

文章编号: 1000-0887(2004) 04-0354-05

# 车桥系统的耦合振动<sup>\*</sup>

陈 炎, 黄小清, 马友发

(华南理工大学 交通学院, 广州 510640)

(本刊编委黄小清来稿)

摘要: 通过用正弦波形模拟桥面的不平 and 考虑移动车辆-桥梁间的相互作用, 在 Euler-Bernoulli 梁理论的基础上建立了一种车桥系统的耦合振动模型。利用模态分析法和 Runge-Kutta 法对模型进行数值求解, 获得了车桥系统耦合振动的动态响应和共振曲线。发现车桥耦合振动的共振曲线中存在两个共振区域, 一个反映主共振而另一个反映次共振。讨论了桥面不平、桥梁振型和车辆间的相互作用对系统振动的影响。数值结果表明, 这些参数对系统振动的影响很大, 桥面不平和振型对车桥系统耦合振动的影响不能忽略, 设计车速应该远离临界车速。

关键词: 耦合振动; 动态响应; 共振; 车辆-桥梁系统; 共振临界车速

中图分类号: O175; U441.3 文献标识码: A

## 引 言

车桥系统振动是一个古老而又复杂难解的课题, 其振动机理在桥梁设计、维护和控制中起着重要的作用。但是, 虽然已有大量关于移动荷载下桥梁振动的理论研究、数值研究和实验分析<sup>[1~11]</sup>, 迄今为止仍然没有清楚桥梁振动的所有特征。原因是这些研究要么忽略车辆惯性<sup>[1~3]</sup>、要么忽略桥梁与车辆移动间的相互作用<sup>[1~8]</sup>、要么忽略桥面不平<sup>[1~10]</sup>的影响、要么忽略桥梁振型对相互作用的影响<sup>[11]</sup>。这种状况严重影响桥梁设计的合理性及其使用性能。因为现代桥梁设计得越来越轻长, 移动车辆的作用对系统的影响更为突出。全面了解车桥系统振动的特性, 能大大地提高桥梁结构的安全及使用性能。本文所建立的车桥振动模型综合考虑了前述各种因素, 使之更切实际, 并利用数值方法对车桥振动的特性进行了研究。

## 1 车桥系统振动模型

车桥系统的相互影响是复杂的, 为了抓住主要矛盾, 把车桥系统简化为如图 1 所示的质量弹簧桥梁系统, 桥简化为具有等效刚度的 Euler-Bernoulli 梁。桥面不平用  $w(x) = d \sin(\omega_0 x)$  来模拟, 其中  $d$  和  $\omega_0$  分别表示路面不平波形的幅度和频率。车辆只考虑竖向模型, 并假定轮胎不离桥面, 则系统的运动微分方程为

$$m_2 \ddot{z}_2 + m_1 \ddot{z}_1 + c_1 [y(vt, t) + z_1 - w] + k_1 [y(vt, t) + z_1 - w] = 0, \quad (1)$$

\* 收稿日期: 2002\_02\_04; 修订日期: 2003\_11\_18

基金项目: 广东省自然科学基金资助项目(011602)

作者简介: 陈炎(1963—), 男, 广西藤县人, 讲师, 博士(联系人, Tel: + 86\_20\_87111304; E-mail: retange@21cn.com)。

$$m\ddot{z} + c(z - \dot{z}_1) + k(z - z_1) = 0, \tag{2}$$

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial y}{\partial t} + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = [(m + m_1)g + m\ddot{z} + m_1\dot{z}_1] \delta(x - vt), \tag{3}$$

式中  $y, z$  和  $z_1$  分别是桥、车体和车轮的位移;  $m, c$  和  $k$  分别是车体的质量、阻尼和弹簧系数;  $m_1, c_1$  和  $k_1$  分别是轮胎的质量、阻尼和弹簧系数;  $EI, \mu, \rho$  和  $L$  分别是桥的抗弯刚度、阻尼、单位长度质量和桥长。设  $y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} U_i(x) q_i(t)$ , 其中  $U_i(x) = \sqrt{2/(\rho L)} \sin(i\pi x/L)$  是桥的正则化振型。

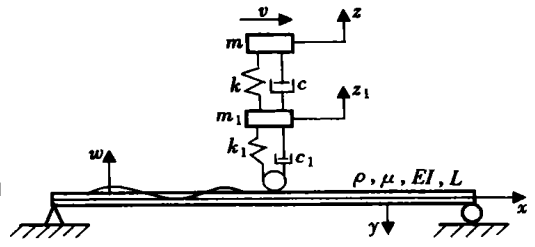


图 1 车轿系统模型

把  $y(x, t)$  代入方程(3) 并在两边乘以  $U_i(x)$ , 对  $x$  在  $[0, L]$  上积分, 注意振型的正交性和  $\delta$  函数的性质, 可得

