

# 各向异性压电介质摩擦接触界面 波动特性分析\*

路桂华<sup>1</sup>, 赵曼<sup>2</sup>, 岳强<sup>1</sup>

(1. 山东农业大学 水利土木工程学院, 山东 泰安 271018;  
2. 石家庄铁道大学 土木工程学院, 石家庄 050043)

**摘要:** 应用 Fourier(傅立叶)分析及奇异积分方程技术研究了弹性波与一般压电介质单侧接触界面的相互作用问题,以界面只产生滑移不分离的情况为例,分析了问题的求解思路和过程,给出了弹性波引起界面滑移或分离的条件,以六角晶系极化碳酸钡陶瓷材料和三角晶系石英材料为例,分析了不同材料摩擦接触界面对弹性波入射的不同反应,给出了不同的入射角及不同的外加压力和电场对界面的影响特性,界面产生滑移和分离时,问题的边界条件具有非线性,导致高频谐波出现,以石英材料为例分析了高频成分随外加条件的变化特性。

**关键词:** 压电介质; 弹性波; 摩擦接触界面; 滑移与分离; 高频谐波

**中图分类号:** O34      **文献标志码:** A      doi: 10.21656/1000-0887.370068

## 引 言

压电材料在外力作用下会产生电场,外加电场也可使其产生机械变形,这种机-电耦合效应使得压电材料在信息、新材料及航天等很多高科技领域得到了广泛的应用。界面是工程结构中广泛存在的一种结构形式,它具有与其他组合结构和材料截然不同的性质,往往是整个结构失稳或破坏的源泉。接触界面只能传递压力,不能承受拉力,因此称作单侧约束界面。接触界面问题按空间进行分类<sup>[1]</sup>主要分为半平面问题、半空间问题和空间的接触问题。半平面问题大多情况是研究冲头与弹性半平面边界直线相接触问题;空间问题主要研究接触理论在空间遥感器动力学分析中的应用问题;半空间问题主要是研究相接触的物体各占半个无限空间或半空间冲头压在半无限空间的边界平面上的问题,接触区为一小面积。弹性波与半空间接触界面相互作用问题的研究<sup>[2-4]</sup>主要基于3种模型:光滑接触界面、摩擦接触界面及高粗糙度界面。对光滑接触界面,当外加压力足够大时,入射波强度不足以引起界面分离,界面法向应力和位移分量连续,为线性问题,求解较简单。Murty<sup>[5]</sup>较早研究了不同弹性介质光滑接触界面上的波,发现了非弥散滑动界面波,并讨论了其存在条件。Wang等<sup>[6]</sup>对各向异性介质滑动界面波的存在

\* 收稿日期: 2016-03-10; 修订日期: 2017-03-12

**基金项目:** 国家科技支撑计划(2015BAB07B05);山东省农业重大应用技术创新项目(SDNYTG1531963)

**作者简介:** 路桂华(1973—),女,讲师,硕士(E-mail: bjdluguihua@163.com);  
赵曼(1975—),女,讲师,博士(E-mail: sjzhaoman@163.com);  
岳强(1971—),男,副教授,博士(通讯作者, E-mail: yueqiang406@163.com)。

及特性进行了更深入的研究.当入射波足够强时,界面会产生局部分离,界面分离区和闭合区应该分别建立边界条件,分离区应力和位移不连续,边界条件具有非线性,这种边界条件称作单侧边界条件,相应的问题称作单侧问题. Comminou 和 Dundurs<sup>[7-8]</sup>借助 Fourier 分析和奇异积分方程,对平面简谐波和非简谐波在分离光滑接触界面上的反射或折射问题进行了研究和讨论,这种求解问题的方法为解决摩擦接触问题提供了思路,他们<sup>[9-11]</sup>又用解决光滑接触问题的方法求解了弹性波在摩擦接触界面上的反射和投射问题.后来 Wang(汪越胜)等<sup>[12-13]</sup>又将 Comminou 等的方法推广到波在覆层和夹层中的传播问题.摩擦接触界面有一个特点,平面波与反平面波在界面上会相互耦合,例如入射 SH 波,在界面上会诱发 P 波和 SV 波,汪越胜等<sup>[14-17]</sup>对波的再极化问题进行了探讨和分析.以上研究主要针对一般弹性材料,对智能材料的研究则较少.白玉柱等<sup>[18-19]</sup>曾对一维弹性波在压电材料光滑接触界面中的传播问题进行了分析.路桂华等<sup>[20]</sup>针对波与两半无限大横观各向同性压电材料摩擦接触界面的相互作用问题进行过初步的探讨和分析,横观各向同性压电材料属于六角晶系,不同晶系的压电材料本构关系和传播特征不同.本文针对一般各向异性压电材料摩擦接触界面中波的传播问题进行了分析.

## 1 各向异性压电介质中的平面波

在非压电介质中,电磁场方程和应力场方程的解是彼此独立的,而在压电介质中,由于存在压电效应,二者不再相互独立,而是通过压电方程发生相互耦合,所以在压电体中存在相互耦合的弹性波和电磁波.对于压电介质中弹性波的研究,和非压电介质一样仍从求解弹性波方程着手,所不同的是,对压电介质还必须同时求解电磁波方程,而且由于存在压电效应,应力场方程和电磁场方程也是相互耦合的,即应力场方程中存在电磁场量而在电磁场方程中存在应力场量,称为耦合波方程<sup>[21]</sup>.

对于平面问题,设  $x_1$  和  $x_2$  为坐标轴,  $u_i$  为质点的位移分量,引入电势函数  $\varphi$ , 则

$$u_i = u_i(x_1, x_2, t) \quad (i = 1, 2, 3); \quad \varphi = \varphi(x_1, x_2, t). \quad (1)$$

压电介质本构方程:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}u_{k,l} + e_{kij}\varphi_{,k}; \quad D_j = e_{jkl}u_{k,l} - \varepsilon_{jk}\varphi_{,k}, \quad (2)$$

$\sigma_{ij}$  和  $D_j$  分别为压电应力和电位移分量,  $c_{ijkl}$ ,  $e_{kij}$ ,  $\varepsilon_{jk}$  分别为压电弹性常数、应力常数和介电常数.压电介质耦合波方程:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} - e_{kij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_j} = 0; \quad e_{jkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_j} - \varepsilon_{jk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_j} = 0, \quad (3)$$

$\rho$  为压电材料密度.设方程(3)有如下形式的解:

$$u_i = A_i \exp[ik(x_j l_j - ct)]; \quad \varphi = \varphi_0 \exp[ik(x_j l_j - ct)], \quad (4)$$

