

一类数字映射的全局结构*

卢钦和 许政范 林福琴 刘曾荣

(苏州大学) (上海海运学院) (苏州大学)
(1990年3月23日收到)

摘 要

本文讨论映射 $T_n: x \rightarrow [x^2]_n$ 的全局结构. T_2 具有对称的不连通子结构的性质和 [1] 用计算机得到的结果一致. 但当 $n=3$ 时, 这些子结构不再具有对称性了. 本文得到随 n 增大时 T_n 的全局分叉结构, 并得到了映射 $T_{n,\mu}: x \rightarrow [\mu x^2]_n$ 的类似结果.

关键词 数字映射 分叉 全局结构

一、引 言

由 Mandelbort 提出的分形^[2]几何是数学上研究复数集合的有力工具. 借助于一些简单程序, 计算机可用来研究 Mandelbort 集合的边界. A. K. Dewdney^[1] 利用计算机研究了数字迭代 $T_2: x \rightarrow [x^2]_2$, 发现一些有趣的现象. 同时, 他还提出了一些没有解决的问题. 本文从数学上讨论了这些问题, 并给出了部分答案.

我们考虑数字映射 $T_n: x \rightarrow [x^2]_n$, 这里 x 是 n 位的自然数, $[x^2]_n$ 表示 x^2 的最后 n 位数. 利用计算机, [1] 发现 T_2 有六个不相连的子结构, 这些结构具有高度对称性. A. K. Dewdney 问 T_2 的这一结论在 $n > 2$ 时是否仍然成立.

本文不仅回答了这些问题, 还证明了 T_n 的全局分叉结构, 同时也证明了 $T_{n,\mu}: x \rightarrow [\mu x^2]_n$ 的类似结果.

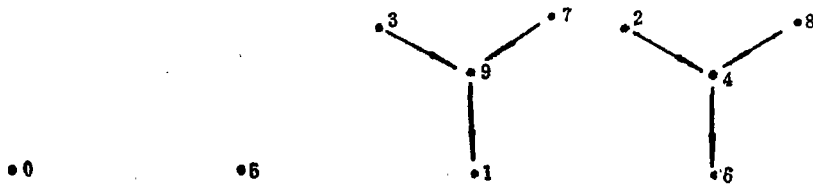
二、 T_2 和 T_3 的全局结构

首先, 我们讨论 T_2 和 T_3 的周期点.

引理 2.1 T_1 的全局结构如图 1 所示.

从引理知, T_1 有四个不动点, 其他点经过两步迭代之后都被吸引到这些不动点. 这些不相连的子结构形成两对对称对.

* 创刊十周年暨一百周年纪念特刊(I)论文.

图1 T_1 的全局结构

引理2.2 (1) T_2 有四个不动点; (2) T_3 有四个不动点; (3) T_2 和 T_3 都没有 P -2和 P -3点.

证明 这里只证(1), 其他证明类似.

x 是一个两位自然数, 写成 $x=10a+b$, 这里 a 和 b 是一位数. 如果 x 是 T_2 的不动点, 则 a 和 b 满足方程 $[20ab+b^2]_2=10a+b$. 比较等式两边第二位数字, $[b^2]_1=b$, 所以 b 是 0, 1, 5或6. 再比较两边第一位数字得到 a ,

1: $b=0$, 则 $a=0$; 2: $b=1$, 则 $a=0$; 3: $b=5$, 则 $a=2$; 4: $b=6$, 则 $a=7$.

所以00, 01, 25, 76是 T_2 的四个不动点.

用类似方法可以得到其他周期点.

引理2.3 (1) T_2 有两组 P -4点, 它们是(21, 41, 81, 61)和(16, 56, 36, 96);

(2) T_3 有两组 P -4点, 它们是(201, 401, 801, 601)和(176, 976, 576, 776).

引理2.4 T_3 的两组 P -20点如图2所示.

121	641	881	161	921	241	081	561	721	
761								841	
681	041	321	361	481	441	521	961	281	
016	256	536	296	616	456	936	096	216	
196								656	
176	056	416	696	736	856	816	896	336	

图2 T_3 的两组 P -20点

接下来我们讨论 T_2 和 T_3 的吸引域.

