

弹性结构有限元控制系统*

黄琳 陈德成

(北京大学, 1980年10月30日收到)

摘 要

本文讨论了经有限元方法处理后的弹性结构系统的可控、可观测、镇定等问题, 所得的结论与用分布参量系统模型所得的结论一致, 但却便于用计算机计算且方法简单。

在一、中研究了系统的可控与可观测的问题, 给出了易于用计算机判别的条件。在二、中对于采用线性反馈镇定弹性体的问题进行了仔细的讨论, 指出对弹性结构系统而言, 若系统完全可控仅用位移反馈可以任意配置振动频率但却无法镇定系统, 而仅用速度反馈虽可以进行镇定但镇定能力是有限的, 对于在系统运动方程中包含刚体运动成分的情形也作了研究。在三、中对梁的控制问题用有限元进行了处理, 指出直梁作为一个系统可以分解为拉压、扭转和两个方向弯曲这四个互不关联的子系统, 它们的可控与可观测问题可以分别进行讨论, 最后对折线型刚架的可控与可观测的问题也作了探讨。

一、可控性与可观测性

在空间工程等领域内, 为了精确地进行控制, 常需讨论弹性体的受控问题, 如果这类结构作为连续介质力学模型处理, 则问题归结为讨论一类分布参量系统, 这方面的工作有关肇直与王康宁^[1-3], 宋健与于景元^[4,5], 以及其它^[9,10,14,15]。

对于用分布参量系统, 为了进行计算需将其离散化, 目前对于弹性体比较有力的手段是有限元方法, 经过有限元处理的弹性结构的静力问题往往归结为一类线性代数方程组的求解^[8,17]。已提供了优质的算法与程序, 而振动问题无论是自由振动还是强迫振动问题, 最后归结为解由一对矩阵组成的正则矩阵束的广义特征值问题^[8,16], 而这一问题的求解今天也有了各种成型的算法与程序^[7,8,17]。

考虑到采用有限元方法可以避免弹性体的变截面、材料不均匀、复杂的几何形状以及边界条件的多样性带来的困难, 因而虽然在数学上对这种用离散模型来代替原来的分布参量系统的合理性的论证还有一定困难, 但无论从力学的实际还是从工程计算的有效性考虑, 采用有限元方法解弹性体控制问题肯定是有益的, 本文采用这种方法对弹性体的可控、可观测与

* 朱照宣推荐。

镇定问题所进行的分析与直接从分布参量系统出发对弹性梁的分析所得的结论基本一致也说明了这种考虑的合理性。

设将一弹性体离散成一些单元，在单元与单元之间形成一些离散的结点，通过这些结点的位移与速度来表征弹性体的状态。设 $x \in \mathbf{R}^n$ 表示结点位移的广义坐标量。在理想定常约束和小变形假定下，系统的动能为 $T = \frac{1}{2} \dot{x}^T M \dot{x}$ ，其中 $M = M^T \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为正定质量矩阵，而系统的势能 $V(x)$ 可以写成 $V = \frac{1}{2} x^T K x$ ，其中 $K = K^T \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为半正定刚度矩阵。当弹性体的整体刚体运动被约束时， K 为正定。根据系统的动能与势能，容易得到经有限元处理后的弹性体受控动力学方程为：

$$\left. \begin{aligned} M\dot{x} + Kx &= Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

其中 M, K 已如前述， $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 为控制作用矩阵， $C \in \mathbf{R}^{l \times n}$ 为观测矩阵， $u \in \mathbf{R}^m$ 为输入或控制作用， $y \in \mathbf{R}^l$ 为输出或观测量，以后称形如 (1.1) 的受控系统为弹性结构有限元系统或有限元系统。

对 (1.1) 若采用微分算子描述，则是

$$\left. \begin{aligned} [Ms^2 + K]x &= Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

其中 s 系微分算子，容易证明有下述结论：

引理 1.1 多项式矩阵 $Ms^2 + K$ 与 B 互质^[12] 当且仅当 $Ms + K$ 与 B 互质，同理 $Ms^2 + K$ 与 C^T 互质当且仅当 $Ms + K$ 与 C^T 互质。 \square

定理 1.1 系统 (1.1) 与

$$\left. \begin{aligned} M\dot{x} + Kx &= Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

具有完全相对应的可控性与可观测性，即

- 1° (1.1) 完全可控当且仅当 (1.3) 完全可控。
- 2° (1.1) 完全可观测当且仅当 (1.3) 完全可观测。
- 3° (1.1) 是最小阶实现系统当且仅当 (1.3) 是最小阶实现系统。

对于系统 (1.3)，由于 M 正定可逆，则 (1.3) 等价于系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} + M^{-1}Kx &= M^{-1}Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

显然 (1.4) 完全可控当且仅当

$$\text{rank}[B, KM^{-1}B, \dots, (KM^{-1})^{n-1}B] = n \quad (1.5)$$

而 (1.5) 成立当且仅当

$$\text{rank} \begin{bmatrix} M & 0 & \cdots & 0 & B \\ KM & & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & M & 0 & B \\ & & & KB^T & 0 & \end{bmatrix} = n^2 \quad (1.6)$$

由此可以有:

定理 1.2 有限元系统 (1.1) 完全可控当且仅当下述之一

- 1° (1.4) 完全可控.
- 2° (1.5) 成立.
- 3° (1.6) 成立.