式中  $A_i$  和  $\varphi_0$  为振幅,  $l_j$  为传播方向分量,  $k$  为波数,  $c$  为波速,将式(4)代入方程(2)、(3)可得如下表达式<sup>[21]</sup>:

$$[\bar{\Psi}_{il} - \rho c^2 \delta_{il}] A_i = 0, \quad (5)$$

其中,  $\delta_{il}$  为 Kronecker  $\delta$  函数,  $\bar{\Psi}_{il} = c_{ijkl}^D l_j l_k$ ,  $c_{ijkl}^D = c_{ijkl} + e_{kij} l_j l_k e_{klj} / (\varepsilon_{jk} l_j l_k)$ .此式即为压电介质中平面波的 Christoffel 方程.它和非压电介质 Christoffel 方程具有完全相同的形式.参考文献[21]可知:用  $c_{ijkl}^D$  取代纯弹性材料的  $c_{ijkl}$  后,非压电各向异性介质中弹性波的有关结论,对压电介质也同样适用.由  $c_{ijkl}^D$  表达式可知,介质压电性的作用系仅使介质的有效弹性刚度常数增大,从而使波的相速变大.与此相应,使弹性波的法向面和倒速度面发生变形,由于差值  $(c_{ijkl}^D - c_{ijkl})$  取决

于介质的压电常数和介电常数,因此在压电介质中声波的波速不仅与介质的弹性特性有关,也与介质的压电特性和介电特性有关。

要使方程有解,Christoffel 方程的系数矩阵行列式应为 0,即

$$|\bar{\Psi}_{ij} - \rho c^2 \delta_{ij}| = 0. \quad (6)$$

当波速已知时,由式(6)可得到波的传播方向,同样若传播方向已知则可得到波速。

## 2 压电介质摩擦接触界面力学模型

如图 1 所示,上下两半无限大压电体摩擦接触,忽略运动锁定效应,界面摩擦因数为  $f$ ,  $z$  轴为压电介质的极轴。外加电场  $E_1^\infty, E_3^\infty$ , 压力  $P_0^\infty$ , 剪力  $\tau_1^\infty$  作用于压电体。有一弹性波向界面入射,遇到界面发生反射和折射。如果入射波强度相对较弱,不足以引起界面产生变化,结构的力学行为特征和粘着接触界面相同。当入射波足够强时,因为摩擦接触界面不能传递拉应力,界面会发生分离或滑移。由于弹性波强度具有周期变化的特性,界面应力分布不均匀,会导致同一时刻同一界面不同位置界面状态也不同。某些区域可能剪应力大于摩擦阻力发生滑移,而某些区域可能拉应力超过压应力产生分离。界面状态的分布特性与压电体本身材料特性有关,还与外加作用及入射波强度和形态有关。在一定条件下界面只发生滑移但不分离,下文就针对此种状态入手进行分析,通过分析可以推定界面由粘着到滑移再致分离的产生条件。界面发生滑移或分离时,导致问题边界具有非线性特性,因此会激发高频谐波产生。假定为平面应变问题,下文就各种状态的求解、材料特性与外加作用对界面的影响规律及高频特征进行分析。

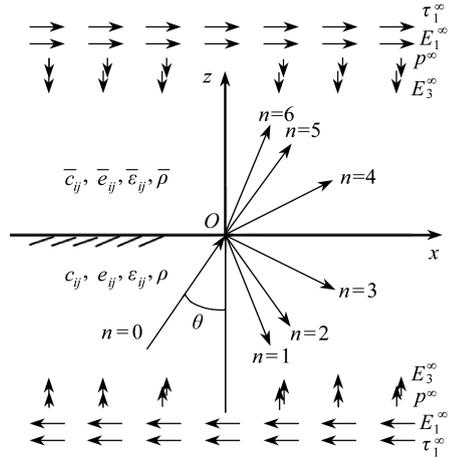


图 1 斜入射弹性波透过压电介质摩擦接触界面的传播

Fig. 1 Propagation of the oblique incident elastic wave through a frictional contact interface between 2 anisotropic piezoelectric solids

## 3 问题的求解

为后面推导方便,将式(4)的形式做适当改变,取入射波为压电介质中任一种形式的体波,如下:

$$\{u^{(0)}, w^{(0)}, \varphi^{(0)}\} = A^{(0)} \{d_1^{(0)}, d_2^{(0)}, d_3^{(0)}\} \cdot \text{Re} \{ \exp[ ik_0(x + p^{(0)}z - c_0t) ] \}, \quad (7)$$

其中振幅  $A^{(0)}$  已知,  $u$  和  $w$  分别为  $x$  和  $z$  方向的位移,  $\{d_1, d_2, d_3\}$  为位移及电势极化矢量,  $k_0$  为视波数,  $c_0$  为视速度,  $\theta$  为入射角,  $p$  等于  $\cot \theta = l_3/l_1$ 。根据方程(6)可知,反射波与透射波均可能有 3 种形式(一个准纵波、一个准横波、一个电磁波<sup>[21]</sup>),记反射波及透射波的形式为

$$\{u^{(n)}, w^{(n)}, \varphi^{(n)}\} = A^{(n)} \{d_1^{(n)}, d_2^{(n)}, d_3^{(n)}\} \cdot \text{Re} \{ \exp[ ik_0(x + p^{(n)}z - c_0t) ] \}, \quad (8)$$

$$n = 1, 2, \dots, 6,$$

$n = 1, 2, 3$  代表反射波,  $n = 4, 5, 6$  代表透射波。摩擦界面上  $z = 0$ , 令  $\eta = k_0(x - c_0t)$ , 则可设界面上的面力分量为  $S_x(\eta), S_z(\eta)$ , 电位移分量为  $D_z(\eta)$ , 界面张开位移为  $g(\eta)$ , 界面相对滑移速度为  $V_x(\eta)$ , 界面张开速度为  $V_z(\eta)$ , 界面电势差的时间变化率为  $V_d(\eta)$ , 应力分量为

