

# 用 Adomian 分解法求解分数阻尼梁的解析解<sup>\*</sup>

梁祖峰<sup>1</sup>, 唐晓艳<sup>2</sup>

(1. 上海理工大学 动力工程学院, 上海 200093;  
2. 上海交通大学 物理系, 上海 200240)

(郭兴明推荐)

摘要: 利用 Adomian 分解法, 得到了由任意阶分数微分描述的具有阻尼特性的黏弹性连续梁的解析解. 解中包含了任意的初始条件和零输入. 为了更明确的分析, 假定初始条件是奇次的, 输入受力是针对某种特定梁的特殊过程. 分别考虑了两种简单情况下梁的响应: 阶跃激励和脉冲激励. 然后在系统的不同组参数条件下绘制了梁的位移图, 并且讨论了梁在不同微分阶数下响应情况.

关键词: 黏弹性梁; 分数微分; Adomian 分解法; 振动

中图分类号: O326 文献标识码: A

## 引 言

近年来, 分数微分方程(FDE)已被广泛研究并应用到了众多学科中, 如物理、化学、数学、工程等(见文献[1-3]及其中引文), 因为, 像阻尼规律、扩散过程以及分形用分数微分或者分数积分能更好地公式化. 但是, 这一领域的许多进展是当分数导数在数学方面有了相对充分的发展后才取得的.

现在, 分数微积分的数学定义有一些不同的方法<sup>[4,5]</sup>, 其中最常见的有以下两种形式:

Riemann-Liouville 分数导数

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \int_0^t \frac{f(x, u)}{(t-u)^{\alpha+k-1}} du, \quad (1)$$

Caputo 分数导数

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \int_0^t \frac{1}{(t-u)^{\alpha+k-1}} \frac{\partial^k f(x, u)}{\partial u^k} du, \quad (2)$$

其中  $\alpha$  是导数阶数,  $k$  是在  $k-1 < \alpha \leq k$  之间的正整数,  $\Gamma$  是 Gamma 函数.

迄今为止, 已经提出并建立了一些求解 FDE 的方法, 如流行的 Laplace 变换法<sup>[5,6]</sup>、迭代法<sup>[7]</sup>、Fourier 变换法<sup>[8,9]</sup> 和运算方法<sup>[10]</sup>. 但是, Laplace 变换法要求广义积分的数值估计, 而 Fourier 变换法也要求通过快速 Fourier 变换或者数值积分来进行数值运算. 这些方法也已得到了一些改进, 如基于 Laplace 变换技术的简正模方法. 而且, 大多数方法只适用于一些特定

\* 收稿日期: 2006\_03\_13; 修订日期: 2006\_10\_24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10547124; 10475055)

作者简介: 梁祖峰(1971-), 男, 博士(联系人, E-mail: liangzufeng@163.com).

类型的 FDE.

显然, 这些用于求解 FDE 的方法都来自于相应的用于求解整数阶线性微分方程的方法.

近来, Adomian<sup>[11,12]</sup> 提出的一种迭代方法已被证明能非常成功地处理线性和非线性问题, 并可以得到解析解<sup>[13]</sup>. 此外, 这种方法比标准的数值方法具有一些优势, 因为不需要进行离散化从而不用修正误差, 并且不需要大量的计算机内存和运算能力. 因此对于许多非线性模型, Adomian 方法能够提供非常高精度的解析近似且收敛非常快<sup>[14,15]</sup>. 作为一种迭代法, 其算法非常规则, 因此可以采用符号运算来实现<sup>[16]</sup>.

最初提出用来解决物理的前沿问题的 Adomian 分解方法, 现在已经被应用于物理、生物和化学反应等中的诸多类的确定性的和随机性的、线性的和非线性的问题<sup>[17]</sup>. 该方法也被建立应用于 FDE<sup>[18,20]</sup>. 最近, 用分解法解决了基于 Reimann\_Liouville 的具有一般变系数的线性 FDE<sup>[21]</sup>, 与已有结果的比较显示出了很好的一致性. 基于这样一个事实: Adomian 分解方法可以用来求解 FDE, 所得结果既可写成封闭形式又可是求和形式且求和的前几项是非常好的近似, 我们将此方法应用于一个描述有阻尼的黏弹性梁的具有任意阶数的分数微分方程.