引理2.5 (1)若两位数 a 的末位是0, 则 $[a^2]_2=00$;

(2)若两位数 a 的末位是5, 则 $[a^2]_2=25$.

利用这一引理, 有18个数经过一步迭代被吸引到00或25.

引理2.6 (1)若 a 是一个两位数, 则 $[(100 \mp a)^2]_2=[a^2]_2$;

(2)若 a 是一个两位数, 则 $[(50 \pm a)^2]_2=[a^2]_2$.

根据这个引理, 不动点01, 76和两组 P -4点的每一点都有三个点作为它的一步吸引域. 这样不动点, P -4点和它们一步吸引域中含有60个点, 它们的个位数是0, 1, 4, 5, 6, 9. 剩下的点的个位数是2, 3, 7, 8.

引理2.7 不动点和 P -4点的一步吸引域中的点, 若十位数是偶数, 个位数是4或9, 则它们有自己的一步吸引域.

根据这引理, 在 P -4 点的一步吸引域中只有 49, 24, 89, 29, 69, 09, 04, 84, 44, 64 有它们自己的一步吸引域. 很容易写出 04, 09, 49, 64, 44 的吸引域, 剩下要讨论的是 24, 89, 29, 69 和 84.

引理 2.8 (1) 若两位数 a 是偶数, 则有: $[(25+a)^2]_2 = [a^2+25]_2$;

(2) 若两位数 a 是奇数, 则有: $[(25+a)^2]_2 = [a^2+75]_2 = [a^2-25]_2$.

根据这个引理, 我们就能发现 24, 89, 29, 69, 84 的吸引域. 类似地讨论, 我们可以发现 T_2 不动点和 P -4 点, P -20 点的吸引域.

这样我们就得到了 T_2 和 T_3 的全局结构.

定理 2.1 T_2 的全局结构包含六个不连通的子结构如图 3 所示.

在图 3 中, 我们看到六个子结构形成一些对, 每一对都高度对称.

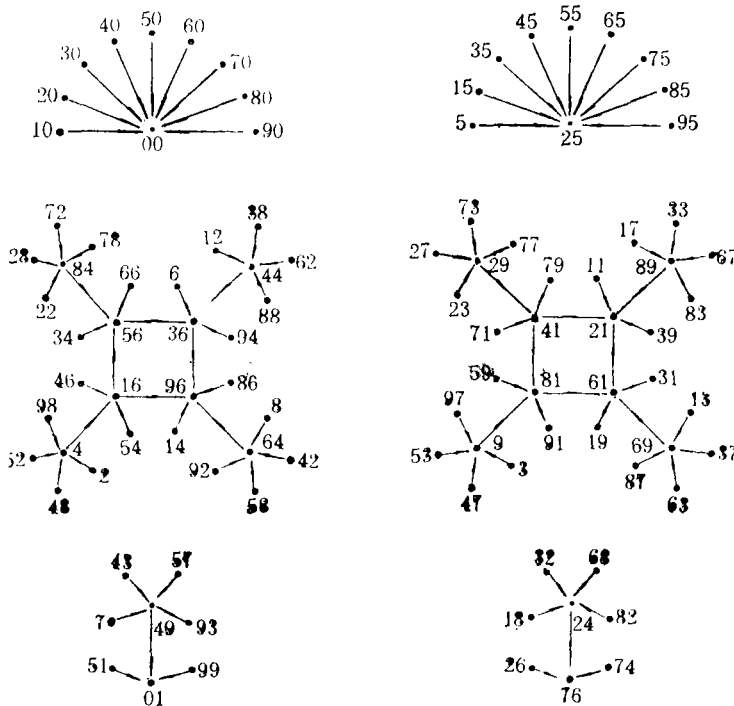


图 3 T_2 的全局结构

定理 2.2 T_3 的全局结构包含八个不连通的子结构, 如图 4 到图 7 所示.

从定理 2.2 知, 这八个子结构不形成对称的对, 即 T_3 不再具有 T_2 那种对称性.

三、 T_n 的全局分叉结构

在 T_2 和 T_3 结论的基础上, 我们讨论随 n 增大时 T_n 的分叉现象.