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i p_i \dot{q}_i + p_i^2 q_i = U_i(vt) [(m + m_1)g + m\ddot{z} + m_1\dot{z}_1], \tag{4}$$

式中

$$p_i^2 = \frac{EI}{\rho} \left( \frac{i\pi}{L} \right)^4, \quad 2\xi_i p_i = \frac{\mu}{\rho}.$$

车体和轮胎的频率和阻尼分别为

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad \zeta = \frac{c}{2m\omega}, \quad \omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1}, \quad \zeta_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_1}.$$

引入无量纲参数(其中  $f$  是桥的最大静位移)

$$\gamma = \frac{m}{\rho}, \quad \gamma_1 = \frac{m_1}{\rho}, \quad \Omega_1 = \frac{\omega_1}{p_1}, \quad \Omega = \frac{\omega}{p_1}, \quad \alpha = \frac{v\pi}{lp_1}, \quad f = \frac{\pi^4(m + m_1)g}{48L\rho_1},$$

$$\theta_1 = \frac{(m + m_1)g}{f}, \quad Z = \frac{z}{f}, \quad Z_1 = \frac{z_1}{f}, \quad Y = \frac{y}{f}, \quad u_i = \frac{q_i}{f}, \quad W = \frac{w}{f}.$$

将上述无量纲参数代入式(1)、(2)、(4), 则车桥系统的运动方程表示为:

$$\ddot{Z}_1 + \frac{\gamma}{\gamma_1} \dot{Z}_1 + 2\zeta_1 \Omega_1 (Y + Z_1 - W) + \omega_1^2 (Y + Z_1 - W) = 0, \tag{5}$$

$$\ddot{Z} + 2\zeta \Omega (Z - Z_1) + \omega^2 (Z - Z_1) = 0, \tag{6}$$

$$\ddot{u}_i + 2\xi_i p_i \dot{u}_i + p_i^2 u_i = \rho U_i(vt) (f_1 + \gamma \dot{Z} + \gamma_1 \dot{Z}_1), \tag{7}$$

式中

$$Y(vt, t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(t) U_i(vt).$$

式(5)、(6)、(7) 可写成矩阵形式

$$M\ddot{U} + CU + KU = F, \tag{8}$$

其中

$$U = \left\{ Z_1, Z, u_1, u_2, \dots, u_n \right\}^T,$$

$$F = \begin{bmatrix} 2\zeta_1 p_1 \Omega_1 W + p_1^2 \Omega_1^2 W \\ 2\zeta_1 p_1 \Omega W + p_1^2 \Omega^2 W \\ \rho U_1(vt) f_1 \\ \rho U_2(vt) f_1 \\ \vdots \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \gamma/\gamma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\rho\gamma_1 U_1 & -\rho\gamma U_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\rho\gamma_1 U_2 & -\rho\gamma U_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2\zeta_1 p_1 \Omega_1 & 0 & 2\zeta_1 p_1 \Omega_1 U_1 & 2\zeta_1 p_1 \Omega_1 U_2 & \dots \\ -2\zeta_1 \Omega & 2\zeta_1 \Omega & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2\xi_1 p_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 2\xi_2 p_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} p_1^2 \Omega_1^2 & 0 & p_1^2 \Omega_1^2 U_1 + 2\zeta_1 p_1 \Omega_1 U_1 & 2^2 p_1^2 \Omega_1^2 U_1 + 2\zeta_1 p_1 \Omega_1 U_2 & \dots \\ -p_1^2 \Omega^2 & p_1^2 \Omega^2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & p_1^2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & p_2^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix},$$

其中  $M$ 、 $C$ 、 $K$  分别是  $(n+2)$  阶质量、阻尼和刚度矩阵,  $F$  是  $(n+2)$  阶荷载向量,  $U$  是  $(n+2)$  自由度向量。

## 2 车桥耦合振动的特性

方程(8)是准周期系数的非自治微分方程组, 此类方程的求解可将人们带入现代数学的最前沿, 其解析求解是非常困难的。本文用 Runge\_Kutta 方法进行数值求解, 模拟中只取起主要作用的一阶振型。计算结果示于图 2 和图 3 中。