而 (1.1) 完全可观测当且仅当下述之一

- 1° (1.4) 完全可观测.
- 2° $\text{rank}[C^T M^{-1} K C^T \dots (M^{-1} K)^{n-1} C^T] = n$

3°

$$\text{rank} \begin{pmatrix} M & 0 & \dots & 0 & M C^T \\ K M & & & & \\ & & & & \\ 0 & & & 0 & \\ & & & K M C^T & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = n^2 \quad (1.7)$$

□

对于矩阵束 (M, K) 可以求得 $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 可逆^[16] 使有

$$\left. \begin{aligned} X^T M X &= I_n \\ X^T K X &= A = \text{diag}[\lambda_1 I_{\alpha_1}, \dots, \lambda_2 I_{\alpha_2}, \dots, \lambda_s I_{\alpha_s}] \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

其中 X 的计算可按 [1, 17] 中的算法, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 是矩阵束的广义特征值, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是对应这些特征值的重数.

利用变换 $x = Xz$ 则 (1.1) 等价于状态已解耦的系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{z} + Az &= X^T B u \\ y &= C X z \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

若记 $X = [X_1, X_2, \dots, X_s]$, 其中 $X_i \in \mathbb{R}^{n \times \alpha_i}$ 则 (1.9) 可改写为

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_i + \lambda_i z_i &= X_i^T B u \\ y &= \sum_{i=1}^s C_i z_i \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (1.10)$$

其中 $z^T = (z_1^T z_2^T \dots z_s^T)$ $z_i \in \mathbb{R}^{\alpha_i}$ $C_i = C X_i$ ($i = 1, 2, \dots, s$).

可以证明有

引理 1.2 系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{z} &= \lambda z + B_1 u \\ y &= C_1 z \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

其中 $z \in \mathbb{R}^\alpha, u \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}^l, \lambda \in \mathbb{R}, B_1 \in \mathbb{R}^{\alpha \times p}, C_1 \in \mathbb{R}^{l \times \alpha}$. 则 (1.11) 完全可控当且仅当 $\text{rank} B_1 = \alpha$, 而 (1.11) 完全可观测当且仅当 $\text{rank} C_1 = \alpha$. □

定理 1.3 系统 (1.1) 完全可控当且仅当其等效系统 (1.10) 有

$$\text{rank} X_i^T B = \alpha, \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (1.12)$$

而系统 (1.1) 完全可观测当且仅当 (1.10) 有

$$\text{rank} C_i X_i = \alpha, \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (1.13) \quad \square$$

证明: 只证完全可控情形

当: 令 $G = [X^T B \quad A X^T B \quad \dots \quad A^{n-1} X^T B]$, 设有 $v: v^T = (v_1^T, v_2^T, \dots, v_n^T)$ $v_i \in \mathbb{R}^{\alpha_i}$

使 $v^T G = v^T [X^T B, A^T X^T B, \dots, A^{s-1} X^T B] = 0$ 若引入 $\omega,^T = v,^T X,^T B$ 则对应 $\omega,^T$ 满足

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{s-1} & \lambda_2^{s-1} & \dots & \lambda_s^{s-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^T \\ \omega_2^T \\ \vdots \\ \omega_s^T \end{bmatrix} = 0$$

由此从 $i \neq j$ 时 $\lambda_i \neq \lambda_j$ 就有

$$\omega_i^T = v_i^T X,^T B = 0$$

但 $X,^T B$ 有 (1.12), 因此 $v_i^T = 0, i=1, 2, \dots, s$. 即由 $v^T G = 0$ 可推得 $v = 0$, 从而 $\text{rank} G = n$, 即 (1.9) 或 (1.10) 完全可控, 因此 (1.1) 完全可控.

仅当: 显然.

完全可观测的证明相仿 □

由定理 (1.3) 可知若系统不完全可控则对应 (1.12) 中至少有一个 i 使

$$\text{rank} X,^T B < \alpha, \tag{1.14}$$

由于 $X,^T B \in \mathbb{R}^{\alpha \times m}$ 又 (1.14) 成立则有正交矩阵 $F, \in \mathbb{R}^{\alpha \times \alpha}$ 使

$$F, X,^T B = \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix} \quad F,^T F, = I_\alpha, \tag{1.15}$$

其中 $H \in \mathbb{R}^{(\alpha-1) \times m}$ 若令

$$Y = [Y_1, Y_2, \dots, Y_s] = [X_1, X_2, \dots, X_s] \text{diag} [I_{\alpha_1}, \dots, I_{\alpha_{s-1}}, F,^T, \dots, I_{\alpha_s}] \text{ 则 } x = Yz$$