引理 3.1 对任意 $n > 3$, T_n 有四个不动点.

证明 用归纳法, 设 $A = (00 \dots 0)$, $B = (00 \dots 1)$, $C = (\dots 025)$, $D = (\dots 376)$ 是 T_{n-1} 的四个不动点, 这里 A, B, C, D 是 $n-1$ 位数. 对 A 若 $10^n \times a + A$ 是 T_n 的不动点, 则 a 满足关系 $[2a \times 0 + 0]_1 = a$, 唯一地只有当 $a = 0$ 时上述关系才成立. 于是从 A 得到 T_n 的一个不动点. 对 B, C, D 的讨论类似.

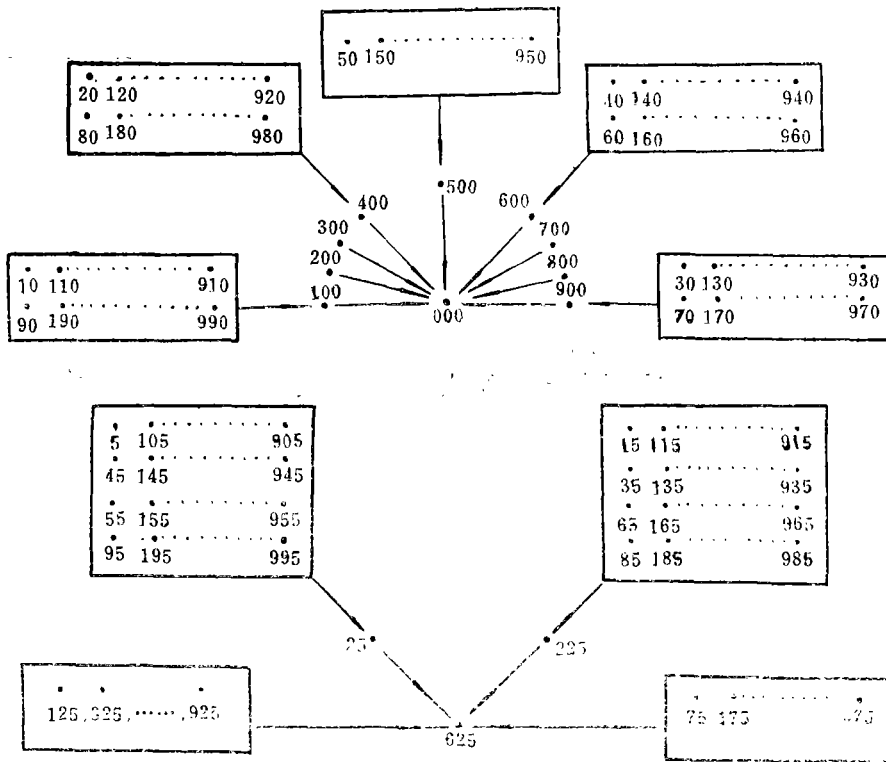


图4 T_3 的不动点000, 625生成的子结构

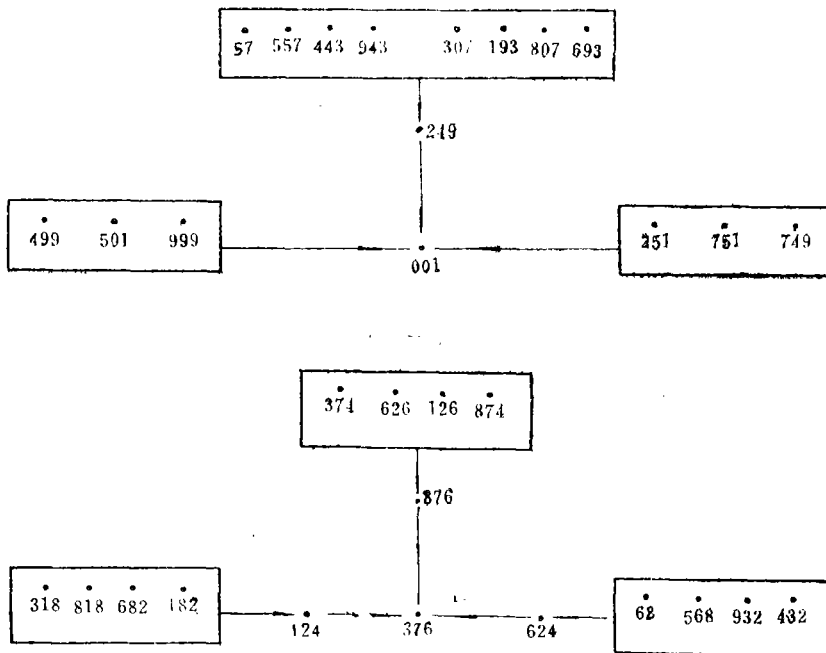


图5 T_3 的不动点001, 376生成的子结构

引理3.2 对任意 $n > 3$, T_n 没有 $P-2$ 点和 $P-3$ 点.

证明 T_n 的 $P-2$ 和 $P-3$ 点只能由 T_{n-1} 的不动点生成, 由上面关系式解的唯一性, 知 T_n 没有 $P-2$ 和 $P-3$ 点.