本文安排如下: 下一节简要介绍 Adomian 分解法. 用此方法, 在第 2 节中导出了含有任意初始条件和任意激励函数的分数微分方程的解. 第 3 节进行特定初始条件和激励函数下梁的响应分析. 第 4 节绘制了一系列参数情况下的一些相应的数值结果. 最后一节进行简短的总结.

## 1 Adomian 分解法

本节简要介绍 Adomian 分解法. 对于任意  $n$  维方程, 可以写成如下形式:

$$Lu + Ru + Nu = g, \quad (3)$$

这里  $L$  是简单或平凡的可逆线性算子,  $R$  是余下的线性项,  $N$  是非线性算子,  $u$  是关于  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  的函数. 采用 Adomian 分解法获得方程(3)的解的整个程序可按如下框架执行.

改写方程(3)为

$$Lu = g - Ru - Nu. \quad (4)$$

由于  $L$  可逆, 方程(4)等价于

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu. \quad (5)$$

对于初值问题, 对  $L \equiv \partial^n / \partial x_i^n$  是从 0 到  $x_i$  的  $n$  次定积分算子, 按照惯例定义  $L^{-1}$ . 例如, 如果  $L \equiv \partial^2 / \partial x_1^2$ , 则  $L^{-1}Lu = u - u(0, x_2, x_3, \dots, x_n) - x_1 u_{x_1}(0, x_2, x_3, \dots, x_n)$ , 所以

$$u = u(0, x_2, x_3, \dots, x_n) + x_1 u_{x_1}(0, x_2, x_3, \dots, x_n) + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu. \quad (6)$$

方程(3)的通解可以分解成和的形式

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i, \quad (7)$$

其中  $u_0$  是  $Lu = g$  的解. 对于上述情形,  $L \equiv \partial^2 / \partial x_1^2$ ,  $u_0$  是

$$u_0 = u(0, x_2, x_3, \dots, x_n) + x_1 u_{x_1}(0, x_2, x_3, \dots, x_n) + L^{-1}g. \quad (8)$$

将式(7)代入式(5), 可得

$$u = u_0 - L^{-1}R \sum_{i=0}^{\infty} u_i - L^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} A_i, \quad (9)$$

所以

$$u_{i+1} = -L^{-1}Ru_i - L^{-1}A_i, \quad i \neq 0, \quad (10)$$

这里  $A_i$  是由特定的非线性  $Nu = f(u)$  给定的一组特殊的多项式, 具体如下:

$$A_0 = f(u_0), \quad (11)$$

$$A_1 = u_1 \frac{d}{du_0} f(u_0), \quad (12)$$

$$A_2 = u_2 \frac{d}{du_0} f(u_0) + \frac{u_1^2}{2!} \frac{d^2}{du_0^2} f(u_0), \quad (13)$$

$$A_3 = u_3 \frac{d}{du_0} f(u_0) + u_1 u_2 \frac{d^2}{du_0^2} f(u_0) + \frac{u_1^3}{3!} \frac{d^3}{du_0^3} f(u_0), \quad (14)$$

⋮

$$A_n = \sum_{m=1}^n c(m, n) f^{(m)}(u_0), \quad (15)$$

其中  $c(m, n)$  是下标求和到  $n$  的  $u$  的  $m$  分量的乘积(或乘积之和)除以重复下标个数的阶乘<sup>[12]</sup>. 利用已知解  $u_0$ (具有给定初值), 所有分量  $u_1, u_2, \dots$  可以由式(10) 确定, 最终导出解  $u$ . 在某些情况下, 无穷求和级数可以写成封闭形式.