将 (1.1) 仍变为 (1.10) 这种形式, 但其第 i 个子系统已是

$$\ddot{z}_i + \lambda_i z_i = \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix} u$$

而其余子系统不变, 由于 $Y, = X, F,^T$ 与 $X,$ 一样其列是无控系统 $M\ddot{x} + Kx = 0$ 对应频率 $\sqrt{\lambda_i}$ 的振型但 $Y,^T B = \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix}$, 这表明无控系统至少有一个振型与控制矩阵 B 的所有列正交, 从而控制作用对应的广义力与广义力矩对该振型不作功, 即无法影响这个振型. 这就是弹性系统有限元方法所表明的不可控所对应的力学意义. 用完全类似的办法可以指出, 当系统不完全可观测时, 则观测矩阵 C 的所有列将与某个无控制系统的振型正交. 从而通过该观测矩阵得到这个振型的信息为零, 这就是有限元系统不完全可观测力学涵意.

由于矩阵 $M^{-1}K$ 的循环指数相当于 (M, K) 矩阵束的广义特征值的最大重数, 由此利用 [13] 可有

定理 1.4 系统 (1.1) 完全可控, 又矩阵束 (M, K) 的广义特征值最大重数为 α , 则存在 $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{n \times \alpha} \quad \tilde{R}(B) \subset \mathbf{R}(B)$ 使系统

$$M\ddot{x} + Kx = \tilde{B}u, \quad y = Cx$$

完全可控, 同样若 (1.1) 完全可观测, 则存在 $\tilde{C} \in \mathbb{R}^{\alpha \times n}, \mathbf{R}(\tilde{C}^T) \subset \mathbf{R}(C^T)$ 使系统

$$M\ddot{x} + Kx = Bu \quad y = \tilde{C}x$$

完全可观测.

若系统 (1.1) 完全可控又完全可观测, 则

$$M\ddot{x} + Kx = \tilde{B}u \quad y = \tilde{C}x$$

是一个最小阶实现系统, 其中 \tilde{B}, \tilde{C} 同前要求, 并且 (1.1) 完全可控的必要条件为 B 之列数 $m > \alpha$, (1.1) 完全可观测的必要条件为 C 之行数 $l \geq \alpha$, 以上 $\mathbf{R}(B)$ 系 B 之列向量所张成的列空间.

二、系统的镇定和极点配置

为了对系统

$$M\ddot{x} + Kx = Bu \quad (2.1)$$

进行镇定, 显然在(2.1)完全可控的前提下可以有线性反馈

$$u = P \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = P_1 x + P_2 \dot{x} \quad (2.2)$$

使对应闭环系统

$$M\ddot{x} + Kx = B[P_1 x + P_2 \dot{x}] \quad (2.3)$$

具任意事前要求的 $2n$ 个极点配置[13、18]. 若极点配置均在复平面的左半平面, 则对应系统(2.3)渐近稳定, 若不仅如此而且要求极点配置距离虚轴有一定距离, 则对应闭环系统可以具有事先要求的衰减率.

实际上常有兴趣讨论仅用位移反馈或仅用速度反馈, 闭合有限元系统的可能性.

设(2.1)对应矩阵束 (M, K) 的广义特征值全为单根, 则系统(2.1)完全可控, 具有 $b \in \mathbf{R}(B)$ 而使系统

$$M\ddot{x} + Kx = bu \quad b \in \mathbf{R}^n \quad (2.4)$$

完全可控, 若引入 $G = M^{-1}K$, $b_1 = M^{-1}b$ 则(2.4)等价于

$$\ddot{x} + Gx = b_1 u \quad (2.5)$$

如果对(2.5)引入 $T = [b_1, Gb_1, \dots, G^{n-1}b_1]$, 由于 b_1 是 G 的生成元, T 可逆, 从而引进变换 $x = Tz$ 就可将(2.5)变为

$$\ddot{z} = Cz + e_1 u \quad (2.6)$$

其中

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -\alpha_n \\ 1 & & -\alpha_{n-1} & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ 0 & & 0 & -\alpha_2 \\ & & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \quad e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

其中 $\lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n$ 是 $-M^{-1}K$ 的特征多项式, 即 $\text{Det}[\lambda I + M^{-1}K]$. 利用对系统

$$\dot{z} = Cz + e_1 u \dots \quad (2.8)$$

的极点配置定理容易证明.

定理2.1 系统(2.4)完全可控当且仅当存在线性位移反馈 $u = p^T x$ 使闭合系统

$$M\ddot{x} + Kx = bu \quad u = p^T x \quad (2.9)$$

具有 n 个事先给定的频率.

证明: 系统(2.4)完全可控当且仅当系统(2.8)完全可控, 当且仅当存在 $u = q^T z$ 使 $C + e_1 q^T$ 具任意事先给定的特征值. 由于通过 q^T 可使 $C + e_1 q^T$ 具任意事先给定的实特征值就能导致(2.8)完全可控^[13]. 由此(2.8)完全可控当且仅当存在 q^T 使 $C + e_1 q^T$ 具任何事先给定的实特征值, 从而当且仅当(2.6)具任何事先给定的频率.