$\sigma_{xx}(\eta), \sigma_{zz}(\eta), \sigma_{xz}(\eta)$ , 界面上下电势差为  $\Delta\varphi$ , 则有

$$S_x(\eta) = \tau_{xz}^\infty + \sigma_{xz}^{(0)}(\eta) + \sum_{n=1}^3 \sigma_{xz}^{(n)}(\eta) = \tau_{xz}^\infty + \sum_{n=4}^6 \sigma_{xz}^{(n)}(\eta), \quad (9)$$

$$S_z(\eta) = P_{zz}^\infty + \sigma_{zz}^{(0)}(\eta) + \sum_{n=1}^3 \sigma_{zz}^{(n)}(\eta) = P_{zz}^\infty + \sum_{n=4}^6 \sigma_{zz}^{(n)}(\eta), \quad (10)$$

$$D_z(\eta) = D_z^\infty + D_z^0(\eta) + \sum_{n=1}^3 D_z^{(n)}(\eta) = D_z^\infty + \sum_{n=4}^6 D_z^{(n)}(\eta), \quad (11)$$

$$\begin{cases} V_x(\eta) = \sum_{n=1}^3 [\dot{u}^{(n+3)} - \dot{u}^{(n)}]_{z=0} - \dot{u}^{(0)}|_{z=0}, \\ V_z(\eta) = \sum_{n=1}^3 [\dot{w}^{(n+3)} - \dot{w}^{(n)}]_{z=0} - \dot{w}^{(0)}|_{z=0}, \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} V_d(\eta) = \sum_{n=1}^3 [\dot{\phi}^{(n+3)} - \dot{\phi}^{(n)}]_{z=0} - \dot{\phi}^{(0)}|_{z=0}, \\ g(\eta) = \sum_{n=1}^3 [w^{(n+3)} - w^{(n)}]_{z=0} - w^{(0)}|_{z=0}, \\ \Delta\varphi = \sum_{n=1}^3 [\varphi^{(n+3)} - \varphi^{(n)}]_{z=0} - \varphi^{(0)}|_{z=0}, \end{cases} \quad (13)$$

$\tau_{xz}^\infty, P_{zz}^\infty$  及  $D_z^\infty$  分别为等效外加剪应力、压应力及电位移, 其表达式见附录。

边界条件: 接触界面上面力和电位移应当连续, 电边界采用可导电电边界条件:  $D_z^+ = D_z^-$ ,  $\Delta\varphi = 0$ . 因为摩擦接触界面可能产生黏着、滑移和分离 3 种不同状态, 只考虑界面滑移但未分离的情况, 建立边界条件如下:

滑移区

$$S_z < 0, |S_x| = f|S_z|, \text{sign}(V_x) = \text{sign}(S_x), g(\eta) = 0, D_z^+ = D_z^-, \Delta\varphi = 0. \quad (14)$$

黏着区

$$S_z < 0, |S_x| < f_s|S_z|, V_x(\eta) = V_z(\eta) = 0, g(\eta) = 0, D_z^+ = D_z^-, \Delta\varphi = 0. \quad (15)$$

对条件  $g(\eta) = 0$  和  $\Delta\varphi = 0$ , 为推导方便, 分别由弱条件  $V_z(\eta) = \dot{g}(\eta) = 0, V_d(\eta) = \Delta\dot{\phi}(\eta) = 0$  代替, 并确保正向张开位移及电势差在接触区内消失, 这样也不失求解的正确性。

边界非线性会引起波形畸变, 产生高频谐波, 根据文献[6-11], 将解分解为一个完好黏结情况下的双侧解(以上标 b 标识)和一个表征单侧性质的修正解(以上标 ~ 标识). 修正解应包含所有高频成分的波, 可写为如下形式:

$$\begin{aligned} \{ \tilde{u}^{(n)}, \tilde{w}^{(n)}, \tilde{\varphi}^{(n)} \} = \\ \text{Re} \left\{ \{ d_1^{(n)}, d_2^{(n)}, d_3^{(n)} \} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} F_m^{(n)} \exp \{ imk_0 [x + p^{(n)}z - c_0 t] \} \right\}, \\ n = 1, 2, \dots, 6, \end{aligned} \quad (16)$$

其中  $c_{ij}^*$  为未知系数, 令  $F_m^{(n)} = D_m^{(n)} + iE_m^{(n)}$ . 将式(16)代入式(2)本构方程得

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{xz}^{(n)} \\ \tilde{\sigma}_{zz}^{(n)} \\ \tilde{D}_z^{(n)} \end{cases} = \text{Re} \left\{ \mathbf{B}^{(n)} k_0 \sum_{m=1}^{\infty} imF_m^{(n)} \cdot \exp[imk_0(x + p^{(n)}z - c_0 t)] \right\}, \quad (17)$$

$\mathbf{B}^{(n)}$  表达式见附录. 因此, 界面上的面力和电位移可以写成如下形式:

$$\begin{cases} S_x \\ S_z \\ D_z \end{cases} = \begin{cases} \tau_{xz}^\infty + S_x^b + \tilde{\sigma}_{xz}^{(n)} \\ P_{zz}^\infty + S_z^b + \tilde{\sigma}_{zz}^{(n)} \\ D_z^\infty + D_z^b + \tilde{D}_z^{(n)} \end{cases} = \begin{cases} \tau_{xz}^\infty + |A_1^0| \sin(\eta + \eta_1) \\ P_{zz}^\infty + |A_3^0| \sin(\eta + \eta_2) \\ D_z^\infty + |D_z^0| \sin(\eta + \eta_3) \end{cases} + \\ \operatorname{Re} \{ \mathbf{B}^{(n)} k_0 \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{im} F_m^{(n)} \exp[ \operatorname{im} k_0 (x + p^{(n)} z - c_0 t) ] \}, \quad (18)$$

式中  $A_1^0, A_3^0$  及  $c_{ij}^* = \bar{c}_{ij}$  为复数, 其数值的获得见文献[22], 对界面上下介质相同时它们的表达式见附录,

$$\eta_j = \arctan \left[ \frac{\operatorname{Im}(A_j^0)}{\operatorname{Re}(A_j^0)} \right] \quad (j = 1, 2, 3).$$

接触界面内应力及电位移连续, 双侧解部分自然连续, 单侧解部分也应连续, 因此有

$$\sum_{n=1}^3 \tilde{\sigma}_{xz}^{(n)} = \sum_{n=4}^6 \tilde{\sigma}_{xz}^{(n)}; \quad \sum_{n=1}^3 \tilde{\sigma}_{zz}^{(n)} = \sum_{n=4}^6 \tilde{\sigma}_{zz}^{(n)}; \quad \sum_{n=1}^3 \tilde{D}_z^{(n)} = \sum_{n=4}^6 \tilde{D}_z^{(n)}. \quad (19)$$

将式(17)代入式(19)可以得到

$$\{ F_m^{(4)} \quad F_m^{(5)} \quad F_m^{(6)} \}^T = \mathbf{H} \{ F_m^{(1)} \quad F_m^{(2)} \quad F_m^{(3)} \}^T, \quad (20)$$

其中  $\mathbf{H}$  表达式见附录. 将式(16)代入式(12)可以推出

$$\{ V_x(\eta) - U_x \quad V_z(\eta) - U_z \quad V_d(\eta) - U_d \}^T = \\ k_0 c_0 \sum_{m=1}^{\infty} m (L_m \sin(m\eta) + R_m \cos(m\eta)), \quad (21)$$

