应用数学和力学,第 26 卷 第 12 期(2005 年 12 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 12_1487_06

一类渗流方程解在边界上的不稳定性和 Blow_up

曹镇潮[1], 陈彭年[2]

(1. 厦门大学 数学科学学院 厦门 361005;
2. 中国计量学院 数学系, 杭州 310018)

(张鸿庆推荐)

摘要: 对一类具有非线性第二、第三边值条件的非线性渗流方程,证明了解的先验的界可以用初值和解在区域边界上的积分来估计和控制 这一先验估计是通过迭代技巧来建立的 根据这个估计,解可能在边界上爆破(Blow_up) 从而解有渐近不稳定性

关 键 词: 渗流方程; 解的先验估计; 渐近不稳定性; 解在边界上的 Blow_up

中图分类号: O175.26; O357.30 文献标识码: A

1 引言和渗流模型

设 $R^n(n \quad 2)$ 为具有光滑边界 的有界区域,考虑下述带非线性边界条件的初_边值问题:

$$\begin{cases} (|\ u(x,t)\ |^{m-1}u)_t - \dfrac{}{x_i}\left(a_{ij}(x,t)\ \dfrac{u}{x_j}\right) + \ c(x,t)\ \ u = f(x,t,u), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x,t) \qquad (0,T), \\ a_{ij}\ \dfrac{u}{x_i}\ n_j + \ b(x,t)u = \ g(x,t,u), \qquad (x,t) \qquad (0,T), \\ u(x,0) = \ u_0(x), \qquad\qquad\qquad x \qquad , \end{cases} \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, \quad , n_n)$ 是边界 的单位外法向量, $a_{ij} = a_{ji}$ 满足:

$$0 \qquad |\quad|^2 \qquad a_{ij} \ \ {}_{i}\ {}_{j}, \qquad\qquad R^n,$$

$$^{-1}(x,t) \qquad L^s(\quad), \qquad\qquad t \qquad (0,T),$$

$$s > n, 0 < m \qquad \frac{s(n+2) - n}{s(n-2) + n}$$

方程中的系数满足必要的光滑条件,并且 $c \quad c_0 > 0$, $b \quad 0$, $g(x,t,\ ) \quad = g_0(1+|\quad|)^{1+}$, > 1, $f(x,t,\ ) \quad f_0 |\quad|$, $0 < \quad < 2$, c_0、g_0、f_0 为正常数

当 $0 < m < 1$, 这是带源或流 $f(u)$ 的稀疏介质方程, 此模型见于地下水流和生物、人口动

收稿日期: 2003_05_17; 修订日期: 2005_05_31
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60274008; 10171084)
作者简介: 曹镇潮(1946) , 男, 福建人, 教授, 硕士(联系人. Tel: + 86_592_2181807; Fax: + 86_592_2183209; E_mail: caozhen@ xmu. edu. cn)

力学问题; $m=1$ 时模型是非线性热传导问题; $m>1$ 时模型来源于等离子体和快速扩散反应问题的研究

本文将证明模型的解可以通过初值 $u_0(x)$ 和边界积分 $\sup\limits_{(0,T)} \quad |u(s,t)|^p\,\mathrm{d}s$ 来控制 这不同于 Roth[1] 的研究结果, 他是通过 $u_0(x)$ 和区域积分 $\sup\limits_{(0,T)} \quad |u(x,t)|^p\,\mathrm{d}x$ 来估计解 根据我们的估计, 解可能在边界爆破(Blow_up), 这不同于 Friedman[2,3] 解在单点或者内部紧子集上爆破的研究结果, 这也不同于 Gomez 等人[4] 的研究, 他们只在球域 $= B_R = \left\{x \mid \quad x \quad < R\right\}$ 里研究带非线性边值条件的热传导方程, 并指出, 解的爆破可能发生在球面边界 $_R$ 上

2 物 理 背 景

注意到超线性增长条件是作为第二、第三边值条件来给出的, 这指的是物体表面和它周围介质之间的热交换满足吸收律 当时间充分大后, 将可能导致物体表面燃烧(Blow_up) 典型的例子是 流星 , 当它从外太空进入地球大气层时, 它的表面与大气层激烈摩擦进行超线性热吸收, 从而导致 Blow_up 的表面燃烧现象