## 2 分数动力学模型及解析解

现在, 用上节讨论的 Adomian 分解法, 我们研究具有任意分数阶  $\beta$  的线性微分方程

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c \frac{\partial^\beta v}{\partial t^\beta} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = F(x, t), \quad (16)$$

它可以描述黏弹性梁的动力学特性. 方程(16)中,  $\rho, A, c, E$  和  $I$  分别是质量密度、截面积、单位长度阻尼系数、弹性模量和关于弯曲轴的惯性矩.  $v(x, t)$  是横向位移,  $F(x, t)$  是外力函数, 它是空间坐标  $x$  和时间  $t$  的函数.  $\partial^\beta v / \partial t^\beta$  是阶数为  $\beta \in (0, 1)$  的位移函数  $v(x, t)$  的分数阶微分.  $F(x, t)$  是代表作用于梁上的外力的输入函数. 这里, 我们假设参数  $\rho, A, c, E$  和  $I$  都是常量.

首先把方程(16)改写成

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{c}{\rho A} \frac{\partial^\beta v}{\partial t^\beta} + \frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \frac{F(x, t)}{\rho A}. \quad (17)$$

根据上节介绍的 Adomian 分解法, 可以将式(17)简写成

$$Lv = g - Rv, \quad (18)$$

其中

$$Lv := \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (19)$$

$$Rv := \frac{c}{\rho A} \frac{\partial^\beta v}{\partial t^\beta} + \frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}, \quad (20)$$

$$g := \frac{F(x, t)}{\rho A}. \quad (21)$$

方程(17)的一般解可以分解成求和形式:

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} p_n, \quad (22)$$

其中  $v_0$  是  $Lv = g$  的解. 对于  $L \equiv d^2/dt^2$ , 有  $L^{-1}Lv = v - v(x, 0) - tv_t(x, 0)$ , 从而

$$v_0 = v(x, 0) + w_t(x, 0) + L^{-1}g, \quad (23)$$

因此, 式(18)变为

$$v = v(x, 0) + w_t(x, 0) + \frac{1}{\rho A} \frac{\partial^{-2}}{\partial t^{-2}} F(x, t) - \frac{c}{\rho A} \frac{\partial^{\beta-2}}{\partial t^{\beta-2}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} v_n \right) - \frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^{-2}}{\partial t^{-2}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} v_{nxxxx} \right). \quad (24)$$

下述递归关系定义了  $v_i$ ,

$$v_0 = v(x, 0) + w_t(x, 0) + \frac{1}{\rho A} \frac{\partial^{-2}}{\partial t^{-2}} F(x, t), \quad (25)$$

$$v_{i+1} = -\frac{c}{\rho A} \frac{\partial^{\beta-2}}{\partial t^{\beta-2}} v_i - \frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^{-2}}{\partial t^{-2}} v_{ixxxx}, \quad (26)$$

因此, 方程(16)的一般解是无穷级数

$$v = v(x, 0) + w_t(x, 0) + \frac{1}{\rho A} \frac{\partial^{-2}}{\partial t^{-2}} F(x, t) - \frac{c}{\rho A} \left[ \frac{\partial^{\beta-2}}{\partial t^{\beta-2}} v_0 + \frac{\partial^{\beta-2}}{\partial t^{\beta-2}} v_1 + \dots \right] - \frac{EI}{\rho A} \left[ \frac{\partial^{-2}}{\partial t^{-2}} v_{0xxxx} + \frac{\partial^{-2}}{\partial t^{-2}} v_{1xxxx} + \dots \right]. \quad (27)$$

我们可以通过截断级数

$$f_k = \sum_{j=0}^{k-1} v_j, \quad \lim_k f_k = v \quad (28)$$

来近似上述解.

### 3 响应分析

显然, 解(27)含有任意的初始值  $v(x, 0)$ 、 $v_t(x, 0)$  和任意的激励函数  $F(x, t)$ . 因此, 它可以适用于许多不同的情况. 在本文的分析中, 我们采用对应动态过程开始时刻平衡态的奇次初始条件

$$v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = 0. \quad (29)$$

类似文献[3]的讨论, 取激励函数  $F(x, t)$  为

$$F(x, t) = f(x)g(t) \equiv fg, \quad (30)$$

其中  $f(x)$  是特定的空间变量函数,  $g(t)$  是时间过程. 所选的初始条件(29)和(30)大大简化了接下来的计算. 下面, 为简单起见, 我们将按两种不同负载条件来检验动力系统(16)的响应.