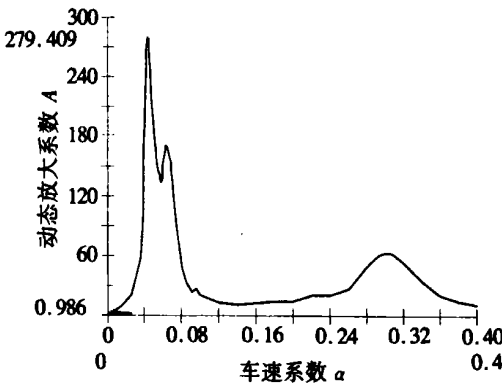


图 2 轻车时最大位移与车速的关系

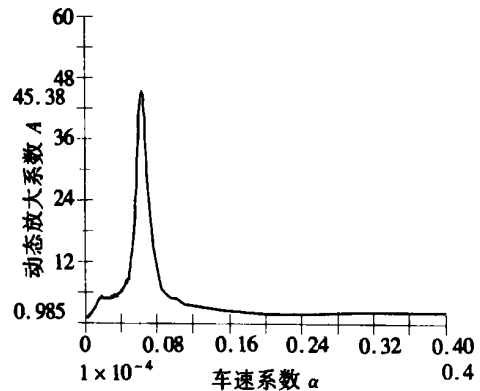


图 3 重车时最大位移与车速的关系

图 2 是某轻车通过时桥的动态放大因子 ( $A = y_{\max}/f$ ) 与车速系数 ( $\alpha$ ) 的关系。桥的参数是  $E = 3.303 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ ,  $I = 18.638 \text{ m}^4$ ,  $\rho = 334 \text{ kg/m}$ ,  $\xi_1 = 0.03$ ,  $L = 40 \text{ m}$ 。按《公路工程质量评定标准》JTJ071\_94, 可取  $d = 5 \text{ mm}$ , 路面不平的半波长  $l = 5 \text{ m}$ 。而该车的参数为  $(m, m_1) = (1776, 364) \text{ kg}$ ,  $(c, c_1) = (5295, 3000) \text{ N}\cdot\text{s/m}$ ,  $(k, k_1) = (195470, 121 \times 10^4) \text{ N/m}$ 。由图 2 可见最大位移曲线在  $\alpha = 0.043, 0.064, 0.305$  处存在峰值, 即共振临界车速或共振亚临界车速发生在这几个地方, 同时可知桥的最大挠度(约为  $2.5d$ ) 是静挠度的 279.4 倍。

可见耦合振动的影响是巨大的,其原因是,轻车通过时产生的静挠度非常小,使得  $d/f$  很大(约为 110 倍),于是  $W(vt)$  成为方程(8)的序参量,对系统振动起决定性作用,而振型  $U_i(vt)$  对系统的振动影响很小。由此可知,桥面不平度对车桥耦合振动的影响不能忽略,同时也说明了不平度的确定对车桥系统振动研究有重要意义。

图 3 是某重车通过桥梁时,桥的动态放大因子 ( $A = y_{\max}/f$ ) 与车速系数 ( $\alpha$ ) 的关系。桥的参数同前例。而该重车的参数为  $(m, m_1) = (13\ 760, 2\ 382)$  kg,  $(c, c_1) = (8 \times 10^4, 4 \times 10^4)$  N·s/m,  $(k, k_1) = (5 \times 10^6, 10^7)$  N/m。此时最大挠度曲线只有一个峰值,共振临界车速发生在  $\alpha = 0.065$  处,峰值的大小是静挠度的 45.4 倍,比前例大为减小,这是因为重车通过时静挠度比较大,从而  $d/f$  较小,不平度对车桥振动的影响较前例大大减低,振型  $U_i(vt)$  对车桥振动的影响则逐步增加。

通过上述算例,可以看到车桥耦合振动与  $L, f, \alpha, d/f, \gamma, \gamma_1, \Omega, \Omega_1$  等因素有着密切的联系,共振临界车速也不是一个固定值,所以在进行振动控制时,应求出共振参数区域,而不能单从临界车速系数一个方面进行控制。同样,公路设计车速的确定以及桥梁强度的制订除安全因素外,应考虑桥梁振型和桥面不平的影响以及考虑桥梁基频与车辆基频的关系。车速不能过大以免引起不安全,也不能过低以免落入共振参数区域。设计行车速度应选在共振临界车速前方,  $A$  曲线已经下降到较平缓的曲线区域。

如果不考虑惯性、不考虑不平度,则桥梁的最大挠度仅为静挠度的 1.5 倍,可见车桥系统振动的模型对研究结果影响极大。本文的研究表明,车桥系统模型也不能忽略振型  $U_i(vt)$  及其导数的影响,因为一旦车辆进入桥梁,桥梁便已开始变形,则桥的振型对于汽车来说成为随时间变化的位移约束,必然会产生阻尼,从而影响车桥系统的振动。忽略了这一因素的模型只有在  $d/f$  很小时才是可行的,否则误差极大,甚至产生本质性的错误。