3 主 要 结 果

定理 1 设 $p \quad (s(\quad -1)(n-1)/(s-n), + \quad)$, 则模型(1) 的解 $u(x,t)$ 满足

$$\sup |u(x,t)| \quad A_0\left(1+\max|u_0(x)|\right)\left(1+\sup_{(0,T)} \quad |u(s,t)|^p\,\mathrm{d}s\right)^{0},$$

其中正常数 A_0、$_0$ 不依赖于 $u(x,t)$、t、T

定理 2 如果模型(1) 不存在全局解, 那么解的渐近不稳定性和 Blow_up 现象将发生在边界上

注 可在适当的解空间中研究广义解来取代古典光滑解

4 一些积分型估计

我们将利用 H lder, Sobolev, Yong 不等式建立一些必要的积分估计[5,6,7]

用 V 表示 $C^1(\quad)$ 关于下述范数的完备化空间:

$$\left\{ \quad \left(a_{ij}\frac{v}{x_i}\frac{v}{x_j}+v^2\right)\mathrm{d}x\right\}^{1/2}$$

引理 1 V 连续嵌入 $L^{q_1}(\quad)$ 和 $L^{q_2}(\quad)$, 其中

$q_1 \quad [2s/(1+s), 2sn/[n+s(n-2)]]$,

$q_2 \quad [2s/(1+s), 2s(n-1)/[n+s(n-2)]]$

引理 2 取 $v(x, \quad) = u(x, \quad)^{-1+2^k}$, $k \quad 1$, 则 $\quad (0,1]$ 有

$$|u|^{-1+2^k}\mathrm{d}s \qquad u^{2^{k-1}} \quad {}^2_V + \quad ^{-}{}_1\left\{1+ \quad |u|^p\mathrm{d}s\right\}^{2}\left\{ \quad |u^{2^k}|\,\mathrm{d}s\right\} \qquad (2)$$

其中, A、$_1$、$_2$ 是正常数 为简便, 以下积分略去了积分变量简写为 u 和 u

引理 3 设 $\quad (2, 2s(n-1)/[s(n-2)+n])$, 则 $\quad (0,1]$, 有

$$|v(x, \quad)|^2 \qquad v \quad ^2 + A^{-}\left\{1+ \quad |v|^p\right\}^{2/p},$$

$$v(x,\ )\quad V \tag{3}$$

引理 4 取 $v(x,\ ) = u^{2^{k-1}}$, $k\ \ 2$, 则 $(0, 1]$, 有

$$|\ u^{2^{k-1}}|^2 \qquad u^{2^{k-1}}\ {}^2_V + A^{-}\left\{\frac{1}{|\ \ |}\quad |\ u|^{m-1+2^k}\right\}^{2^k/(m-1+2^k)} \tag{4}$$

引理 5 取 $v(x,\ ) = u^{m-1+2^k}$, $k\ \ 2$, 则 $(0, 1]$, 有

$$U_k(t)^{2^k/(m-1+2^k)} \qquad u^{2^{k-1}}\ {}^2_V + A^{-}\ U_{k-1}(t)^{2^k/(m-1+2^{k-1})}, \tag{5}$$

其中 $U_k = \dfrac{1}{|\ \ |}\quad |\ u|^{m-1+2^k}$

5 解的 L 估计和定理的证明

以下所有的正常数 A、A_0、A_1、A_2、 、 、 $_0$、 $_1$、 $_2$、 都仅仅依赖于式(1) 中的原始数据 c_0、f_0、g_0、 、 、m、n、 、 及嵌入常数 E_0, 而与 $u(x, t)$、t、T、k 无关

在式(1) 中两边乘以 $u^{2^{k-1}}$, $k\ \ 1$, 然后对 x 积分, 有

$$\frac{m}{m-1+2^k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_k(t) + \frac{2^k-1}{|\ \ |(2^{k-1})^2}\quad a_{ij}\frac{u^{2^{k-1}}}{x_i}\frac{u^{2^{k-1}}}{x_j} + \frac{1}{|\ \ |}\quad cu^{2^k} =$$

$$\frac{1}{|\ \ |}\quad g(x, t, u)uu^{2^k-2} + \frac{1}{|\ \ |}\quad f(x, t, u)uu^{2^k-2} - \frac{1}{|\ \ |}\quad bu^{2^k}$$

$$\frac{1}{|\ \ |}g_0\quad (1+|\ u|)^{\ +1}|\ u|^{2^k-2} + \frac{1}{|\ \ |}\quad f_0|\ u|^{\ +2^k-2}$$

$$A_0\quad (1+|\ u|^{\ -1+2^k}) + \frac{c_0}{N|\ \ |}\quad |\ u|^{2^k} + \left(\frac{N}{c_0}f_0\right)^{2^k/(2-\ )},$$