#### 3.1 阶跃函数响应

这里, 我们研究梁对具有以下形式的阶梯形负载的响应

$$g(t) = Bu(t), \quad (31)$$

其中  $u(t)$  是 Heaviside 函数,  $B$  是常数. 将式(29)~(31)代入式(25)得

$$v_0 = \frac{Bf t^2}{2\rho A}. \quad (32)$$

为求解下面的分量, 我们要遇到一些分数积分. 因此我们需要说明分数微积分的定义. 这里采用的分数阶导数是 Riemann-Liouville 型(式(1)), 其相应的 Riemann-Liouville 分数积分被定义为

$$\frac{d^{-\alpha} f(t)}{dt^{-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(u)}{(t-u)^{1-\alpha}} du. \quad (33)$$

由上述定义和  $v_0$  的解(32), 我们可以求解出分量  $v_i (i \geq 1)$  为

$$v_1 = -\frac{cBf}{\rho_A^2} \frac{t^{4-\beta}}{\Gamma(5-\beta)} - \frac{EIBf^{(4)}}{\rho_A^2} \frac{t^4}{\Gamma(5)}, \quad (34)$$

$$v_2 = \frac{c^2 Bf}{\rho_A^3} \frac{t^{6-2\beta}}{\Gamma(7-2\beta)} + \frac{2cEIBf^{(4)}}{\rho_A^3} \frac{t^{6-\beta}}{\Gamma(7-\beta)} + \frac{E^2 I^2 Bf^{(8)}}{\rho_A^3} \frac{t^6}{\Gamma(7)}, \quad (35)$$

$$v_3 = -\frac{c^3 Bf}{\rho_A^4} \frac{t^{8-3\beta}}{\Gamma(9-3\beta)} - \frac{3c^2 EIBf^{(4)}}{\rho_A^4} \frac{t^{8-2\beta}}{\Gamma(9-2\beta)} - \frac{3cE^2 I^2 Bf^{(8)}}{\rho_A^4} \frac{t^{8-\beta}}{\Gamma(9-\beta)} - \frac{E^3 I^3 Bf^{(12)}}{\rho_A^4} \frac{t^8}{\Gamma(9)}, \quad (36)$$

$$v_4 = \frac{c^4 Bf}{\rho_A^5} \frac{t^{10-4\beta}}{\Gamma(11-4\beta)} + \frac{4c^3 EIBf^{(4)}}{\rho_A^5} \frac{t^{10-3\beta}}{\Gamma(11-3\beta)} + \frac{6c^2 E^2 I^2 Bf^{(8)}}{\rho_A^5} \frac{t^{10-2\beta}}{\Gamma(11-2\beta)} + \frac{4cE^3 I^3 Bf^{(12)}}{\rho_A^5} \frac{t^{10-\beta}}{\Gamma(11-\beta)} + \frac{E^4 I^4 Bf^{(16)}}{\rho_A^5} \frac{t^{10}}{\Gamma(11)}, \quad (37)$$

等等, 其中  $f^{(i)} \equiv d^i f / dx^i$ . 因此解(27)变为

$$v = \frac{B}{\rho_A} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \left( \frac{EI}{\rho_A} \right)^r f^{(4r)} t^{2(r+1)} \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{-c}{\rho_A} \right)^j \frac{(j+r)! t^{(2-\beta)j}}{j! \Gamma((2-\beta)j + 2r + 3)} = \frac{B}{\rho_A} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \left( \frac{EI}{\rho_A} \right)^r f^{(4r)} t^{2(r+1)} E_{2-\beta, \beta; r+2} \left( \frac{-c}{\rho_A} t^{2-\beta} \right), \quad (38)$$

其中  $E_{\lambda, \mu}(z)$  是两参数的 Mittag-Leffler (ML) 函数

$$E_{\lambda, \mu}^{(r)} \equiv \frac{d^r}{dy^r} E_{\lambda, \mu}(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+r)! y^j}{j! \Gamma(\lambda + \mu + j)}, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (39)$$

### 3.2 脉冲响应

在这种情况下, 我们研究如下单位脉冲下系统的响应.