其中  $L_m$  及  $R_m$  为三维向量, 表达式见附录,  $U_x, U_z, U_d$  分别为平均滑移速度、平均分离速度、平均电势变化率, 其表达式为

$$U_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V_x(\eta) d\eta; \quad U_z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V_z(\eta) d\eta; \quad U_d = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V_d(\eta) d\eta. \quad (22)$$

因为入射波具有周期性, 问题的解也具有周期性, 可只取一个周期, 如  $[-\pi, \pi]$  进行研究. 设压力足够大界面没有发生分离, 只有滑移, 且  $[-\pi, \pi]$  内存在一个滑移区间, 记为  $(\alpha, \beta)$ . 根据弱条件  $V_z(\eta) = \dot{g}(\eta) = 0, V_d(\eta) = \Delta\dot{\phi}(\eta) = 0$ , 可知  $L_m^{(2)} = R_m^{(2)} = L_m^{(3)} = R_m^{(3)} = 0$ . 结合式(21)可得

$$\sum_{m=1}^{\infty} m [L_m^{(1)} \sin(m\eta) + R_m^{(1)} \cos(m\eta)] = \\ \begin{cases} 0 & (-\pi \leq \eta < \alpha, \beta < \eta \leq \pi), \\ (k_0 c_0)^{-1} [V_x(\eta) - U_x] & (\alpha \leq \eta \leq \beta). \end{cases} \quad (23)$$

进一步可得

$$\{ L_m^{(1)}, R_m^{(1)} \} = \frac{1}{m\pi k_0 c_0} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} V_x(\eta) \{ \sin(m\eta), \cos(m\eta) \} d\eta. \quad (24)$$

结合式(18)、(24)及附录表达式, 再根据公式

$$\sum_{m=1}^{\infty} \cos(mx) = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi m), \quad \sum_{m=1}^{\infty} \sin(mx) = \frac{\cot(x/2)}{2},$$

可以推出

$$S_x = \tau_{xz}^\infty + |A_1^0| \sin(\eta + \eta_1) - \frac{1}{\pi c_0} \left\{ T_{11} \int_{\alpha}^{\beta} V_x(\zeta) \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \cos[m(\zeta - \eta)] d\zeta - \right.$$

$$\frac{Q_{11}}{2} \int_{\alpha}^{\beta} V_x(\zeta) \sum_{m=1}^{\infty} \sin[m(\zeta - \eta)] d\zeta \}, \quad (25)$$

$$S_z = P_{zz}^{\infty} + |A_3^0| \sin(\eta + \eta_2) - \frac{1}{\pi c_0} \left\{ T_{21} \left[ \pi V_x(\eta) - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} V_x(\zeta) d\zeta \right] - \frac{Q_{21}}{2} \int_{\alpha}^{\beta} V_x(\zeta) \cot \frac{\zeta - \eta}{2} d\zeta \right\}, \quad (26)$$

其中  $T_{ij}$  和  $Q_{ij}$  分别为矩阵  $\mathbf{T}$  和  $\mathbf{Q}$  的第  $i$  行  $j$  列元素, 矩阵  $\mathbf{T}$  和  $\mathbf{Q}$  表达式见附录. 将式 (25) 及 (26) 代入边界条件式 (14) 可以得到奇异积分方程如下:

$$PV_x(\eta) - \frac{W}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} V_x(\zeta) \cot \frac{\zeta - \eta}{2} d\zeta - \frac{P}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} V_x(\zeta) d\zeta = c_0 f \cdot [P_{zz}^{\infty} + |A_3^0| \sin(\eta + \eta_2)] + c_0 [\tau_{xz}^{\infty} + |A_1^0| \sin(\eta + \eta_1)], \quad (27)$$

其中  $P = T_{11} + f \cdot T_{21}$ ,  $W = Q_{11} + f \cdot Q_{21}$ . 不考虑 Coulomb (库仑) 摩擦的运动锁定效应, 则有下式成立:

$$V_x(\alpha) = V_x(\beta) = 0, \quad S_x(\alpha) = -f \cdot S_z(\alpha), \quad S_x(\beta) = -f \cdot S_z(\beta). \quad (28)$$

根据式 (27) 和 (28) 联立求解可以确定滑移区  $(\alpha, \beta)$  及滑移速度  $V_x(\eta)$ , 进一步由式 (25) 求得界面力, 根据附录公式求高频谐波幅值. 令  $\Delta S = |f \cdot S_z(\alpha)| - |S_x(\alpha)|$ , 在黏着区应有  $\Delta S \geq 0$ , 如果不满足此条件, 说明存在多个滑移区或分离区, 并有分离区  $S_z = 0$  来判定产生分离的条件.

## 4 算例分析

分别以压电材料六角晶系极化陶瓷钛酸钡和三角晶系石英为例进行了计算和分析, 设界面上下为同一种材料, 钛酸钡极化陶瓷材料常数

$$\begin{aligned} c_{11} &= 150 \text{ GPa}, \quad c_{13} = 66 \text{ GPa}, \quad c_{33} = 146 \text{ GPa}, \quad c_{44} = 44 \text{ GPa}, \\ e_{31} &= -4.35 \text{ C/m}^2, \quad e_{15} = 11.4 \text{ C/m}^2, \quad e_{33} = 17.5 \text{ C/m}^2, \quad \rho = 5700 \text{ kg/m}^3, \\ \varepsilon_{11} &= 1115 \times 8.85 \times 10^{-12} \text{ C/(V}\cdot\text{m)}, \quad \varepsilon_{33} = 1700 \times 8.85 \times 10^{-12} \text{ C/(V}\cdot\text{m)}; \end{aligned}$$

石英材料常数

$$\begin{aligned} c_{11} &= 86.74 \text{ GPa}, \quad c_{13} = 11.91 \text{ GPa}, \quad c_{33} = 10.72 \text{ GPa}, \quad c_{44} = 57.94 \text{ GPa}, \\ e_{11} &= 0.171 \text{ C/m}^2, \quad \varepsilon_{11} = 4.52 \times 8.85 \times 10^{-12} \text{ C/(V}\cdot\text{m)}, \\ \varepsilon_{33} &= 4.68 \times 8.85 \times 10^{-12} \text{ C/(V}\cdot\text{m)}, \quad \rho = 2651 \text{ kg/m}^3. \end{aligned}$$

假定 Coulomb 摩擦因数取为  $f = 0.1$ , 外加等效剪应力  $\tau_{xz}^{\infty} = 0$ .