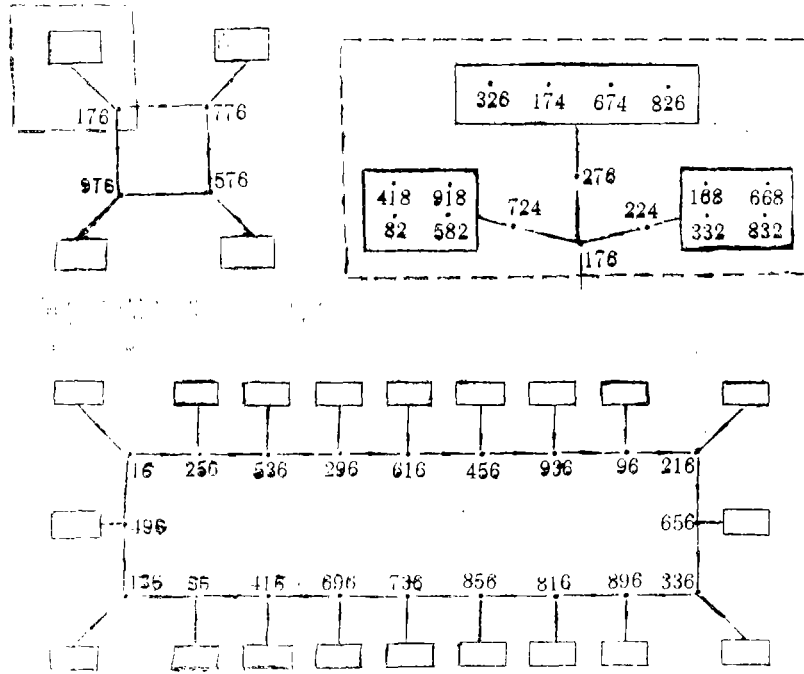


图6 T_3 的偶数 $P-4$ 点, $P-20$ 点生成的子结构

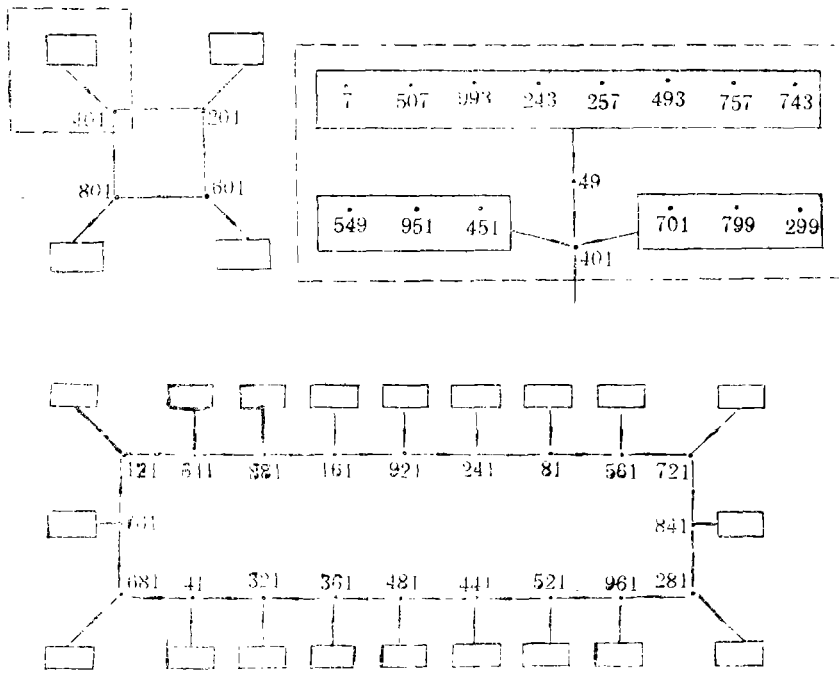


图7 T_3 的奇数 $P-4$ 点, $P-20$ 点生成的子结构

引理3.3 对任意 $n > 3$, T_{n-1} 的不动点 B 和 D 分叉出 T_n 的两组 $P-4$ 点.

证明 这里只对 B 证明, D 的证明类似. 若 $10^n \times a + B$ 是 T_n 的 $P-4$ 点, 则 a 满足关系式

$$[6a + 0]_1 = a$$

易知, $a=0, 2, 4, 6, 8$ 是该方程的解. 由引理3.1 ($0 \times 10^n + B$)是 T_n 的不动点, 且 T_n 没有 $P-2$ 和 $P-3$ 点, 所以 $(2 \times 10^n + B, 4 \times 10^n + B, 6 \times 10^n + B, 8 \times 10^n + B)$ 构成 T_n 一组 $P-4$ 点.

可以证明 A 和 C 不会分叉出 T_n 的 $P-4$ 点.

引理3.4 若 E 是 T_{n-1} 的 $P-4m$ 点 ($m=1$ 或 $m \pmod{5}=0$) 则 $E+i \times 10^n$ ($i=0, 2, 4, 6, 8$) 或 $E+j \times 10^n$ ($j=1, 3, 5, 7, 9$) 是 T_n 的 $P-20m$ 点.

证明 若 $10^n \times a + E$ 是 T_n 的一个 $P-20m$ 点, 则 a 满足方程

$$[T_n^{20m}(10^n \times a + E)]_n = 10^n \times a + E \quad (3.1)$$

$$\text{即} \quad [6a + {}^1(E^{20m})]_1 = a \quad (3.2)$$

这里 ${}^n(E^{20m})$ 表示 E^{20m} 的最后 n 位数. 显然方程 (3.2) 只有当 ${}^1(E^{20m})=0$ 或 5 时有解. 设