$$g(t) = \delta(t), \quad (40)$$

其中  $\delta(t)$  是单位脉冲响应函数. 将式(29)、(30)和(40)代入式(25)得

$$v_0 = \frac{ft}{\rho_A}. \quad (41)$$

然后利用迭代关系式(26), 得到

$$v_1 = -\frac{cf}{\rho_A^2} \frac{t^{3-\beta}}{\Gamma(4-\beta)} - \frac{EIf^{(4)}}{\rho_A^2} \frac{t^3}{\Gamma(4)}, \quad (42)$$

$$v_2 = \frac{c^2 f}{\rho_A^3} \frac{t^{5-2\beta}}{\Gamma(7-2\beta)} + \frac{2cEIf^{(4)}}{\rho_A^3} \frac{t^{5-\beta}}{\Gamma(6-\beta)} + \frac{E^2 I^2 f^{(8)}}{\rho_A^3} \frac{t^5}{\Gamma(6)}, \quad (43)$$

$$v_3 = -\frac{c^3 f}{\rho_A^4} \frac{t^{7-3\beta}}{\Gamma(9-3\beta)} - \frac{3c^2 EIf^{(4)}}{\rho_A^4} \frac{t^{7-2\beta}}{\Gamma(9-2\beta)} - \frac{3cE^2 I^2 f^{(8)}}{\rho_A^4} \frac{t^{7-\beta}}{\Gamma(9-\beta)} - \frac{E^3 I^3 f^{(12)}}{\rho_A^4} \frac{t^7}{\Gamma(9)}, \quad (44)$$

$$v_4 = \frac{c^4 f}{\rho_A^5} \frac{t^{9-4\beta}}{\Gamma(11-4\beta)} + \frac{4c^3 EIf^{(4)}}{\rho_A^5} \frac{t^{9-3\beta}}{\Gamma(11-3\beta)} + \frac{6c^2 E^2 I^2 f^{(8)}}{\rho_A^5} \frac{t^{9-2\beta}}{\Gamma(11-2\beta)} + \frac{4cE^3 I^3 f^{(12)}}{\rho_A^5} \frac{t^{9-\beta}}{\Gamma(11-\beta)} + \frac{E^4 I^4 f^{(16)}}{\rho_A^5} \frac{t^9}{\Gamma(11)}, \quad (45)$$

等等, 其中  $f^{(i)} \equiv d^i f / dx^i$ . 于是, 该情况下解(27)的形式为

$$v = \frac{1}{\rho_A} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \left( \frac{EI}{\rho_A} \right)^r f^{(4r)} t^{2r+1} \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{-c}{\rho_A} \right)^j \frac{(j+r)! t^{(2-\beta)j}}{j! \Gamma((2-\beta)j + 2r + 2)} =$$

$$\frac{1}{\rho A} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \left( \frac{EI}{\rho A} \right)^r f^{(4r)} t^{2r+1} E_{2\beta, \beta, r+2}^{(r)} \left( \frac{-c}{\rho A} t^{2-\beta} \right), \quad (46)$$

其中  $E$  也是由(39)定义的 ML 函数.

注 值得指出的是,文献[3]将简正模和 Laplace 变换技术运用到方程(16),当  $\beta = 1/2$  时得到了白噪声情形下的封闭的随机响应表达式. 根据文献[3],我们可以写出方程(16)在奇次初始条件下的解

$$v(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{m_j} \phi_j \int_0^t G_j(t - \xi) f_j(\xi) d\xi, \quad (47)$$

其中  $G_j$  是对应算子  $P_j(d^\beta/dt^\beta)$  的分数 Green 函数,  $f_j \equiv f_j(t)$  定义为

$$f_j = \int_0^L F(x, t) \phi_j(x) dx, \quad (48)$$

$\phi_j \equiv \phi_j(x)$  满足

$$EI \phi_{jxx} - \rho A \omega_j^2 \phi_j = 0 \quad (49)$$

和正交条件

$$\int_0^L \rho A \phi_i \phi_j dx = \begin{cases} m_j, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (50)$$

这里  $L$  是梁的长度,  $m_j$  是第  $j$  模的广义质量,  $\omega_j$  是第  $j$  模的无阻尼固有频率. 对于一些特殊情况, 即当  $\beta$  和  $F(x, t)$  取下一节中给出的特定值时, 可以发现两种解是等价的.

