文章编号：1000-0887(2017)01-0044-16
ⓒ 应用数学和力学编委会，ISSN 1000-0887

结构系统识别不确定性分析的 Bayes 方法及其进展*

颜王吉， 曹诗泽， 任伟新

（合肥工业大学 土木与水利工程学院，合肥 230009）

（我刊编委任伟新来稿）

摘要： 受测试误差、建模误差、数值离散化以及环境变异等因素的影响，结构系统识别过程不可避免地存在不确定性，因此有必要引入概率统计方法来提高其鲁棒性，为工程结构安全监测提供更为可靠的结果．近年来，Bayes（贝叶斯）方法因为其诸多优势在系统识别领域受到了广泛关注．该文梳理了 Bayes 系统识别的历史脉络和研究进展．从 Bayes 系统识别的理论框架出发，分析了量化系统识别不确定性两类方法的适用条件与局限性．此外，文章综述了 Bayes 方法在模态参数识别、有限元模型修正以及结构损伤识别方面进行不确定性分析的理论、实现及其应用．最后对基于 Bayes 方法进行系统识别研究的发展趋势做出了展望．

关 键 词： Bayes 理论； 系统识别； 不确定性； 模态参数； 模型修正

中图分类号： O32 **文献标志码：** A doi：10.21656/1000-0887.370571

引 言

系统识别是科学与工程领域中广泛存在的基础科学问题．一般意义上讲，系统识别是在实验实测数据的基础上，对系统确定一个数学模型，要求这个模型尽可能精确地反映系统的特性，从而达到识别系统参数的目的[1]．不确定性影响广泛地存在于系统识别问题中，通常包括以下几类[2-5]：1）测试不确定性：获取数据的过程中，由于观测条件（所使用的仪器仪表和外界条件等）引起的误差．2）模型不确定性：对结构进行分析，首先需要建立结构的分析模型，这些结构分析模型的建立，较大程度依赖于对结构物理特性的了解．由于所选定的数学模型与真实状况不可能完全相符，所以结构模型误差总是存在的．3）数值不确定性：计算过程中不可避免地存在离散化以及舍入误差等因素，使得计算结果偏离实际值．4）环境不确定性：土木工程结构处于一个开放的自然环境中，结构运营所处的自然环境（交通流荷载、地震、风载、温度等）不断变化，偶然性激励的作用不可避免，而且这种作用是不确定的．

即便以上提及的这些因素误差较小，但耦合在一起也可能使结构响应产生较大的偏差，不确定性因素的影响会淹没甚至掩盖结构响应的真实信息，以致得出错误的结论．因此，有必要

* 收稿日期： 2016-10-11； 修订日期： 2016-12-10
基金项目： 国家自然科学基金（51408176；51278163）；国家重点研发计划（2016YFE0113400）
作者简介： 颜王吉（1985—），男，研究员，博士，硕士生导师（E-mail：civilyanwj@gmail.com）；
任伟新（1960—），男，教授，博士，博士生导师（通讯作者．E-mail：renwx@hfut.edu.cn）．

在结构系统识别中引入统计方法来充分考虑这些误差或不确定性的影响.基于概率统计分析原理的不确定性方法的研究,有望成为解决大型土木工程结构动力不确定性问题的一般方法[6].研究不确定性分析方法对提高结构动力分析结果的鲁棒性和准确性至关重要,也可以为结构动力灾变和健康监测提供更为稳健可靠的分析依据.

不确定性分析方法较多,包括概率方法和非概率方法.概率方法又通常分为两类[7]:经典概率理论(即频率学派)与 Bayes 理论(即 Bayes 学派).频率方法在实际生产生活中应用广泛,它坚持概率的频率解释,对统计学中的概念、结果、方法性能的评价都必须在大量重复的意义上去理解,因此频率学派的研究对象是大量重复的随机现象,根据随机事件发生的频率,或者总体样本里面的个数来赋值概率,这无疑把统计学的应用和研究领域缩小了[8].Bayes 学派和频率学派对于在应用中概率如何被赋值有着截然不同的看法,Bayes 学派完全同意概率的公理化定义,但认为概率也可以用经验确定,可以根据逻辑学中某人对一个未知命题(unknown proposition)信任的程度来赋值概率[8],因而更符合实际情况,扩大了研究范围,这样的理念也使得 Bayes 理论比频率学派更适用于结构系统识别[7].