定理2.2 设矩阵束 (M, K) 的 n 个广义特征值中最高重数为 α , 则存在 $B \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 使 $u = Px$ 所闭合的系统

$$M\ddot{x} + Kx = Bu \quad u = Px \quad (2.10)$$

具事先给定的频率.

证明: $Y \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 其列是 (M, K) 的广义特征向量使

$$Y^T M Y = I_n \quad Y^T K Y = L = \text{diag}[L_1, \dots, L_\alpha] \quad (2.11)$$

其中 L_i 系对角阵, $\text{Det}[\lambda I_i - L_i]$ 是 $M^{-1}K$ 的不变多项式, 由此 L_i 都是循环矩阵, 令 $x = Yz$ 则 (2.10) 变为

$$\ddot{z} + Lz = B_1 u, \quad u = P_1 z, \quad B_1 = Y^T B, \quad P_1 = PY \quad (2.12)$$

令 L_i 的生成元为 b_i , $i = 1, 2, \dots, \alpha$ 并记

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times \alpha} \quad (2.13)$$

故 $B = Y^T B_1$ 则对应系统 (2.9) 必完全可控. 现设 $z^T = (z_1^T, z_2^T, \dots, z_\alpha^T)$ 则 (2.12) 分解为互相解耦的子系统

$$\ddot{z}_i + L_i z_i = b_i v_i, \quad i = 1, 2, \dots, \alpha \quad (2.14)$$

其中 $u = (v_1, v_2, \dots, v_\alpha)^T \in \mathbb{R}^\alpha$, 显然 (2.14) 的每个子系统都完全可控, 因而有 $v_i = P_i^T z_i$ 使对应子系统闭合后具事先给定的频率. 若令

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_1^T & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2^T & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & p_\alpha^T \end{pmatrix}$$

则对应系统 $\ddot{z} + Lz = B_1 P_1 z$ 具任意事先给定的频率. 若记 $P = P_1 Y^{-1}$ 考虑到 $B = Y^T B_1$ 则闭环系统具事先给定的频率. \square

定理 2.3 系统 (2.1), 用任何位移反馈 $u = Px$ 都不能使闭环系统

$$M\ddot{x} + Kx = Bu, \quad u = Px \quad (2.14)$$

渐近稳定.

证明: (2.14) 的特征方程是

$$f(\lambda^2) = \text{Det}[M\lambda^2 + K - BP] = 0$$

由于 $f(s)$ 是 s 的实系数多项式, 因此 $f(s) = 0$ 的根关于实轴对称. 从而只要 $f(s) = 0$ 的根中有一个不是负实数, 则 $f(\lambda^2) = 0$ 必有具正实部的根. 而 $f(s) = 0$ 的根全为负实数时, $f(\lambda^2) = 0$ 也只有纯虚根. 因此 (2.14) 不能渐近稳定. \square

以上说明对完全可控的有限元系统说来, 仅用位移反馈只能做到任意配置振动频率而无法镇定系统使之渐近稳定.

为了研究速度反馈对有限元系统的镇定作用, 先引入 [16] 中的一个结果.

定义 2.1 $g_1(\lambda)$ 系 m 次实系数多项式, 其根为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, $g_2(\lambda)$ 为 m (或 $m-1$) 次实系数多项式, 其根为 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ (或 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{m-1}$). 称 $g_1 g_2$ 为正多项式对, 系指有

$$\lambda_1 < \mu_1 < \dots < \lambda_m < \mu_m < 0 \quad (2.15)$$

$$\text{(或 } \lambda_1 < \mu_1 < \dots < \mu_{m-1} < \lambda_m < 0 \text{)} \quad (2.16)$$

引理 2.1 实系数多项式 $g_1(\lambda^2) + \lambda g_2(\lambda^2)$ 是 Hurwitz 多项式, 即其根均具负实部当且仅当 $g_1 g_2$ 组成正多项式对^[16].

定理2.4 若系统(2.1)完全可控, M, K 均正定, 矩阵束 (M, K) 的广义特征值均相异, 则有 $b \in \mathbf{R}(B)$ 与速度反馈 $u = p_2^T \dot{x}$, 使闭合系统

$$M\dot{x} + Kx = b p_2^T \dot{x} \quad (2.17)$$

是渐近稳定的.