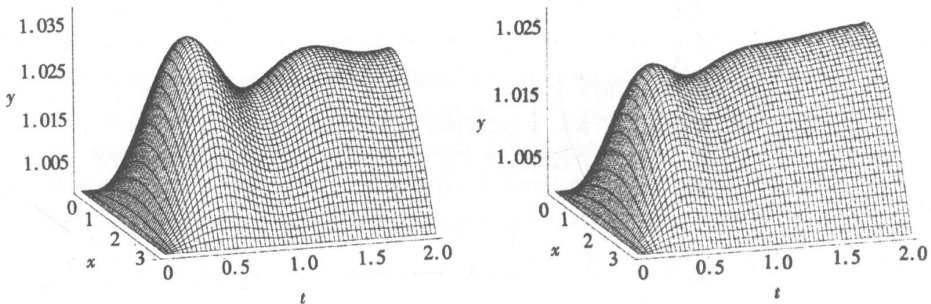
## 4 数值结果和讨论

式(38)和式(46)分别给出了所考虑的负载条件下方程的解的表达式. 为了更清楚地显示分数阻尼梁的响应, 本节给出一些数值结果. 更为具体地, 我们考虑简支梁, 这意味着  $f(x)$  可以表示成

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad (51)$$

这可以看成是单自由度理想梁的受力分布.

数值计算是通过截断无穷级数(38)和(46)来进行的. 要进行数值仿真, 必须给定参数值. 这里我们假定  $c/m = 2\eta\omega^2$ ,  $\omega^2 = EI/\rho A$  和  $\rho A = 1$ ,  $L = \pi$ ,  $m = 1$ , 其中  $\eta$  是阻尼比而  $\omega$  是固有频率.



(a)  $\eta = 0.5, \beta = 1/2$

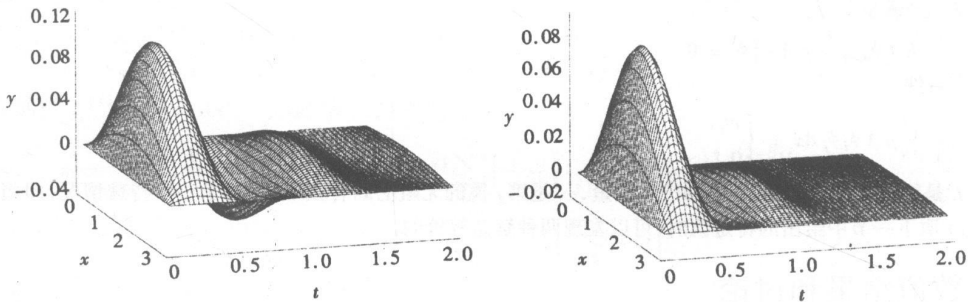
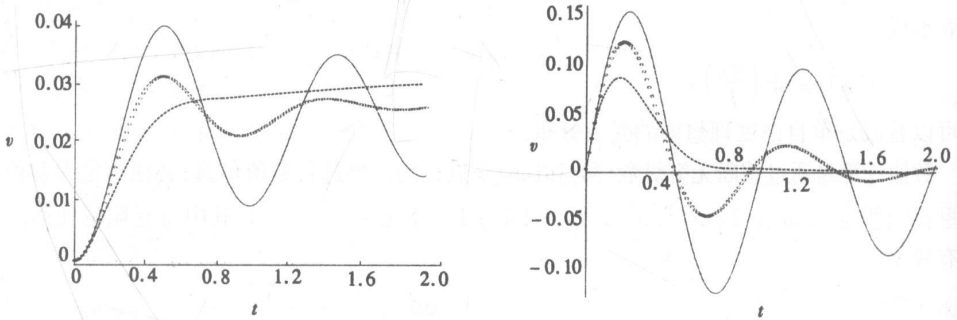
(b)  $\eta = 1, \beta = 1/2$

