m_2^{(2)} - \frac{1}{2} \Omega_2^{(2)} + \frac{1}{70} = 0; \end{cases} \quad (38b)$$

$$\begin{cases} W_3^{(2)}(1) = \frac{1}{2} m_3^{(2)} - \frac{1}{6} \Omega_3^{(2)} + \frac{1}{168} = 0, \\ W_3^{(2),\prime}(1) = m_3^{(2)} - \frac{1}{2} \Omega_3^{(2)} + \frac{1}{35} = 0; \end{cases} \quad (38c)$$

$$\begin{cases} W_4^{(2)}(1) = \frac{1}{2} m_4^{(2)} - \frac{1}{6} \Omega_4^{(2)} + \frac{1}{280} = 0, \\ W_4^{(2),\prime}(1) = m_4^{(2)} - \frac{1}{2} \Omega_4^{(2)} = 0. \end{cases} \quad (38d)$$

从以上方程中可以求解出

$$m_1^{(2)} = \frac{1}{420}, \quad \Omega_1^{(2)} = \frac{1}{70}. \quad (39a)$$

$$m_2^{(2)} = -\frac{1}{420}, \quad \Omega_2^{(2)} = \frac{1}{42}. \quad (39b)$$

$$m_3^{(2)} = \frac{3}{140}, \quad \Omega_3^{(2)} = \frac{1}{10}. \quad (39c)$$

$$m_4^{(2)} = -\frac{3}{140}, \quad \Omega_4^{(2)} = -\frac{3}{70}. \quad (39d)$$

将(39)式代(36)和(37)式可得

$$\begin{cases} W(\xi) = W_1^{(2)}(\xi) \alpha^3 + W_2^{(2)}(\xi) \alpha^2 \beta + W_3^{(2)}(\xi) \alpha \beta^2 + W_4^{(2)}(\xi) \beta^3, \\ \frac{dW(\xi)}{d\xi} = \frac{dW_1^{(2)}(\xi)}{d\xi} \alpha^3 + \frac{dW_2^{(2)}(\xi)}{d\xi} \alpha^2 \beta + \frac{dW_3^{(2)}(\xi)}{d\xi} \alpha \beta^2 + \frac{dW_4^{(2)}(\xi)}{d\xi} \beta^3, \end{cases} \quad (40)$$

式中, $W_i^{(2)}(\xi)$ 和 $dW_i^{(2)}(\xi)/d\xi$ ($i = 1, 2, 3, 4$) 的表达式为

$$W_1^{(2)} = \frac{1}{840} \xi^2 (1 - \xi)^2 (1 + 104\xi^2 - 548\xi^3 + 1124\xi^4 - 1020\xi^5 + 340\xi^6), \quad (41a)$$

$$W_2^{(2)} = -\frac{1}{2520} \xi^2 (1 - \xi)^2 (1 - 2\xi) (3 + 22\xi - 872\xi^2 + 1700\xi^3 - 850\xi^4), \quad (41b)$$

$$W_3^{(2)} = \frac{1}{840} \xi^2 (1 - \xi)^2 (9 + 4\xi + 314\xi^2 - 636\xi^3 + 318\xi^4), \quad (41c)$$

$$W_4^{(2)} = -\frac{1}{280} \xi^2 (1 - \xi)^2 (1 - 2\xi) (3 + 10\xi - 10\xi^2), \quad (41d)$$

和

$$\begin{aligned} \frac{dW_1^{(2)}}{d\xi} &= \frac{1}{420} \xi (1 - \xi) (1 - 2\xi) (1 + 208\xi^2 - 1266\xi^3 + \\ &\quad 2758\xi^4 - 2550\xi^5 + 850\xi^6), \end{aligned} \quad (42a)$$

$$\frac{dW_2}{d\xi} = \frac{1}{420} \xi(1-\xi)(1+6\xi-624\xi^2+3786\xi^3-8268\xi^4+7650\xi^5-2550\xi^6), \quad (42b)$$

$$\frac{dW_3}{d\xi} = \frac{1}{140} \xi(1-\xi)(1-2\xi)(3+2\xi+210\xi^2-424\xi^3+212\xi^4), \quad (42c)$$

$$\frac{dW_4}{d\xi} = -\frac{1}{140} \xi(1-\xi)(3-70\xi^2+140\xi^3-70\xi^4). \quad (42d)$$

至此, 我们求得了二级近似项的一切解析解, 和第 2 节的一级近似解的经过结合在一起, 其和就是精确到 $\alpha^3, \alpha^2\beta, \alpha\beta^2$ 和 β^3 项的非线性近似解, 它们可以用来进行桥梁两岸高程不一样时 (即 $\beta \neq 0$) 的工程计算。