图 2~图 5 分别为极化钛酸钡陶瓷和石英材料, 入射角分别为  $\pi/6$  和  $\pi/3$  时  $\Delta S$ - $\eta$  关系图. 从图 2 中可知对于极化钛酸钡材料, 入射角  $\pi/6$  时, 比值  $-P_{zz}^{\infty}/A_3^0$  在 2.66~4 这个范围内界面存在一个滑移区 (滑移区内  $\Delta S = 0$ ), 当  $-P_{zz}^{\infty}/A_3^0$  超过 4 时滑移区渐渐消失, 界面处于整体黏着状态, 也就是说要使界面不滑移,  $-P_{zz}^{\infty}/A_3^0$  应当大于 4. 当  $-P_{zz}^{\infty}/A_3^0$  接近或小于 2.66 时,  $\Delta S$  开始出现负值, 说明界面开始出现多个滑移区或分离区.

图 3 为入射角为  $\pi/6$  时, 石英材料的  $\Delta S$ - $\eta$  关系图, 对于石英材料要想控制界面不发生滑移, 比值  $-P_{zz}^{\infty}/A_3^0$  必须超过 108 以上. 从图 2 和图 3 对比来看, 相同的外加条件时, 石英材料比极化钛酸钡材料摩擦界面更容易发生扰动, 也就是说要想控制界面不动, 石英材料比极化钛酸钡材料需加几十倍的外加等效压力.

图 4 和图 5 为入射角为  $\pi/3$  时, 极化钛酸钡材料与石英材料的  $\Delta S$ - $\eta$  关系图. 对于石英材

料界面开始产生滑移的外加压力界限为 56.5.从图 3 和图 5 对比可以看出,相同的外加条件下,入射角度的不同对石英晶体界面的影响较大,入射角度越小界面越容易发生扰动.相对来说,入射角度对钛酸钡陶瓷影响要小些.这主要是因为不同晶系的压电晶体,各方向的压电常数和介电常数差别很大,对外加环境的反应区别也就很大.

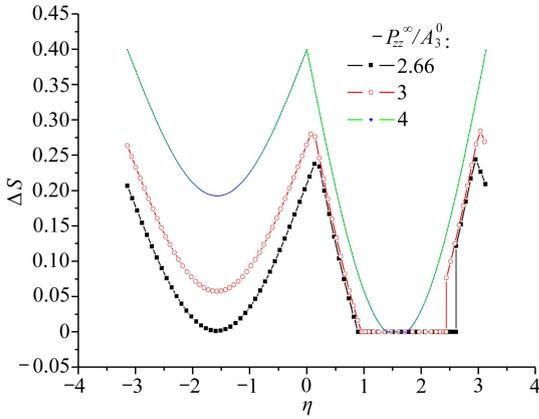


图 2 极化钛酸钡材料,入射角  $\pi/6$ ,  $-P_{zz}^{\infty}/A_3^0 = 2.66$ , 3 和 4 时  $\Delta S$ - $\eta$  关系图

Fig. 2 Curves of  $\Delta S$ - $\eta$  for  $-P_{zz}^{\infty}/A_3^0 = 2.66, 3$  and 4 when the incident angle is  $\pi/6$  for the polarized ceramic material

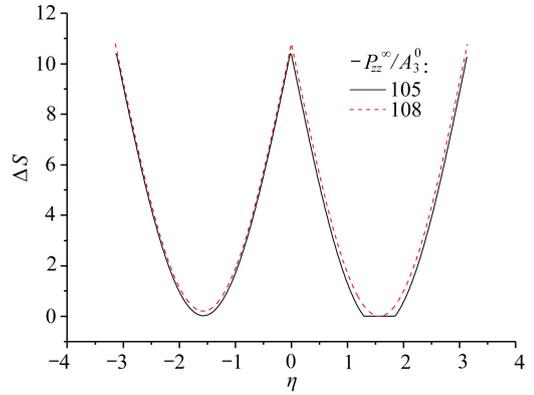


图 3 石英材料,入射角  $\pi/6$ ,  $-P_{zz}^{\infty}/A_3^0 = 105$  和 108 时  $\Delta S$ - $\eta$  关系图

Fig. 3 Curves of  $\Delta S$ - $\eta$  for  $-P_{zz}^{\infty}/A_3^0 = 105$  and 108 when the incident angle is  $\pi/6$  for the quartz material

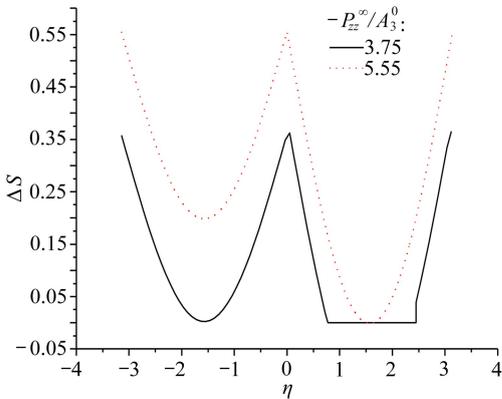


图 4 极化钛酸钡材料,入射角  $\pi/3$ ,  $-P_{zz}^{\infty}/A_3^0 = 3.75$  和 5.55 时  $\Delta S$ - $\eta$  关系图

Fig. 4 Curves of  $\Delta S$ - $\eta$  for  $-P_{zz}^{\infty}/A_3^0 = 3.75$  and 5.55 when the incident angle is  $\pi/3$  for the polarized ceramic material

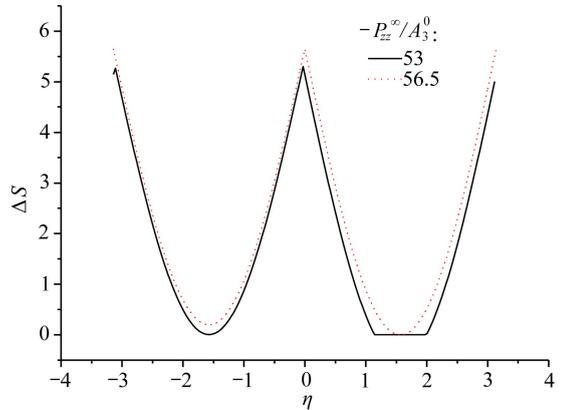


图 5 石英材料,入射角  $\pi/3$ ,  $-P_{zz}^{\infty}/A_3^0 = 53$  和 56.5 时  $\Delta S$ - $\eta$  关系图

Fig. 5 Curves of  $\Delta S$ - $\eta$  for  $-P_{zz}^{\infty}/A_3^0 = 53$  and 56.5 when the incident angle is  $\pi/3$  for the quartz material