### 3 结 论

建立了切合实际的车桥系统振动模型,考虑了桥面不平及桥梁振型对系统振动的影响,研究表明,它们对车桥耦合振动的影响非常大。

轻型车通过桥梁时,桥面不平是系统演变的序参量,这是因为方程(8)中驱动项  $d/f$  的幅值变大所致。桥梁最大变形曲线( $A_\alpha$ ) 存在 3 个峰值,即存在共振临界车速和亚临界车速,临界车速时的最大位移可达最大静位移的 279.4 倍,显示了桥面不平对系统振动的巨大作用。

重车通过桥梁时,桥梁最大变形曲线 ( $A_\alpha$ ) 只存在一个峰值,即只存在共振临界车速,此时最大位移是静位移的 45.4 倍,这是因为重车通过时,不平度与静挠度之比  $d/f$  较小,不平度对系统演变的影响减弱,桥梁振型及其导数对系统演变的影响增加,方程(8)中驱动项的幅值变小所致。

共振临界车速及亚临界车速处的振动应进行控制,控制的实现有赖于共振临界参数区域的确定。这个参数区域也是确定公路设计行车速度和确定桥梁设计强度的依据。

忽略桥面不平和桥梁振型的车桥振动模型会引起很大的误差,甚至产生本质性的错误。

### [参 考 文 献]

- [1] Zibdeh H S. Stochastic vibration of an elastic beam due to random moving loads and deterministic axial forces[J]. Engineering Structures, 1995, 17(7): 530—535.

- [2] Zibdeh H S, Rechwitz R. Moving loads on beams with general boundary conditions[J]. Journal of Sound and Vibration, 1996, **195**(1): 85—102.
- [3] Wang R T. Vibration of multi-span Timoshenko beams to a moving force [J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, **207**(5): 731—742.
- [4] Foda M A, Abduljabbar Z. A dynamic green function formulation for the response of a beam structure to a moving mass[J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, **210**(3): 295—306.
- [5] Xu X, Xu W, Genin J. A nonlinear moving mass problem[J]. Journal of Sound and Vibration, 1997, **204**(3): 495—504.
- [6] Michaltsos G, Sophianopoulos D, Kounadis A N. The effect of moving mass and other parameters on the dynamics response of simply supported beam[J]. Journal of Sound and Vibration, 1996, **191**(3): 357—362.
- [7] Cai Y, Chen S S, Rote D M, et al. Vehicle/guideway interaction for high speed vehicles on a flexible guideway[J]. Journal of Sound and Vibration, 1994, **175**(5): 625—646.
- [8] Green M F, Cebon D. Dynamic response of highway bridges to heavy vehicle loads: theory and experimental validation[J]. Journal of Sound and Vibration, 1994, **170**(12): 51—78.
- [9] Lee H P. Dynamic response of beam with a moving mass[J]. Journal of Sound and Vibration, 1996, **191**(2): 289—294.
- [10] Tan G H, Brameld G H, Thambiratnam D P. Development of an analytical model for treating bridge-vehicle interaction[J]. Engineering Structures, 1998, **20**(1/2): 250—260.
- [11] Kawatani M, Kim C W. Computer simulation for dynamic wheel loads of heavy vehicles[J]. Structural Engineering and Mechanics, 2001, **12**(4): 409—428.

## Coupling Vibration of Vehicle\_Bridge System

CHEN Yan, HUANG Xiaoqing, MA Youfa

(College of Traffic and Communications, South China University of Technology,  
Guangzhou 510640, P. R. China)

**Abstract:** By applying the sinusoidal wave mode to simulate the rugged surface of bridge deck, accounting for vehicle-bridge interaction and using Euler-Bernoulli beam theory, a coupling vibration model of vehicle-bridge system was developed. The model was solved by mode analyzing method and Runge-Kutta method, and the dynamic response and the resonance curve of the bridge were obtained. It is found that there are two resonance regions, one represents the main resonance while the other the minor resonance, in the resonance curve. The influence due to the rugged surface, the vibration mode of bridge, and the interaction between vehicle and bridge on vibration of the system were discussed. Numerical results show that the influence due to these parameters is so significant that the effect of roughness of the bridge deck and the mode shape of the bridge can't be ignored and the vehicle velocity should be kept away from the critical speed of the vehicle

**Key words:** coupling vibration; dynamic response; resonance; vehicle-bridge system; critical speed of vehicle