其中 $N\ \ 2$ 是充分大的正整数, 使得 $N/c_0\ \ 1$ 对于情况 $m\ \ 1$, 由于

$(2^k-1)/[|\ \ |(2^{k-1})^2](m-1+2^k)/m\quad 2/(m|\ \ |)$,

$(m+2)^k\quad (m-1+2^k)/m\quad 1$,

于是我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_k(t) + \frac{2}{m|\ \ |}\quad a_{ij}\frac{u^{2^{k-1}}}{x_i}\frac{u^{2^{k-1}}}{x_j} + \frac{c_0}{2|\ \ |}\quad |\ u|^{2^k}$$

$$A_1(m+2)^k(1+|\ u|^{s-1+2^k}) + A^{2^k}$$

对于情况 $0 < m < 1$, 由于 $m/(m-1+2^k/2^k) > m/2^k$, $c_0/|\ \ |\quad c_0m/(|\ \ |2^k)$, $(2^k-1)/[|\ \ |(2^{k-1})^2]\quad 2/(|\ \ |2^k)$, 于是也有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_k(t) + \frac{2}{m|\ \ |}\quad a_{ij}\frac{u^{2^{k-1}}}{x_i}\frac{u^{2^{k-1}}}{x_j} + \frac{c_0}{2|\ \ |}\quad |\ u|^{2^k}$$

$$\frac{A_0}{m}2^k\quad (1+|\ u|^{\ -1+2^k}) + \left(\frac{N}{c_0}f_0\right)^{2^k/(2-\ )}\left(\frac{2}{m}\right)^{2^k}$$

$$A_1(2+m)^k\left(1+\quad |\ u|^{\ -1+2^k}\right) + A^{2^k}$$

记 $4\ _0 = \min\left\{2/(m|\ \ |), c_0/(2|\ \ |)\right\}$, 由上式可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_k(t) + 4\ _0\quad u^{2^{k-1}}\ {}^2_V\quad A_1(m+2)^k\left(1+\quad |\ u|^{\ -1+2^k}\right) + A^{2^k} \tag{6}$$

现在在上式中应用估计式(2), 其中取 $\ = \min\left\{1,\ \ _0/[A_1(m+2)^k]\right\}$, 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_k(t) + 3 \quad {}_0 \quad u^{2^{k-1}} \quad {}_V^2$$

$$A_2(m+2)^k \, {}^3\left\{1+\left(1+ \quad | u |^p\right)^4 \quad | u |^{2^k}\right\}+A^{2^k} \tag{7}$$

当 $k = 1$, 可在上式中应用估计式(3), 其中取

$$= \min\left\{1, \ {}_0/\left[A_2(m+2) \ {}^3\left(1+ \quad | u |^p\right)^4\right]\right\},$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_1(t) + 2 \quad {}_0 \quad u \quad {}_V^2 \quad A_3\left(1+ \quad | u |^p\right)^5$$

由于 $m+1 \quad 2sn/[s(n-2)+n]$, 所以 $V \quad L^{m+1}(\quad)$ 于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_1(t) + A_4 U_1(t)^{2/(m+1)} \quad A_4 \ B,$$

其中 $B = \frac{A_3}{A_4}\left(1+ \sup_{(0,T)} \quad | u |^p\right)^5$

由这一微分不等式可以导出 $U_1(t) \quad \max\left\{U_1(0), B^{(m+1)/2}\right\}$ 因为

$$U_1(0) = \frac{1}{\quad} \quad | U(x,0) |^{m+1} \quad \max | u_0(x) |^{m+1},$$

所以

$$U_1(t)^{1/(m+1)} \quad \max\left\{\max | u_0(x) |, A_5\left(1+ \sup_{(0,T)} \quad | u |^p\right)^6\right\} \tag{8}$$