图 6~图 9 为石英晶体,入射角为  $\pi/3$ , 界面产生滑移时激发的高频谐波幅值与  $-P_{zz}^{\infty}/A_3^0$  的变化图(图中  $|F_1|$  和  $|F_2|$  分别代表一次谐波和二次谐波幅值).从图 6 及图 8 可看出,随着外加等效压力的增大,反射一次及二次波幅值均逐渐减小,当  $-P_{zz}^{\infty}/A_3^0 > 56.5$  时,界面整体黏着入射波完全透射,不再有反射发生.图 7 表明,透射波中和入射波传播方向相同的一次谐波 ( $n=6$ ) 随着  $-P_{zz}^{\infty}/A_3^0$  增大而有增加,其余两个幅值随着  $-P_{zz}^{\infty}/A_3^0$  增大而减少,两条线看似与坐标轴平行,是因为变化量与幅值量相比太小的缘故.图 9 表明,3 个透射二次谐波幅值均随  $-P_{zz}^{\infty}/A_3^0$  增大而减少.总体来说,石英晶体摩擦界面产生扰动是会激发高频谐波产生,但高频

成分相比入射波强度相当微弱。

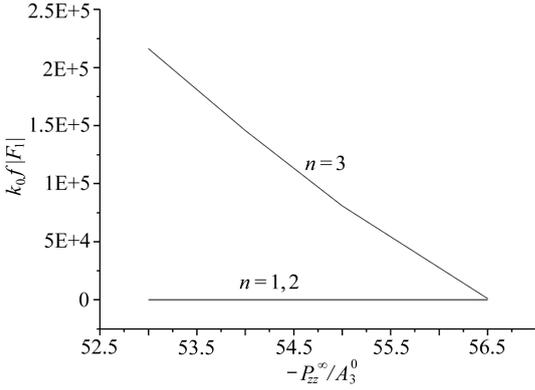


图6 石英材料,入射角  $\pi/3$ ,反射一次谐波幅值随  $-P_{zz}^\infty/A_3^0$  的变化关系图

Fig. 6 Influence of normalized applied pressure  $-P_{zz}^\infty/A_3^0$  on the reflection coefficient of the wave mode of frequency  $\omega (m = 1)$  for the quartz material and  $\theta = \pi/3$

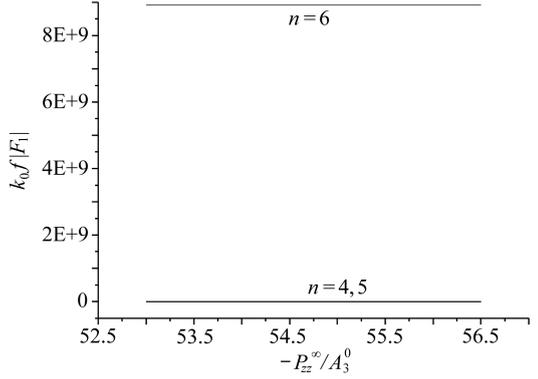


图7 石英材料,入射角  $\pi/3$ ,透射一次谐波幅值随  $-P_{zz}^\infty/A_3^0$  的变化关系图

Fig. 7 Influence of normalized applied pressure  $-P_{zz}^\infty/A_3^0$  on the transmission coefficient of the wave mode of frequency  $\omega (m = 1)$  for quartz material and  $\theta = \pi/3$

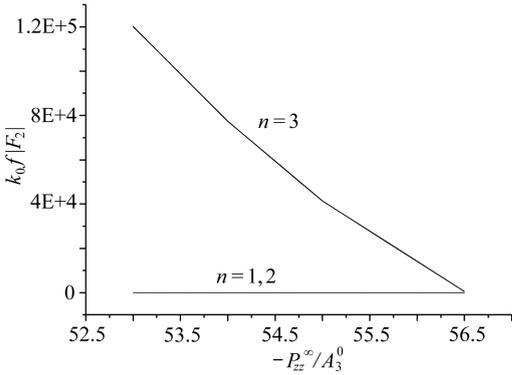


图8 石英材料,入射角  $\pi/3$ ,反射二次谐波幅值随  $-P_{zz}^\infty/A_3^0$  的变化关系图

Fig. 8 Influence of normalized applied pressure  $-P_{zz}^\infty/A_3^0$  on the reflection coefficient of the wave mode of frequency  $\omega (m = 2)$  for the quartz material and  $\theta = \pi/3$

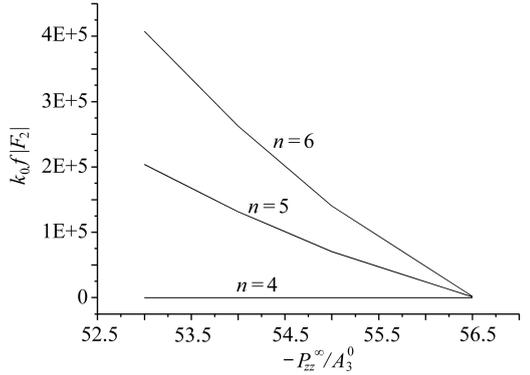


图9 石英材料,入射角  $\pi/3$ ,透射二次谐波幅值随  $-P_{zz}^\infty/A_3^0$  的变化关系图

Fig.9 Influence of normalized applied pressure  $-P_{zz}^\infty/A_3^0$  on the transmission coefficient of the wave mode of frequency  $\omega (m = 2)$  for the quartz material and  $\theta = \pi/3$

### 5 结 论

本文探讨了斜入射弹性波与两半无限大压电介质摩擦接触界面相互作用问题,利用 Fourier 分析及奇异积分方程技术对问题进行了求解,并通过算例对问题进行了分析.总结起来可得出如下几点结论:

1) 弹性波与压电材料摩擦接触界面相互作用会导致界面产生滑移或分离,文中给出了滑移状态区间分布位置的求解.滑移状态或分离状态的分布与入射波状态及外加作用有关,如果  $-P_{zz}^\infty/A_3^0$  很大,则界面不会滑移或分离,文中给出了判断方法.外加电场通过改变外加等效压

力或剪力对控制界面状态起作用。

2) 界面的波动特性与压电材料本身特性有关,不同晶系的压电材料因为其压电常数和介电常数不同,导致界面对入射波和外加作用的反应差别很大。例如:入射角度为  $\pi/6$  时,极化钛酸钡材料界面产生滑移的条件是  $-P_{zz}^\infty/A_3^0 < 4$ , 而石英材料为  $-P_{zz}^\infty/A_3^0 < 108$ 。同一种石英材料入射角度为  $\pi/3$  时,界面产生滑移的条件  $-P_{zz}^\infty/A_3^0 < 56.5$ 。