4 桥梁弧长的计算

在小挠度理论中, 桥长就等于河的宽度, 其实就是非线性理论的零阶近似的结果。而在大挠度非线性理论中, 由于桥梁的弯曲, 桥的实际长度应该是桥曲线的弧长。我们将桥梁的弧长设为 L , 根据第 1, 2 节的讨论, 桥梁的弧长可以由下式计算得出

$$L = \int_0^H \left[1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx. \quad (43)$$

其无量纲形式为

$$\frac{L}{H} = \int_0^1 \left[1 + \left(\frac{dW}{d\xi} \right)^2 \right]^{1/2} d\xi. \quad (43)'$$

如果 $dW/d\xi$ 是小量, 即上式右边可以采用近似式

$$\left[1 + \left(\frac{dW}{d\xi} \right)^2 \right]^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{d\xi} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{dW}{d\xi} \right)^4 + \dots \quad (44)$$

那么, 由(43)' 式给出

$$\frac{L}{H} = 1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{dW}{d\xi} \right)^2 d\xi - \frac{1}{8} \int_0^1 \left(\frac{dW}{d\xi} \right)^4 d\xi + O\left(\left(\frac{dW}{d\xi} \right)^6 \right). \quad (45)$$

又, 根据前文

$$\frac{dW}{d\xi} = \frac{dW}{d\xi}^{(1)} + \frac{dW}{d\xi}^{(2)} + O\left(\frac{dW}{d\xi}^{(3)} \right), \quad (45)'$$

其中 $O(\dots)$ 表示略去的小量, 而

$$\frac{dW}{d\xi}^{(1)} = \Phi_1 \alpha + \Phi_2 \beta, \quad \frac{dW}{d\xi}^{(2)}(\xi) = \Psi_1 \alpha^3 + \Psi_2 \alpha^2 \beta + \Psi_3 \alpha \beta^2 + \Psi_4 \beta^3, \quad (46)$$

式中

$$\Psi_i = \frac{dW_i^{(2)}(\xi)}{d\xi} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

将(45)' 和(46) 式代入到(45) 式中, 并保留到 α 和 β 项的四次项, 可得

$$\begin{aligned} \frac{L}{H} = & 1 + \frac{1}{2} \left[\alpha^2 \int_0^1 \Phi_1^2 d\xi + 2\alpha\beta \int_0^1 \Phi_1 \Phi_2 d\xi + \beta^2 \int_0^1 \Phi_2^2 d\xi \right] + \\ & \frac{1}{8} \left[\int_0^1 (8\Phi_1 \Phi_2 - \Phi_1^4) d\xi \alpha^4 + 4 \int_0^1 (2\Phi_1 \Psi_2 + 2\Phi_2 \Psi_1 - \Phi_1^3 \Phi_2) d\xi \alpha^3 \beta + \right. \\ & \left. \int_0^1 (2\Phi_1 \Psi_3 + 2\Phi_2 \Psi_2 - 6\Phi_1^2 \Phi_2^2) d\xi \alpha^2 \beta^2 + \right. \end{aligned}$$

$$4 \int_0^1 (2 \Phi_1 \Psi_4 + 2 \Phi_2 \Psi_3 - \Phi_1 \Phi_2^3) d\xi \alpha \beta^3 + \int_0^1 (8 \Phi_2 \Psi_4 - \Phi_2^4) d\xi \beta^4 + O(\alpha^6, \alpha^5 \beta, \alpha^4 \beta^2, \alpha^3 \beta^3, \alpha^2 \beta^4, \alpha \beta^5, \beta^6), \quad (47)$$

其中, $O(\alpha^k \beta^l)$ ($k+l \geq 6$) 是高阶小量。必须指出, 在通常的弧长计算中, 只要研究大挠度非线性问题的一级近似就有足够的精度, 因此(47)可简化为

$$\frac{L}{H} = 1 + \frac{1}{2} \alpha^2 \int_0^1 \Phi_1^2 d\xi + \alpha \beta \int_0^1 \Phi_1 \Phi_2 d\xi + \frac{1}{2} \beta^2 \int_0^1 \Phi_2^2 d\xi. \quad (48)$$

在利用了(33)式以后, 我们有

$$\int_0^1 \Phi_1^2 d\xi = \frac{1}{210}, \quad \int_0^1 \Phi_1 \Phi_2 d\xi = 0, \quad \int_0^1 \Phi_2^2 d\xi = \frac{1}{30}. \quad (49)$$

则(48)式可以写成

$$\frac{L}{H} = 1 + \frac{1}{420} \alpha^2 + \frac{1}{60} \beta^2 + O(\alpha^4, \alpha^3 \beta, \alpha^2 \beta^2, \alpha \beta^3, \beta^4). \quad (50)$$

只要 α 和 β 已知或可以估算, 则桥梁的弧长与河宽之比, 完全可以从(50)式计算出。由 α 和 β 的定义, (50)式也可以写成

$$\frac{L}{H} = 1 + \frac{1}{60480} \left(\frac{qH^3}{EI} \right)^2 + \frac{3}{5} \left(\frac{\Delta}{H} \right)^2. \quad (51)$$