当 $k \quad 2$, 在(7)式中应用估计式(4), 其中取

$$= \min\left\{1, \ {}_0/\left[A_2(m+2)^k \ {}^3\left(1+ \quad | u |^p\right)^4\right]\right\},$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_k(t) + 2 \quad {}_0 \quad u^{2^{k-1}} \quad {}_V^2$$

$$A_6(m+2)^k \, {}^7\left\{1+\left(1+ \quad | u |^p\right)^{kR_8} U_k(t)^{2^k/(m-1+2^k)}\right\}+A^{2^k}{}_\# \tag{9}$$

结合估计式(5), 其中取 $E = \min\left\{R_0/A_6(m+2)^{kR_7}\left(1+Q58 \, | u |^p\right)^{R_8}, 1\right\}$, 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_k(t) + M_0 + u^{2^{k-1}} {}_+ \ {}_V^2 \ [$$

$$A_7(m+2)^{kR_9}\left\{1+\left(1+Q58 \, | u |^p\right)^{kR_{10}} U_{k-1}(t)^{2^k/(m-1+2^{k-1})}\right\}+A^{2^k}{}_\# \tag{10}$$

另一方面, 在估计式(5)取 $E = \min\left\{1, M_0\right\}$, 可得

$$U_k(t)^{2^k/(m-1+2^k)} \ [\quad M_0 + u^{2^{k-1}} {}_+ \ {}_V^2 + A_8 U_{k-1}(t)^{2^k/(m-1+2^{k-1})}{}_\#$$

把上式和(10)式结合, 即得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_k(t) + U_{k-1}(t)^{2^k/(m-1+2^{k-1})} \ [$$

$$A_9(m+2)^{kR_9}\left\{1+\left(1+Q58 \, | u |^p\right)^{kR_{10}} {}_\# \ U_{k-1}(t)^{2^k/(m-1+2^{k-1})}\right\}+A^{2^k} \ [\quad B_k,$$

其中

$$B_k = A_{10}(m+2)^{kR_9}+\left(1+\sup_{(0,T)Q58} \, | u |^p\right)^{R_{10}}\left[(A+1)^{2^k}+\right.$$

$$\left.\sup_{(0,T)} U_{k-1}(t)^{2^k/(m-1+2^{k-1})}\right]。$$

从这一微分不等式可推得:

$$U_k(t) \le \max\left\{U_k(0),\ B^{(m-1+2^k)/2^k}\right\} \le \max\left\{\max_{\Omega} |u_0(x)|^{m-1+2^k},\ B_k^{(m-1+2^k)/2^k}\right\},$$

从而

$$U_k(t)^{1/(m-1+2^k)} \le \max\left\{\max_{\Omega} |u_0(x)|,\ B_k^{1/2^k}\right\}, \tag{11}$$

其中

$$B_k^{1/2^k} = (m+2)^{k\alpha_9/2^k}\left[A_{10}\left(1+\sup_{(0,T)\times\partial\Omega}|u|^p\right)^{\alpha_{10}}\right]^{1/2^k}\left[(A+1)^{2^k}+\right.$$

$$\left.\sup_{(0,T)} U_{k-1}(t)^{2^k/(m-1+2^{k-1})}\right]^{1/2^k}。$$

令 $M = \max\left\{\max_{\Omega}|u_0(x)|,\ \sup_{(0,T)} U_1(t)^{1/(m+1)},\ A+1\right\}$,

根据(11)式进行迭代,有

$$U_2(t)^{1/(m-1+2^2)} \le \max\left\{M,\ (m+2)^{2\alpha_9/2^2}\left[A_9\left(1+\sup_{(0,T)\times\partial\Omega}|u|^p\right)^{\alpha_{10}}\right]^{1/2^2} 2^{1/2^2}M\right\},$$

$$U_3(t)^{1/(m-2+2^3)} \le \max\left\{M,\ (m+2)^{\alpha_9(2/2^2+2/2^3)}\cdot\right.$$

$$\left.\left[A_9\left(1+\sup_{(0,T)\times\partial\Omega}|u|^p\right)^{\alpha_{10}}\right]^{1/2^2+1/2^2} 2^{1/2^3+1/2^3}M\right\},$$

,,

$$U_k(t)^{1/(m-2+2^k)} \le \max\left\{M,\ (m+2)^{\alpha_9\sum^k \frac{i}{2^i}}\left[2A_9\left(1+\sup_{(0,T)\times\partial\Omega}|u|^p\right)^{\alpha_{10}}\right]^{\sum^k\frac{1}{2^i}}M\right\}。$$