证明: 相仿定理2.1的过程, 讨论与(2.4)等价的系统(2.6), 其中 C 与 e_1 由(2.7)确定. 令 $g_1(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n = \text{Det}[\lambda I_n + M^{-1}K]$ 由于 M, K 均正定且矩阵束 (M, K) 只有单特征值, 则 $g_1(\lambda) = 0$ 之根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 可以排成

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < 0 \quad \lambda_i \in \mathbf{R} \quad (2.18)$$

现设速度反馈为 $u = p^T \dot{z}$, 则闭环系统为

$$\ddot{z} = Cz + e_1 p^T \dot{z} \quad p^T = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) \quad (2.19)$$

它所对应的特征方程为

$$\begin{aligned} & \lambda^{2n} + \lambda^{2(n-1)}[\alpha_1 - \pi_1 \lambda] + \lambda^{2(n-2)}[\alpha_2 - (\pi_2 - \pi_1 \alpha_1) \lambda] \\ & + \dots + [\alpha_n - (\pi_n - \pi_{n-1} \alpha_1 - \dots - \pi_1 \alpha_{n-1}) \lambda] \\ & = g_1(\lambda^2) + \lambda g_2(\lambda^2) = 0 \end{aligned}$$

其中 $g_2(s) = \omega_1 s^{n-1} + \omega_2 s^{n-2} + \dots + \omega_{n-1} s + \omega_n$

$$= -\pi_1 s^{n-1} - (\pi_2 - \pi_1 \alpha_1) s^{n-2} - \dots - (\pi_n - \pi_{n-1} \alpha_1 - \dots - \pi_1 \alpha_{n-1})$$

显然 $g_2(s)$ 可以通过 $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ 的选择使 $g_1(s)$ 与 $g_2(s)$ 组成正多项式对时, 对应系统(2.19)就可以渐近稳定. \square

若令 $p_2^T = p^T T^{-1}$, 则对应(2.17)渐近稳定其中 T 系由(2.5)化至(2.6)的复变换矩阵.]

定理2.5 系统(2.1)完全可控, 又矩阵束 (M, K) 的广义特征值为 n 个非负单根, 其中有一零根, 则存在 $b \in \mathbf{R}(B)$ 与适当的速度反馈 $u = p_2^T \dot{x}$ 使闭合系统

$$M\dot{x} + Kx = b p_2^T \dot{x} \quad (2.21)$$

除一个零特征值外其余 $2n-1$ 个均具负实部, 即使(2.21)处于稳定的第一临界情形.

证明: 与定理2.4相仿, 此时 $g_1(s)$ 具有一个零根, 由此可令, $g_1(s) = s h_2(s)$, $g_2(s) = h_1(s)$, 其中 $h_2(s)$ 具负实根为 $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_{n-1} < 0$ 且有

$$g_1(\lambda^2) + \lambda g_2(\lambda^2) = \lambda [h_1(\lambda^2) + \lambda h_2(\lambda^2)] \quad (2.22)$$

如果利用 π_1, \dots, π_n 的适当选择, 使 $h_1(s)$ 的根为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ 且有(2.15) (对应 $m=n-1$) 则 $h_1(s)$ 与 $h_2(s)$ 也组成正多项式对, 从而 $g_1(\lambda^2) + \lambda g_2(\lambda^2)$ 除一个零根外其余 $2n-1$ 个根均具负实部, 即使系统处于稳定的第一临界情形. \square

一般说来无控弹性体的运动中对应零特征值的运动是刚体运动, 由于其对应的初等因子是二次的因而运动发散, 定理2.5说明在此种情况下, 只要速度反馈选择适当就可以消除发散运动而归结为稳定的第一临界情形. 就作为自由弹性梁的火箭控制而言, 其控制常以两个迴路来进行, 一个主迴路用来控制刚体运动, 一个弹性镇定迴路用来消除弹性振动影响, 而后者可按定理2.5设计, 而将对应一个零根引起的并不发散的误差留给主迴路进行消除.

仿照定理2.2, 结合到定理2.4, 2.5. 容易证明有

定理2.6 设(2.1)完全可控, M 正定而 K 半正定, 矩阵对 (M, K) 的广义特征值最大重数为 α , 零特征值重数为 β , 则存在 $B \in \mathbf{R}^{n \times \alpha}$ 使系统 $M\dot{x} + Kx = Bu$ 完全可控, 并且有 $P \in \mathbf{R}^{\alpha \times n}$, 使 $u = P\dot{x}$ 所闭合的系统

$$M\dot{x} + Kx = Bu \quad u = P\dot{x} \quad (2.23)$$

的 $2n$ 个特征值中除有 β 个初等因子为一次的零特征值外, 其余 $2n-\beta$ 个均具负实部, 此时闭环系统(2.23)是稳定的, 但并不渐近稳定. \square

其中, E 、 G 分别为材料的杨氏模量与剪切模量, A 为截面积, I_y 、 I_z 为轴惯性矩, J 为极惯性矩. 显然单元刚度矩阵可写成分块的形式

$$K_i = \begin{bmatrix} A_i & C_i^T \\ C_i & B_i \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} A_i, B_i, C_i \text{ 均} \in \mathbf{R}^{6 \times 6} \text{ 且对一切单元具有相同的稀疏特性. 很明显} \\ C_i \text{ 是可逆的, 将单元刚度矩阵综合到总刚矩阵} \end{array} \right\}$$

$$K = \begin{bmatrix} A_1 & C_1^T & & & & \\ C_1 & B_1 + A_1 & C_2^T & & & \\ & C_2 & B_2 + A_3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ 0 & & & & C_{n-1}^T & \\ & & & & & B_{n-1} \end{bmatrix}$$