式中 q 、 H 、 EI 和 Δ 的定义见图 1。由于篇幅的限制, 这里将不再进行具体的计算。

5 讨 论

从上面的研究中, 我们可以看到, 本问题的关键因素是 α 和 β 两个小量, α 与外载荷和自重 (q) 有关, 但其大小可以用加大抗弯刚度来调节, 一般都可以调节得很小, 而 β 是由两岸的高程差 Δ 引起的, 一般说来, 只要有高差, 它总比 α 的影响大。以弧长的计算为例, 如果河宽 H 是 100 m, 高差 Δ 为 5 m, 则高差引起的弧长增量为 $\frac{3}{5} (\Delta/H)^2 H = 0.15$ m。所以, 桥梁的实际长度应该是 100.15 m, 而不是小挠度计算的 100 m。这当然可以在建造过程中按 100.16 m 准备, 甚至按 101 m ~ 102 m 准备, 照顾到横载弯曲的影响, 这并非是不可克服的困难。但是, 跨河桥梁上的铁轨中部的梯度, 将远远超过两岸端点所引起的梯度 5/100, 约在 15/100 ~ 20/100 之间, 这是绝对不允许的, 这一点可以用计算 $dW/d\xi$ 在各点的值加以证明, 但是也可以用图 4 的形状估计出来, $dW/d\xi$ 的切线在桥梁中部绝对大于两端连线的梯度, 所以铁路桥梁一般不应用两端有高差的计算值进行设计。

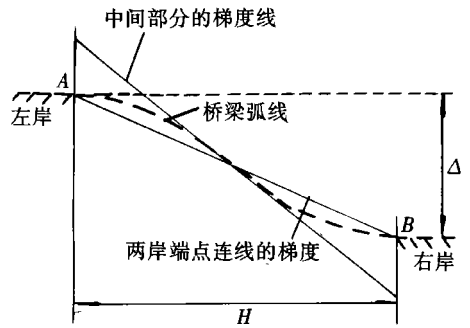


图 4 桥梁两岸端点连线和桥梁中间部分切线斜度的比较

由以上的分析我们得出如下建议, 即过河的铁路桥梁尽可能不用两端有高差的设计方案, (其中桥梁两端的弯矩一定很大, 它与在 $\xi=0$ 和 $\xi=1$ 处的 $d^2W/d\xi^2$ 成正比, 所以在桥梁的两端应该加强抗弯刚度)。如果两岸确有高差, 则这一高差应该在两岸陆地上用几公里坡度的轨道设计加以解决, 使桥梁的高差完全消失, 这样一来, 高差引起的困难就不存在了。如果两岸高差没有了, 即 $\Delta=0$, 则有

$$\beta = 6 \frac{\Delta}{H} = 0, \quad (52)$$

只有一个微量 α 控制全局, 于是, 我们有

$$W(\xi) = W^{(1)}(\xi) + W^{(2)}(\xi) + O(\alpha^5), \quad (53)$$

其中

$$W^{(1)} = \frac{1}{2} \xi^2 (1 - \xi)^2 \alpha, \quad (54a)$$

$$W^{(2)} = \frac{1}{840} \xi^2 (1 - \xi^2) (1 + 104 \xi^2 - 548 \xi^3 + 1124 \xi^4 - 1020 \xi^5 + 340 \xi^6) \alpha^3. \quad (54b)$$

其它一些物理量也可以很方便地求得。

[参 考 文 献]

本文不必参考任何文献。文中有关小挠度的理论在一般的材料力学书中都能见到, 有关非线性大挠度梁的基本微分方程及其近似解法, 亦是首次在本文中提出。本人未见过宁波甬江大桥的设计, 但曾到现场参观过, 只是未曾听见有关技术人员具体解说过, 有些江宽、高差和两端接不上的数据, 只是目测估计的, 如有不妥之处, 还请谅解。

Second Order Approximation Solution of Nonlinear Large Deflection Problem of Yongjiang Railway Bridge in Ningbo

CHIEN Wei zang

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200436, P R China)

Abstract: The solution and computational aspects on nonlinear deflection of Yongjiang Railway Bridge in Ningbo were investigated. An approximate iteration algorithm on nonlinear governing equation was presented, and the obtained results show that, if altitude difference and span of the riverbanks are taken as 5 meters and 100 meters, respectively, the maximum gradient in the middle of the bridge exceeds 5%, much larger than maximum allowance gradient in railway design code. Therefore, a new solution scheme for decreasing gradient of the bridge is put forward, that is, the altitude difference between two riverbanks can be decreased to about 1/10 of the initial magnitude by building roadbeds with 0.5% gradient and 1 kilometer length at two riverbanks. As a direct result, the deflection gradient of the railway bridge is much reduced and the value is between 0.5% ~ 0.6%.

Key words: large deflection; elastic modulus; cantilever beam