图 1 单位阶跃响应(截断式(38)到  $r = 16$ , 固有频率  $\omega = 5 \text{ rad/s}$ )

图 1 显示了受阶跃载荷的黏弹性梁的横向位移, 把解(38)截断到  $r = 16$  并取阶梯负载振幅  $B = 1$ , 固有频率  $\omega = 5 \text{ rad/s}$  和阻尼比  $\eta = 0.5$  (图 1(a))、 $\eta = 1$  (图 1(b)) 以及  $\beta = 1/2$ . 可见, 梁没有在静止平衡位置附近振荡而是趋于横向位移  $B/\omega^2 = 0.04$ .

但是,对于脉冲响应函数,梁经历了非常不同的过程,它先在静止平衡位置附近振荡然后慢慢趋于零位移.此时,式(46)也截断到  $r = 16$  得到图 2,并取固有频率  $\omega = 5 \text{ rad/s}$ , 阻尼比  $\eta = 0.5$  (图 2(a))、 $\eta = 1$  (图 2(b)) 以及  $\beta = 1/2$ . 可以看出,当阻尼比  $\eta$  增加时,位移减小并最终随着时间的增加而趋于零位移.

事实上,虽然上述系统在某种程度上与文献[18]不同,但数值结果却非常相似.然而试验<sup>[1-2]</sup>显示导数阶数  $1/2$  通常不是一个正当的值.现在,我们讨论系统在分数导数阶数  $\beta$  取不同值下的响应情况.图 3 描绘了由式(38)和式(46)给出的梁在  $x = 1/2$  处的响应过程,同样截断到  $r = 16$ , 固定参数  $\omega = 5$ 、 $\eta = 0.5$ , 导数阶数  $\beta$  分别取为 0.2、0.5、0.8. 结果显示,  $\beta$  越小,梁振动得越厉害.

(a)  $\eta = 0.5, \beta = 1/2$ (b)  $\eta = 1, \beta = 1/2$ 图 2 脉冲响应(截断式(46)到  $r = 16$ , 固有频率  $\omega = 5 \text{ rad/s}$ )

(a) 式(38)描绘的梁

(b) 式(46)描绘的梁

图 3 梁的动态响应(沿着  $x = 1/2$ , 截断到  $r = 16$ , 固有频率  $\omega = 5 \text{ rad/s}$ 、阻尼比  $\eta = 0.5$ 、导数阶数  $\beta = 0.2$  (直线)、 $0.5$  (虚线)和  $0.8$  (圆圈))

## 5 结 论

Adomian 分解法被用来求解了具有任意阶数的分数微分的线性微分方程,它可以描述分数阻尼梁结构.得到了简支梁在受阶跃和脉冲两种负载情况下的无穷求和表达式的解,也由 ML 函数表示.虽然已有文献<sup>[1]</sup>指出 ML 函数的演化推算剧烈且收敛慢,但是由我们所给出解定义的无穷求和级数的计算在某些参数范围内能快速收敛.上一节给出的图 1 共考虑了级数的前 17 项,讨论了固有频率、阻尼比和分数阶数的影响.

虽然还有其他方法能够求解该系统或更复杂的系统,但是 Adomian 分解法显示了其优点:

1) 计算较容易也易于理解,而且可以用数学软件,如 Maple,来实现;

2) 虽然在许多情况下得到的解是无穷级数,但在一些情况下可以写为封闭形式,另外,由于具有相对快的收敛性从而可以被适当截断.