总质量矩阵 M , 当采用集中质量而又计及转动惯性影响时, M 是非奇异的对角矩阵, 于是系统的方程为

$$\left. \begin{array}{l} M\ddot{x} + Kx = Bu \\ y = Cx \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

令 $x = \sqrt{M}^{-1}z$, (3.3) 可等价地写成 (3.1) 即

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{z} + \tilde{K}z = \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}z \end{array} \right\}$$

其中 $\tilde{K} = \sqrt{M}^{-1}K\sqrt{M}^{-1}$, $\tilde{B} = \sqrt{M}^{-1}B$, $\tilde{C} = C\sqrt{M}^{-1}$.

这时 \tilde{K} 具有 (3.2) 分块三对角的形式, 其中一切 $G_i \in \mathbf{R}^{6 \times 6}$, 而且不难验证, G_i 对一切 $i=1, 2, \dots, n-1$. 均可逆, 由此容易给出 \tilde{B} 与 \tilde{C} 的形式

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} I_6 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{C} = \tilde{B}^T$$

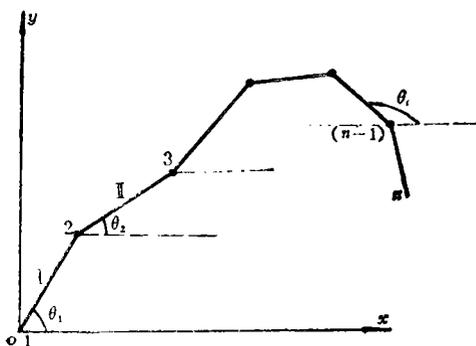


图 1

则按定理 3.1 系统是完全可以控和完全可观测的.

2. 平面折线型刚架.

定理 3.1 对于如图 1 示的力学模型应用也是十分有效的. 这种模型我们不妨称它为平面折线型刚架, 显然对于平面曲梁完全可以按这样的模型来处理. 我们也可将它离散为 $n-1$ 个单元, n 个结点, 其单元刚度矩阵为

$$K_i = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & & & & & \\ & 0 & \frac{12EI}{l^3} & & & \\ & & & \text{对称} & & \\ & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & & \\ -\frac{EA}{l} & & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & \\ & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} \\ & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

其中 E, A, I 与前面的涵意相同, I 为单元截面对 z 轴惯性矩.

显然上述单元刚度矩阵可写成分块形式

$$K_i = \begin{bmatrix} A_i & C_i^T \\ C_i & B_i \end{bmatrix} \quad A_i, B_i, C_i \text{ 均} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

将单元刚度矩阵综合到总刚度矩阵时, 需将它从单元坐标系转换到总体坐标系中去, 这是一个十分简单的正交变换, 其变换矩阵为

$$T_i = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & & & \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ & & & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ & & 0 & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_i^* & 0 \\ 0 & T_i^* \end{bmatrix}$$

经过坐标变换后的单元刚度矩阵为

$$K_i' = T_i^T K_i T_i = \begin{bmatrix} T_i^{*T} A_i T_i^* & T_i^{*T} C_i^T T_i^* \\ T_i^{*T} C_i T_i^* & T_i^{*T} B_i T_i^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_i & G_i^T \\ G_i & S_i' \end{bmatrix}$$

S_i, S_i', G_i 仍 $\in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. 容易验证 C_i 可逆, 从而 G_i 可逆. 对于折线型刚架如仍采用集聚质量矩阵, 又不略去绕 z 轴的转动惯性, 则质量矩阵将仍为对角矩阵, 且是非奇异的, 于是系统的方程仍可写成

$$\begin{cases} \ddot{z} + \tilde{K}z = \tilde{B}u & \tilde{K} = \sqrt{\tilde{M}}^{-1} K \sqrt{\tilde{M}}^{-1} \\ y = \tilde{C}z & \tilde{B} = \sqrt{\tilde{M}}^{-1} B \quad \tilde{C} = \sqrt{\tilde{M}}^{-1} C \end{cases}$$

选

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} I_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

则 $\text{rank}[\tilde{B}, \tilde{K}\tilde{B}, \dots, \tilde{K}^{n-1}\tilde{B}] = 3n$ 满秩, 因而在折线型刚架自由时, 在一端作用有 x, y 方向的力, 和垂直 xy 平面的力矩, 则系统是完全可控的, 相仿, 只要测出 x, y 方向的位移, 以及该端点的截面在 xy 平面的转角, 系统也是完全可观测的.