$$[T_n^{4m}(10^n \times a + E)]_n = 10^n \times a_1 + E \quad (3.3)$$

$$[T_n^{4m}(10^n \times a_1 + E)]_n = 10^n \times a_2 + E \quad (3.4)$$

$$[T_n^{4m}(10^n \times a_2 + E)]_n = 10^n \times a_3 + E \quad (3.5)$$

$$[T_n^{4m}(10^n \times a_3 + E)]_n = 10^n \times a_4 + E \quad (3.6)$$

从 (3.3)~(3.6) 可以推出下列关系式

$$[6a + {}^1(E^{4m})]_1 = a_1 \quad (3.7)$$

$$[6a_1 + {}^1(E^{4m})]_1 = [6a + {}^1(E^{8m})]_1 = a_2 \quad (3.8)$$

$$[6a_2 + {}^1(E^{4m})]_1 = [6a + {}^1(E^{12m})]_1 = a_3 \quad (3.9)$$

$$[6a_3 + {}^1(E^{4m})]_1 = [6a + {}^1(E^{16m})]_1 = a_4 \quad (3.10)$$

将 (3.7) 代入 (3.8), (3.8) 变为

$${}^1(E^{8m}) = [7 \times {}^1(E^{4m})]_1 \quad (3.11)$$

同样 (3.9) 和 (3.10) 成为

$${}^1(E^{12m}) = [6 \times {}^1(E^{8m}) + {}^1(E^{4m})]_1 \quad (3.12)$$

$${}^1(E^{16m}) = [6 \times {}^1(E^{12m}) + {}^1(E^{4m})]_1 \quad (3.13)$$

从 (3.2) 和 (3.10) 得到下列关系

$$[6a + {}^1(E^{20m})]_1 = [6a_4 + {}^1(E^{4m})]_1 \quad (3.14)$$

将 (3.10)~(3.13) 代入 (3.14) 得

$${}^1(E^{20m}) = [5 \times {}^1(E^{4m})]_1 \quad (3.15)$$

于是只可能 ${}^1(E^{20m})=0$ 或 5 . 若 ${}^1(E^{20m})=0$, (3.2) 的解是 $a=0, 2, 4, 6, 8$; 若 ${}^1(E^{20m})=5$, (3.2) 的解是 $a=1, 3, 5, 7, 9$. 由于 $8m, 12m, 16m$ 不整除 $20m$, 所以这些解不是 T_n 的 $P-8m, P-12m$, 和 $P-16m$ 点, 只要证明这些解不是 T_n 的 $P-4m$ 点, 我们的证明就完成了.

由归纳法 E 是由 T_{n-2} 的 $P-4m/5$ ($m>1$) 点或不动点 ($m=1$) F 生成的, 于是 $E_1=E, E_2=[E+2 \times 10^{n-1}]_{n-1}, E_3=[E+4 \times 10^{n-1}]_{n-1}, E_4=[E+6 \times 10^{n-1}]_{n-1}, E_5=[E+8 \times 10^{n-1}]_{n-1}$ 是 T_{n-1} 的 $P-4m$ 点 ($m>1$) 或一个不动点和四个 $P-4$ 点 ($m=1$). 若有 a_1 使 $a_1 \times 10^n + E_1$ 是 T_n 的 $P-4m$ 点, 则有 a_2, a_3, a_4, a_5 使得 $a_2 \times 10^n + E_2, a_3 \times 10^n + E_3, a_4 \times 10^n + E_4,$

$a_i \times 10^n + E_i$ 也是 T_n 的 $P-4m$ 点, 则下列要求必须满足:

$${}^1(E_i^{4^m}) = 0 \text{ 或 } 5 \quad (i=1, 2, 3, 4, 5) \quad (3.16)$$

注意到 E_i 的末位是 1 或 6, (3.16) 不可能满足, 这表明 (3.2) 的解不是 T_n 的 $P-4m$ 点.

根据引理 3.1~引理 3.4, 我们得到 T_n 的分叉定理.

定理 3.1 任意 $n > 3$, T_n 有如下周期点

- (1) 四个不动点: $(00 \cdots 0)$, $(00 \cdots 1)$, $(\cdots 625)$, $(\cdots 376)$;
- (2) 两组 $P-4$ 点, $(200 \cdots 01, 400 \cdots 01, 800 \cdots 01, 600 \cdots 01)$ 另一组由引理 3.3 给出;
- (3) 两组 $P-4 \times 5^{k-2}$ 点 ($k=3, 4, \dots, n$) 它们的末位是 1 或 6.