在上式中令 $k\to\infty$,我们有

$$\|u(x,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le \max\left\{M,\ (m+2)^{\alpha_{11}}A_{10}\left(1+\sup_{(0,T)\times\partial\Omega}|u|^p\right)^{\alpha_{12}}M\right\}。$$

把上述估计与估计式(8)结合,即得

$$\|u(x,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le A_0\left(1+\max_{\Omega}|u_0(x)|\right)\left(1+\sup_{(0,T)\times\partial\Omega}|u(x,t)|^p\right)^{\alpha_0},$$

这就是定理1所要证的估计。

现在讨论模型(1)解的渐近不稳定性和Blow_up现象。如果模型(1)不存在全局解,即解在有限时间 T_0 时, $\lim\limits_{t\to T_0^-}\|u(x,t)\|_{L^\infty(\Omega)} = +\infty$,那么,由定理1的结论,可知解必在边界上爆破,即

$$\sup_{(0,T)\times\partial\Omega}|u(s,t)|^p\mathrm{d}s = +\infty。$$

这就是定理2的结论。

模型(1)中当 $m = 1$ 时,解在有限时间爆破的可能性可见文献[8]和文献[4],其中当 $m = 1$ 和 $\Omega = B_R = \left\{x \mid \|x\| \le R\right\}$ 时,文献[4]讨论了解在球面上发生爆破的可能性。

6 可能的应用

我们来探讨如何采取措施来防止解在有限时间爆破的问题(防爆问题),比如: $\mathrm{d}u(t)/\mathrm{d}t = u^2$, $u(0) = u_0$, $0 < u_0 \le 1$, 它的解 $u(t) = u_0/(1-tu_0)$ 在有限时间 $T_0 = 1/u_0$ 时爆破。

我们可设法对 u^2 这一项引进/充分小0 的系数 e^{-t}, 问题转化为 $du(t)/dt = e^{-t}u^2$, $u(0) = u_0$, $0 < u_0 \leq 1$, 它的解 $u(t) = u_0/(u_0e^{-t} + 1 - u_0)$ 成为全局稳定解, 不会在任何时间爆破#

[参 考 文 献]

[1] Rothe F. Uniform bounds from bounded L_functionals in reaction_diffusion equations[J]. J Differential Equations, 1982, 45(2): 207) 233.

[2] Friedman A, Lacey A A. Blow up of solutions of semilinear parabolic equations[J]. J Math Anal Appl, 1988, 132(1): 171) 186.

[3] Friedman A Mcleod B. Blow_up of positive solutions of semilinear heat equations[J]. Indian Univ Math J, 1985, 34(2): 425) 447.

[4] Gomez Lope J, Marquez V, Wolanski N. Blow_up results and localization of blow up points for the heat equation with a nonlinear boundary condition[J]. J Differential Equations, 1991, 92(2): 384) 401.

[5] Alikakos N D. An application of the invariance principle to reaction_diffusion equations[J]. J Differential Equations, 1979, 33(2): 201) 225.

[6] CAO Zhen_chao, GU Lian_kun. Initial_boundary value problem for a degenerate quasilinear parabolic equation of order 2m [J]. J Partial Differential Equations, 1990, 3(1): 13) 20.

[7] Ladyzenskaja O A, Solonnikov V A, Uralceva N N. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type[M]. AMS Translations of Mathematical Monographs, Vol 23, Rhode Island: AMS, 1968.

[8] Levin H A. Nonexistence theorems for the heat equation with nonlinear boundary conditions and for the porous medium equation backward in time[J]. J Differential Equations, 1974, 16(2): 319) 334.

Asymptotic Non_Stability and Blow_up at the Boundary for the Solutions of a Filtration Equation

CAO Zhen_chao[1], CHEN Peng_nian[2]

(1. Department of Mathematics, Xiamen University, Xiamen, Fujian 361005, P.R.China;
2. Department of Mathematics, China Institute of Metrology, Hangzhou 310018, P.R.China)

Abstract: For a class of nonlinear Filtration equation with nonlinear second_third boundary value condition, it is shown that a priori boundary of the solution can be estimated and controlled by initial data and integral on the boundary of the region. The priori estimate of the solutions was established by iterative method. By using this estimate the solutions may blow_up on the boundary of the region and thus it may have asymptotic non_stability.

Key words: filtration equation; priori estimate for the solution; asymptotic non_stability; blow_up on the boundary