3) 界面产生滑移时会激发高频谐波产生,高频谐波的强度与外加作用导致滑移状态分布有关。以石英材料为例,当入射角度为  $\pi/3$  时,在  $53 < -P_{zz}^\infty/A_3^0 < 56.5$  范围内,反射和投射二次谐波的幅值随着外加等效压应力的减小而增加。

## 附 录

$$\tau_{xz}^\infty = \tau_x^\infty - e_{15}E_1^\infty + e_{35}E_3^\infty; P_{zz}^\infty = P_0^\infty - e_{13}E_1^\infty + e_{33}E_3^\infty, D_z^\infty = \varepsilon_{13}E_1^\infty - \varepsilon_{33}E_3^\infty,$$

以  $c_{ij}^*$  统一表示弹性常数,当  $n = 1, 2, 3$  时,  $c_{ij}^* = c_{ij}$ ; 当  $n = 4, 5, 6$  时,  $c_{ij}^* = \bar{c}_{ij}$ , 其他材料常数也如此。

$$\mathbf{B}^{(n)} = \begin{bmatrix} (c_{15}^* + c_{55}^* p^{(n)})d_1^{(n)} + (c_{55}^* + c_{35}^* p^{(n)})d_2^{(n)} + (e_{15}^* + e_{35}^* p^{(n)})d_3^{(n)} \\ (c_{13}^* + c_{35}^* p^{(n)})d_1^{(n)} + (c_{35}^* + c_{33}^* p^{(n)})d_2^{(n)} + (e_{13}^* + e_{33}^* p^{(n)})d_3^{(n)} \\ (e_{31}^* + e_{35}^* p^{(n)})d_1^{(n)} + (e_{35}^* + e_{33}^* p^{(n)})d_2^{(n)} - (\varepsilon_{31}^* + \varepsilon_{33}^* p^{(n)})d_3^{(n)} \end{bmatrix}.$$

摩擦界面上下介质相同时有

$$A_1^0 = k_0 A^{(0)} [(c_{15} + c_{55} p^{(0)})d_1^{(0)} + (c_{55} + c_{35} p^{(0)})d_2^{(0)} + (e_{15} + e_{35} p^{(0)})d_3^{(0)}],$$

$$A_3^0 = k_0 A^{(0)} [(c_{13} + c_{35} p^{(0)})d_1^{(0)} + (c_{35} + c_{33} p^{(0)})d_2^{(0)} + (e_{13} + e_{33} p^{(0)})d_3^{(0)}],$$

$$D_z^0 = k_0 A^{(0)} [(e_{31} + e_{35} p^{(0)})d_1^{(0)} + (e_{35} + e_{33} p^{(0)})d_2^{(0)} - (\varepsilon_{31} + \varepsilon_{33} p^{(0)})d_3^{(0)}],$$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{B}^{(4)} \quad \mathbf{B}^{(5)} \quad \mathbf{B}^{(6)}]^{-1} [\mathbf{B}^{(1)} \quad \mathbf{B}^{(2)} \quad \mathbf{B}^{(3)}], \mathbf{F}_m^{(n)} = \mathbf{D}_m^{(n)} + i\mathbf{E}_m^{(n)},$$

$$\mathbf{D}_m = \{D_m^{(1)} \quad D_m^{(2)} \quad D_m^{(3)}\}^T, \mathbf{E}_m = \{E_m^{(1)} \quad E_m^{(2)} \quad E_m^{(3)}\}^T,$$

$$\mathbf{C} = \begin{Bmatrix} d_1^{(4)} d_1^{(5)} d_1^{(6)} \\ d_2^{(4)} d_2^{(5)} d_2^{(6)} \\ d_3^{(4)} d_3^{(5)} d_3^{(6)} \end{Bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{Bmatrix} d_1^{(1)} d_1^{(2)} d_1^{(3)} \\ d_2^{(1)} d_2^{(2)} d_2^{(3)} \\ d_3^{(1)} d_3^{(2)} d_3^{(3)} \end{Bmatrix}, \mathbf{M} + i\mathbf{N} = \mathbf{C}\mathbf{H} - \mathbf{G},$$

$$\mathbf{L}_m = \mathbf{M}\mathbf{D}_m - \mathbf{N}\mathbf{E}_m, \mathbf{R}_m = \mathbf{M}\mathbf{E}_m + \mathbf{N}\mathbf{D}_m, \mathbf{L}_m = \{L_m^{(1)} \quad L_m^{(2)} \quad L_m^{(3)}\}^T,$$

$$\mathbf{M}_1 = (\mathbf{N}^{-1}\mathbf{M} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N})^{-1}\mathbf{N}^{-1}, \mathbf{M}_2 = (\mathbf{N}^{-1}\mathbf{M} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N})^{-1}\mathbf{M}^{-1},$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{a}\mathbf{M}_1 + \mathbf{b}\mathbf{M}_2, \mathbf{Q} = \mathbf{a}\mathbf{M}_2 - \mathbf{b}\mathbf{M}_1, \mathbf{a} = \text{Re}[\mathbf{B}^{(1)}\mathbf{B}^{(2)}\mathbf{B}^{(3)}], \mathbf{b} = \text{Im}[\mathbf{B}^{(1)}\mathbf{B}^{(2)}\mathbf{B}^{(3)}].$$

## 参考文献 (References):

- [1] 冯登泰. 接触力学的发展概况[J]. 力学进展, 1987, 17(4): 431-446. (FENG Deng-tai. On the advances of contact mechanics[J]. *Advances in Mechanics*, 1987, 17(4): 431-446. (in Chinese))
- [2] 汪越胜, 于桂兰, 章梓茂, 等. 复杂界面(界面层)条件下的弹性波传播问题研究综述[J]. 力学进展, 2000, 30(3): 378-390. (WANG Yue-sheng, YU Gui-lan, ZHANG Zi-mao, et al. Review on elastic wave propagation under complex interface (interface layer) conditions [J]. *Advances in Mechanics*, 2000, 30(3): 378-390. (in Chinese))
- [3] 王颖泽, 王谦, 刘栋, 等. 弹性半空间热冲击问题的广义热弹性解[J]. 应用数学和力学, 2014, 35(6): 640-651. (WANG Ying-ze, WANG Qian, LIU Dong, et al. Generalized thermoelastic solutions to the problems of thermal shock on elastic half space[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, 35(6): 640-651. (in Chinese))
- [4] 王颖泽, 王谦, 刘栋, 等. 有限厚度圆柱壳热冲击问题的广义热弹性解[J]. 应用数学和力学, 2014, 35(6): 640-651. (in Chinese))