定理 3.2 当 n 增加, T_n 的全局分叉结构如图 8 所示

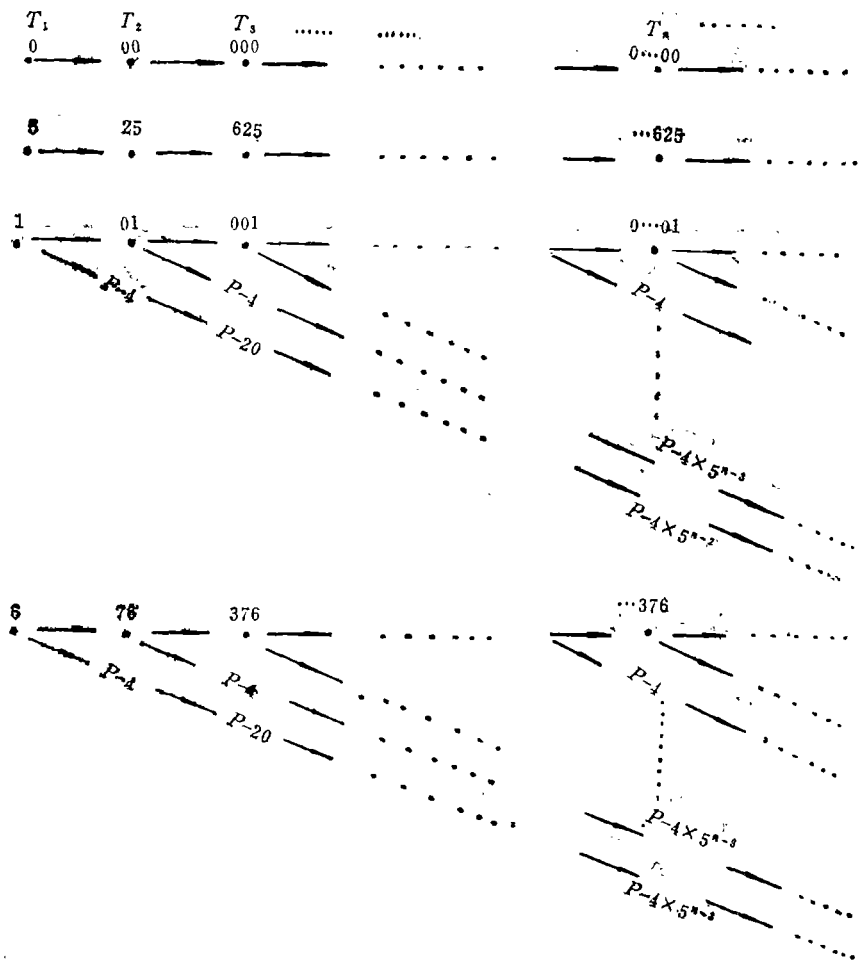


图8 T_n 的全局分叉结构

记 T_n 的定义域为 N_n , 吸引子为 A^n , 当 n 固定时 N_n 中含有 10^n 个数, 而 A^n 中包含 $2 + 2 \times 5^{n-1}$ 个数. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 类似于 Hausdorff 维数^[2] 那样考察其对数比, 我们得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2 + 2 \times 5^{n-1})}{\ln 10^n} = \frac{\ln 5}{\ln 10} \approx 0.69897$$

具有“分形”的性质.

四、 T_n, μ 的周期结构

在本节中我们考虑参数数字映射 $T_{n, \mu}: x \rightarrow [\mu x^2]_n$, 这里 μ 是正整数.

引理4.1 对任意 μ , $T_{n, \mu}$ 没有 $P-k$ 点, 这里 $k \neq 1$ 和 $k \neq 4 \times 5^l (l=0, 1, \dots, n-2)$.

证明 若 x 是 $T_{n, \mu}$ 的 $P-k$ 点, 则

$$T_{n, \mu}^k(x) = x \quad (4.1)$$

这等式可写为

$$[\mu^{2^k} x^{2^k}]_n = [\mu x]_n \quad (4.2)$$

这表明若 x 是 $T_{n, \mu}$ 的 $P-k$ 点, 则 $[\mu x]_n$ 是 T_n 的 $P-k$ 点. 利用定理3.1, 引理结论显然成立.

从引理4.1我们知 $T_{n, \mu}$ 只可能有 $P-4 \times 5^l (l=0, 1, \dots, n-2)$ 和不动点.

引理4.2 若 μ 是奇数且 $5 \nmid \mu$, 则 $T_{n, \mu}$ 有四个不动点和两组 $P-4 \times 5^l (l=0, 1, \dots, n-2)$ 点.

证明 考虑映射 $m_\mu: Z_n^+ \rightarrow Z_n^+$, $x \mapsto [\mu x]_n$, 这里 Z_n^+ 是整数集合 $\{0, 1, \dots, \underbrace{99 \dots 9}_{n-1}\}$. 若

$[\mu x]_n = [\mu y]_n$, 则 $\mu(x-y) = 10^n \times a$, $a \in Z_n^+$. 由对 μ 的条件, 只可能 $a=0$ 或 $10^n | (x-y)$. 所以 m_μ 是单射, 注意到 Z_n^+ 是有限集, 所以 m_μ 也是满射, 即 m_μ 是双射. 从定理3.1知引理4.2的结论为真.

引理4.3 若 μ 是偶数 $5 \nmid \mu$, 则 $T_{n, \mu}$ 有两个不动点和一组 $P-4 \times 5^l (l=0, 1, \dots, n-2)$ 点.