### [参 考 文 献]

- [1] Deng R, Davies P, Bajaj A K. A case study on the use of fractional derivatives: the low\_frequency viscoelastic uni\_directional behavior of polyurethane foam[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2004, **38**(1/4): 247\_265.
- [2] Rossikhin Y A, Shitikova M V. Analysis of the viscoelastic rod dynamics via models involving fractional derivatives or operators of two different orders[J]. *The Shock and Vibration Digest*, 2004, **36**(1): 3\_26.
- [3] Agrawal O P. Analytical solution for stochastic response of a fractionally damped beam[J]. *ASME J Vibr Acoust*, 2004, **126**(4): 561\_566.
- [4] Oldham K B, Spanier J. *The Fractional Calculus* [M]. New York: Academic Press, 1974.
- [5] Podlubny I. *Fractional Differential Equations* [M]. San Diego: Academic Press, 1999.
- [6] Suarez L E, Shokoh A. Response of systems with damping materials modeled using fractional calculus[J]. *ASME J Appl Mech Rev*, 1995, **48**(11): 118\_127.
- [7] Samko S, Kilbas A A, Marichev O I. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications* [M]. Yverdon: Gordon & Breach, 1993.
- [8] Kemple S, Beyer H. Global and causal solutions of fractional differential equations[A]. In: *Transform Methods and Special Functions: Varna 96, Proceedings of 2nd International Workshop* [C]. Singapore: Science Culture Technology Publishing, 1997, 210\_216.
- [9] Kilbas A A, Pierantozzi T, Trujillo J J, et al. On the solution of fractional evolution equations[J]. *J Phys A: Math Gen*, 2004, **37**(9): 3271\_3283.
- [10] Luchko Y, Srivastava H M. The exact solution of certain differential equations of fractional order by using operational calculus [J]. *Comput Math Appl*, 1995, **29**(8): 73\_85.
- [11] Adomian G. A new approach to nonlinear partial differential equations[J]. *J Math Anal Appl*, 1984, **102**(2): 420\_434.
- [12] Adomian G. *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method* [M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [13] Wazwaz A M. Exact solutions for variable coefficients fourth\_order parabolic partial differential equations in higher\_dimensional spaces[J]. *Appl Math Comput*, 2002, **130**(2/3): 415\_424.
- [14] Momani S, AlKhaled K. Numerical solutions for systems of fractional differential equations by the decomposition method[J]. *Appl Math Comput*, 2005, **162**(3): 1351\_1365.
- [15] Vadasz P, Olek S. Convergence and accuracy of Adomian's decomposition method for the solution of Lorenz equations[J]. *Internat J Heat Mass Transfer*, 2000, **43**(10): 1715\_1734.
- [16] Chen W H, Lu Z Y. An algorithm for Adomian decomposition method[J]. *Appl Math Comput*, 2004, **159**(1): 221\_235.
- [17] Chen Q S, Suki B, An K N. Dynamic mechanical properties of agarose gels modeled by a fractional derivative model[J]. *ASME J Biomech Eng*, 2004, **126**(5): 666\_671.
- [18] Saha Ray S, Poddar B P, Bera R K. Analytical solution of a dynamic system containing fractional derivative of order one\_half by Adomian decomposition method[J]. *ASME J Appl Mech*, 2005, **72**(2): 290\_295.
- [19] Saha Ray S, Bera R K. Analytical solution of the Bagley Torvik equation by Adomian decomposition



- method[J]. Appl Math Comput, 2005, **168**(1): 398\_410.
- [20] Daftardar-Gejji V, Jafari H. Adomian decomposition: a tool for solving a system of fractional differential equations[J]. J Math Anal Appl, 2005, **301**(2): 508\_518.
- [21] Shawagfeh N T. The decomposition method for fractional differential equations[J]. J Frac Calc, 1999, **16**: 27\_33.

## Analytical Solution of a Fractionally Damped Beam by Using Adomian Decomposition Method

LIANG Zu\_feng<sup>1</sup>, TANG Xiao\_yan<sup>2</sup>

(1. Power Engineering College, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, P. R. China;

2. Department of Physics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, P. R. China)

**Abstract:** The analytical solution of a viscoelastic continuous beam whose damping characteristics are described in terms of a fractional derivative of arbitrary order was derived by means of the Adomian decomposition method. The solution contains arbitrary initial conditions and zero input. For specific analysis, the initial conditions were assumed homogeneous, and the input force was treated as a special process with a particular beam. Two simple cases, step and impulse function responses, were considered respectively. Subsequently, some figures were plotted to show the displacement of the beam under different sets of parameters including different orders of the fractional derivatives.

**Key words:** viscoelastic beam; fractional derivative; Adomian decomposition method; vibration