3. 直梁解耦的情形

直梁的单元刚度矩阵可以解耦成四个子矩阵. 这是基于我们考虑的是小变形和略去轴向力对横向振动的影响而得到的, 由于无需经过坐标变换, 因而这种解耦的性质, 在综合到总体刚度矩阵时, 仍可保持, 即每一单元的一种变形将只会引起邻近单元的同种变形而不会引起邻近单元的其它变形. 这从工程上来看, 即直梁(轴)的扭转弯曲或纵向振动是不互相影响的. 由于这种性质, 不仅在理论上处理可控性可观测性比较简单, 而且具有实际意义. 例如发动机的转轴由于扭振而产生的破坏的观测就只需在扭转的子系统中进行.

1) 梁的纵向和扭转子系统

由于这种情形, 总刚度矩阵均为三对角阵, 而质量矩阵是对角阵且非奇异.

$$K = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & & & 0 \\ & \alpha_{21} & \alpha_{22} & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & \alpha_{n-1} \\ & & & & & & & \alpha_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}$$

子系统仍可写为

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x} + Kx &= Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \right\}$$

或等价地写成:

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{z} + \tilde{K}z &= \tilde{B}u & \tilde{K} &= \sqrt{M}^{-1} K \sqrt{M}^{-1} & \tilde{B} &= \sqrt{M}^{-1} B \\ y &= \tilde{C}z & \tilde{C} &= \sqrt{M}^{-1} C \end{aligned} \right.$$

由于 M 是对角阵, \tilde{K} 将仍是三对角矩阵, 且次对角线元素不等于零, 因而 \tilde{K} 没有重特征值. 由此取 $\tilde{B}^T = [1, 0, \dots, 0]$ 子系统就是可控的, 也就是说, 在梁的第一个结点上加上纵向力(对纵向振动)或加上扭矩(对扭振)系统就完全可控. 相仿只要测出第一个结点的纵向位移, 或扭转角, 则对应的子系统就完全可观测.

2) 弯曲子系统

在考虑一个方向的弯曲振动时, 略去剪切变形的影响, 梁单元的刚度矩阵为:

$$K_i = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & & & & \text{对称} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & & & \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & & \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^3} & \frac{4EI}{l} & \end{bmatrix}$$

显然, K_i 也可写成如下的分块形式:

$$K_i = \begin{bmatrix} A_i & C_i^T \\ C_i & B_i \end{bmatrix} \quad A_i, B_i, C_i \text{ 均} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

且 $\text{Det } C_i \neq 0$, C_i 可逆, 因此总刚矩阵将是块状三对角阵. 而质量矩阵按集中质量处理, 并计及转动惯性, 那么 M 依然是非奇异对角阵, 从而弯曲子系统方程仍为:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{z} + \tilde{K}z &= \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}z \end{aligned} \right\}$$

仿照以前的讨论, 取 $\tilde{B}^T = [I_2, 0, \dots, 0]$ 则系统就完全可控, 取 $\tilde{C} = \tilde{B}^T$ 系统也是完全可观测的. 当然这个 \tilde{B} 的给法并非是必要的, 倘若系统的振型已知, \tilde{B} 只要取为与全体振型都不正交的一个列向量就可以实现弯曲子系统的完全可控和可观测.

4. 边界条件的处理 (直梁情形)

1) 固定端. 若左端固定, 由此第一个结点上全部广义位移为零, 对应的总刚矩阵少去第一块行与第一块列, 此时总刚矩阵仍将与自由端的形式相仿而不影响可控与可观测性的结论, 不过控制点与观测点均需在第二个结点处建立.

2) 简支端. 设在左端, 而右端完全对称, 此时对应纵向子系统的总刚矩阵划去第一行第一列, 因而对可控与可观测没有影响, 而控制点与观测点均应在第二结点进行.

对应弯曲子系统刚度矩阵变为

$$\tilde{K}_3 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ \beta & G_1 + G_2 & F_2^T & \\ \gamma & F_2 & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$



图 2



图 3

由于 α, β, γ 均 $\neq 0$, 且 $\beta \neq \gamma$ 则

$$\tilde{K}_3 e_1 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$$

讨论矩阵

$$(e, \tilde{K}_3 e_1, \tilde{K}_3^2 e_1, \tilde{K}_3 e_2, \dots, \tilde{K}_3^{n-1} e_1, \tilde{K}_3^{n-2} e_2) \quad (*)$$

的秩, 由于 $(\tilde{K}_3 e_1, e_2)$ 经 Λ^{-n-2} 连续作用 $n-2$ 次后的矩阵 $[(\tilde{K}_3 e_1, e_2), \tilde{K}_3(\tilde{K}_3 e_1, e_2), \dots, \tilde{K}_3^{n-2}(\tilde{K}_3 e_1, e_2)]$ 的后 $2n-2$ 行满秩, 由此(*)之秩为 $2n-1$ 即满秩, 从而完全可控. 相仿对于简支端也可有完全可观测的结论. 需要指出的是在此情况下, 控制点或观测点, 对应转角的均可在第一个结点上进行, 而对应 y 方向的位移则在第二个结上进行.