- 2016, **37**(6): 644-654.(WANG Ying-ze, WANG Qian, LIU Dong, et al. Generalized solution to the thermoelastic problem of finite-thickness hollow cylinders subjected to thermal shock[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(6): 644-654.(in Chinese))
- [5] Murty G S. Wave propagation at an unbonded interface between two elastic half-spaces[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1975, **58**(5): 1094-1095.
- [6] WANG Li-tian, Lothe J. Existence of second slip waves in anisotropic elastic media[J]. *Wave Motion*, 1993, **18**(1): 79-99.
- [7] Comninou M, Dundurs J. Singular reflection and refraction of elastic waves due to separation [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1978, **45**(3): 548-652.
- [8] Dundurs J, Comninou M. Interface separation caused by a plane elastic wave of arbitrary form [J]. *Wave Motion*, 1979, **1**(1): 17-23.
- [9] Comninou M, Dundurs J, Chez E L. Total reflection of *SH* waves in the presence of slip and friction[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1979, **66**(3): 789-793.
- [10] Comninou M, Dundurs J. Interaction of elastic waves with a unilateral interface[J]. *Proceedings of the Royal Society of London(Series A): Mathematical and Physical Sciences*, 1979, **368**(1732): 141-154.
- [11] Comninou M, Dundurs J. Elastic interface waves and sliding between two solids[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1978, **45**(2): 325-330.
- [12] WANG Yue-sheng, YU Gui-lan, GAI Bing-zheng. Slip with friction between a layer and a substrate caused by an *SH* pulse[J]. *Mechanics Research Communications*, 1997, **24**(1): 85-91.
- [13] WANG Yue-sheng, YU Gui-lan, GAI Bing-zheng. Propagation of *SH* waves in a layered half-space with a frictional contact interface[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1998, **88**(5): 1300-1310.
- [14] WANG Yue-sheng, YU Gui-lan. Re-polarization of elastic waves at a frictional contact interface—II. Incidence of a *P* or *SV* wave[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1999, **36**(30): 4563-4586.
- [15] WANG Yue-sheng, YU Gui-lan, DAI Hui-hui. Transmission of elastic waves through a frictional contact interface between two anisotropic dissimilar media[J]. *Wave Motion*, 2003, **37**(2): 137-156.
- [16] 于桂兰, 汪越胜, 李楠. 一般各向异性单侧接触界面上波的反射和折射[J]. 力学学报, 2003, **35**(5): 561-568.(YU Gui-lan, WANG Yue-sheng, LI Nan. Reflection and refraction of elastic waves at a unilateral contact interface between two generally anisotropic media[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, **35**(5): 561-568.(in Chinese))
- [17] 李楠, 汪越胜, 于桂兰. 基于表面阻抗张量的界面滑移波动态失稳分析[J]. 应用数学和力学, 2004, **25**(9): 935-942.(LI Nan, WANG Yue-sheng, YU Gui-lan. Analysis of dynamic instability of interfacial slip waves based on the surface impedance tensor[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2004, **25**(9): 935-942.(in Chinese))
- [18] 白玉柱, 于桂兰, 许丽敏. 压电体光滑接触界面上的滑移界面波理论分析[J]. 北京交通大学学报, 2007, **31**(4): 10-13.(BAI Yu-zhu, YU Gui-lan, XU Li-min. Theoretical analysis of slip waves propagating along the frictionless contact interface of piezoelectric solids[J]. *Journal of Beijing Jiaotong University*, 2007, **31**(4): 10-13.(in Chinese))
- [19] 白玉柱, 汪越胜, 于桂兰. 压电体光滑接触界面有局部分离时的滑移脉冲波传播[J]. 应用数学和力学, 2007, **28**(9): 1095-1101.(BAI Yu-zhu, WANG Yue-sheng, YU Gui-lan. Propagation of slip pulse along a frictionless contact interface with local separation between two piezoelectric solids[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, **28**(9): 1095-1101.(in Chinese))

- [20] 路桂华, 赵曼, 刘立华. 弹性波作用下压电体摩擦接触界面滑移特性分析[J]. 固体力学学报, 2015, **36**(3): 259-263. (LU Gui-hua, ZHAO Man, LIU Li-hua. Analysis of slip characteristic on frictional contact interfaces in piezoelectric materials due to elastic waves[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2015, **36**(3): 259-263. (in Chinese))
- [21] 张福学. 现代压电学(上)[M]. 北京: 科学出版社, 2001. (ZHANG Fu-xue. *Modern Piezoelectric (Volume One)*[M]. Beijing: Science Press, 2001. (in Chinese))
- [22] Nayfeh A H. *Wave Propagation in Layered Anisotropic Medium*[M]. Netherlands: Elsevier Publishing, 1995.

## Characteristics of Elastic Waves Through Frictional Contact Interfaces Between 2 Anisotropic Piezoelectric Materials

LU Gui-hua<sup>1</sup>, ZHAO Man<sup>2</sup>, YUE Qiang<sup>1</sup>

(1. *Water Conservancy and Civil Engineering Colleges, Shandong Agricultural University, Taian, Shandong 271018, P.R.China;*

2. *School of Civil Engineering, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, P.R.China*)

**Abstract:** The Fourier analysis and the singular integral equation technique were used to investigate the propagation characteristics of elastic wave through frictional contact interface between 2 generally anisotropic piezoelectric materials. The method and procedure were developed to solve the question in the case of slipping but not separating in local interface areas, and the extents and locations of slipping and sticking regions varying with the external mechanical-electrical loads were given. Furthermore, with a polarized ceramic material and quartz, which belong to the hexagonal crystal system and the trigonal crystal system respectively, as the examples, different responses of the friction contact interface between different materials to incident elastic wave were analyzed, and the interface behaviors influenced by different incident angles and external mechanical-electrical loads were studied. High-frequency harmonics will occur because of non-linearity (boundary non-linearity) brought by separation or slip in local interface areas if the incident wave is strong enough. Finally, with quartz as an example, the amplitudes of the reflected and refracted high-frequency harmonics varying with mechanical-electrical loads were comparatively discussed.

**Key words:** piezoelectric material; elastic wave; frictional contact interface; separation zone and slip zone; high-frequency harmonic

**Foundation item:** The National Key Technology R&D Program of China(2015BAB07B05)

---

引用本文/Cite this paper:

路桂华, 赵曼, 岳强. 各向异性压电介质摩擦接触界面波动特性分析[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(4): 421-431.

LU Gui-hua, ZHAO Man, YUE Qiang. Characteristics of elastic waves through frictional contact interfaces between 2 anisotropic piezoelectric materials[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(4): 421-431.