证明 首先设 $\mu = 2\mu_1$, μ_1 是奇数且 $5 \nmid \mu_1$. 考虑 m_μ , 若 $[\mu x]_n = [\mu y]_n$ 则 $2\mu_1(x-y) = 10^n \times a$ 即 $x=y$ 或者 $x = 5 \times 10^{n-1} + y$, $x, y \in Z_n^+$. 由于 $m_\mu(Z_n^+)$ 只含 $5 \times 10^{n-1}$ 个象点, 由定理3.1当 $\mu = 2\mu_1$ 时结论成立. 若 $\mu = 2^t \mu_1$, $t > 1$, μ_1 是奇数且 $5 \nmid \mu_1$, 则(4.2)可改写为

$$[2^{2^t} (2^{t-1} \mu_1 x)^{2^t}]_n = [2(2^{t-1} \mu_1 x)]_n \quad (4.3)$$

$$\text{即 } [2^{2^t} y^{2^t}]_n = [2y]_n \quad (4.4)$$

这里 $y = 2^{t-1} \mu_1 x$. 由归纳法, 当 $t > 1$ 时结论为真.

用同样方法, 我们可以证明下面结论.

引理4.4 若 μ 是奇数且 $5 | \mu$, 则 $T_{n, \mu}$ 只有两个不动点.

根据引理4.1~4.4, 我们得到 $T_{n, \mu}$ 的周期结构如下:

定理4.1 $T_{n, \mu}$ 的周期结构归纳为

- (1) 当 $5 \nmid \mu$, $2 \nmid \mu$ 时, $T_{n, \mu}$ 的周期结构和 T_n 相同.
- (2) 当 $2 | \mu$, $5 \nmid \mu$ 时, $T_{n, \mu}$ 只保留 T_n 的一半子结构.
- (3) 当 $2 \nmid \mu$, $5 | \mu$ 时, $T_{n, \mu}$ 只保留两个不动点.

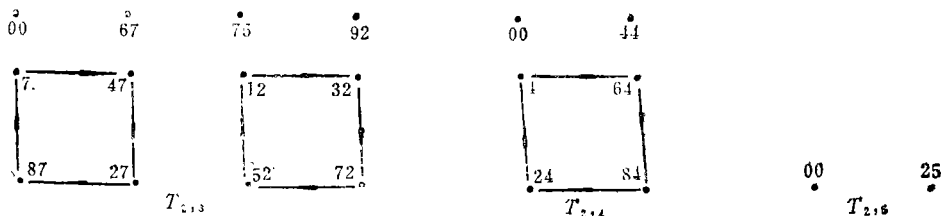


图9 $T_{2, \mu} (\mu=3, 4, 5)$ 的周期结构

(4) 当 $10 \nmid \mu$ 时, $T_{n,\mu}$ 只有一个平凡不动点.

最后, 我们给出 $T_{2,\mu}(\mu=3, 4, 5)$ 的周期结构. 计算和理论分析完全一致.

参 考 文 献

- [1] Dewdney, A.K., Computer recreations, *Scientific American*, 253, 2 (1985), 16—21.
- [2] Hao Bai-lin, *Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative System*, World Scientific, Singapore (1989).
- [3] Collet, P. and J. P. Eckman, *Iterated Maps on the Interval as Dynamical System*, Birkhauser, Boston (1980).

The Global Bifurcation Structure of a Kind of Digit Mapping

Lu Qin-he

(Suzhou University, Jiangsu)

Xu Zheng-fan Lin Fu-qin

(Shanghai Maritime University, Shanghai)

Liu Zeng-rong

(Suzhou University, Jiangsu)

Abstract

The global structure of the mapping $T_n: x \rightarrow [x^2]_n$ is studied. The symmetric unconnected substructures of T_2 is coincident with [1] by computer, but for $n=3$ the symmetry of these substructures vanishes. As n is increasing, the global bifurcation structure of T_n is shown. Finally, similar results for the mapping $T_{n,\mu}: x \rightarrow [\mu x^2]_n$ are also proved.

Key words digit mapping, bifurcation, global construction