以上无论是控制作用点与观测点在第几个结点上, 反映在实际工程上是将实际可以安置控制与观测点的位置作为结点之一, 然后进行计算, 以确定这种安置的合理性, 而在直梁的情形, 我们分析所得的结论刚好说明这样在端点或接近端点作为控制与观测点是合宜的. 这同现在的关于控制与观测的要求也是吻合的.

对于折线型刚架各种边界条件情形, 也可仿照梁的情形进行讨论, 并没有什么新的困难. 但是对于平面刚架或刚架的一般情形, 由于总刚矩阵并非块状三对角矩阵, 以及当我们有时在集聚质量矩阵中略去转动惯性的影响, 或更精密地采用分布质量矩阵, 虽然可以采用静凝聚方法使略去转动惯性影响的质量矩阵仍保持非奇异, 但这一切都将破坏总刚矩阵的块状三对角的特性, 对这样一些问题的可控与可观测性, 主要将依靠一、二所提的一般的办法进行处理.

由于目前已经具有比较成熟的计算方法求得正则矩阵束的广义特征值与特征向量^[8,12,13]. 因此原则上讲利用一、二中的方法对弹性结构有限元系统的可控与可观测以及镇定的研究在数值分析上将是可行的.

在系统单元划分过多的情形下, 上述数值分析将需要大容量和快速的计算机, 但在实际问题中, 我们常常主要对系统的少数振动频率及其振型的控制, 观测与镇定有兴趣, 此时我们可以利用大系统集成参数为小系统的办法来进行处理, 这方面将另行研究.

参 考 文 献

1. 王康宁, 关肇直, 弹性振动的镇定 I, 中国科学, 17(1974).
2. 王康宁, 关于弹性振动的镇定 II, 数学学报, 18(1975).
3. 王康宁, 关肇直, 弹性振动的镇定 III, 中国科学, 19(1976).
4. 宋健, 于景元, 带有反馈控制器的分布系统, 中国科学, 18(1975).
5. 宋健, 于景元, 点测量点控制的分布参数系统, 中国科学, 22(1979).
6. 冯康, 基于变分原理的差分格式, 应用数学与计算数学, 2, 4(1965).
7. 冯康, 《数值分析》, 国防工业出版社, 北京, (1979).

8. Batha, K. J. and Wilson, E. L., *Numerical Method in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.
9. Ray, W. H. and Dainiontis, D. G., *Distributed Parameter Systems Identification Estimation and Control*, Marcel Dekker Inc., New York and Basel. (1978).
10. Likins, P. W., Yoshiaki Ohkami, *Altitude Control Concepts for Precision—Pointing Nonrigid Spacecraft (Final Report)*, Prepared for George C. Marshall Space Flight Center, Marshall Space Flight Center, Alabama. 35812 Contract № NASS-28358 Mod 4 Contract Type. CR, (1975).
11. Gabasov, R. and Kirillora, F., *The Qualitative Theory of Optimal Processes*, Marcel Dekker Inc., New York and Basel. (1976).
12. Rosenbrock, H. H. *State—Space and Multivariable Theory*, Nelson, London, (1970).
13. Wonham, W. M., *Linear Multivariable Control, A Geometric Approach*, Springer, Berlin, (1974).
14. Aziz, A. K., Wingate, J. W. and Balas, M. J., *Control Theory of Systems Governed by Partial Differential Equations*, Academic Press Inc., New York, San Francisco, London, (1977).
15. Колесников, К. С. и Сухов, В. Н., Упругий Летательный Аппарат Как Объект Автоматического Управления, *Машиностроение*, (1974).
16. Гантмахер, Ф. Р., *Теория Матриц*, Изд. Наука, Москва, (1966).
17. Wilkinson, J. H. and Reinsch, C. (Editors), *Handbook for Automatic Computation, 2, Linear Algebra*, Springer-Verlag, Berlin, (1971).
18. 黄琳, 郑应平, 张迪, 李雅普诺夫第二方法与最优控制器分析设计问题, *自动化学报*, 2, 4, (1964).

Finite Element Control Systems of Elastic Structures

Huang Lin Chen De-cheng

(Beijing University, Beijing)

Abstract

In this article it is discussed the controllability, observability and stabilization of a system of elastic structures discretized by the finite element model. Whereas the conclusions here agree with those for the distributed parameter model. The finite element model is more suitable for using computer.

In section 1, we analyse controllability and observability of the system, and give a criterion for which computer may be used. In section 2, the linear feedback for stabilizing the system is examined in detail. It is pointed out that if the system is completely controllable, the vibration frequencies of the system can be arbitrarily disposed by using displacement feedback, but here the system can not be stabilized. The system can be stabilized by using velocity feedback, yet the ability of stabilization has limits. Equations of motion including rigid motion components are also given in section 2. In section 3, the problem of a beam is treated. It is pointed out that a straight beam, as a system, can be resolved into four subsystems of tension or compression, flexure in two directions and torsion. Each of them can be analysed. Finally a plane rigid frame of broken-line type is also handled.