Bayes 学派近年来在结构动力系统识别领域受到了极大关注,并取得了卓有成效的进展.然而目前国内外系统总结相关领域研究进展的研究还很少.基于这样的考虑, 本文从 Bayes 系统识别的理论框架入手,分析了量化系统识别不确定性两类方法的适用条件与局限性.此外,文章梳理了 Bayes 方法在模态参数识别、模型修正以及损伤识别等领域的研究进展.最后,根据这些已有的研究和土木工程结构系统识别的特点,展望了 Bayes 系统识别研究的发展趋势.

1　Bayes 系统识别的理论框架

Bayes 统计理论起源于英国学者 Thomas Bayes 的一篇论文《论有关机遇问题的求解》[9],但是,直到 Bayes 死后才由他的朋友 Richard Price 于 1763 年整理发表了这篇文章.这篇论文中,提出了著名的 Bayes 公式和一种归纳推理的方法.后来,Laplace 重新发现了 Bayes 公式,而且阐述得比 Bayes 更为清晰,自 20 世纪 50 年代以来,Bayes 理论通过 Cox 定理以及 Jaynes 的最大信息熵原理而得到了广泛的应用,并由其后的统计学家发展成 Bayes 学派.

Beck 与 Katafygiotis[3-4] 在国际上较早的将 Bayes 方法引入结构动力学中,建立了著名的 Bayes 系统识别基本理论框架.根据 Bayes 理论,假定 $\mathfrak{M}$ 为给定的分析模型,$\boldsymbol{\theta} \in \mathfrak{R}^{N_\theta}$ 为待定的模型参数,D 为系统的监测数据, 在已知 D 的前提下,$\boldsymbol{\theta}$ 的后验概率密度函数 $p(\boldsymbol{\theta}\,|\,\mathfrak{M},D)$ 为[10-11]

$$p(\boldsymbol{\theta}\,|\,\mathfrak{M},D)=\frac{p(D\,|\,\mathfrak{M},\boldsymbol{\theta})\cdot p(\boldsymbol{\theta}\,|\,\mathfrak{M})}{p(D\,|\,\mathfrak{M})}=\frac{p(D\,|\,\mathfrak{M},\boldsymbol{\theta})\cdot p(\boldsymbol{\theta}\,|\,\mathfrak{M})}{\int_{\Theta}p(D\,|\,\mathfrak{M},\boldsymbol{\theta})\cdot p(\boldsymbol{\theta}\,|\,\mathfrak{M})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}},\tag{1}$$

其中,$p(D\,|\,\mathfrak{M},\boldsymbol{\theta})$ 为似然函数,表示在给定 $\mathfrak{M}$ 和 $\boldsymbol{\theta}$ 的前提下,得到 D 的概率,如果 $\mathfrak{M}$ 和 $\boldsymbol{\theta}$ 与实际系统越接近,模型得出的系统响应与 D 越接近,所得的似然函数也会越大;$p(\boldsymbol{\theta}\,|\,\mathfrak{M})$ 为先验概率密度函数,反映人们在抽样前对模型参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的认识,一般我们不知道 $\boldsymbol{\theta}$ 的真实值是多少,于是通常假设一个合理的概率密度函数作为 $\boldsymbol{\theta}$ 的先验概率密度函数;$p(D\,|\,\mathfrak{M})$ 是 $\mathfrak{M}$ 的证据值(evidence),起到归一化的作用[11].后验概率密度函数 $p(\boldsymbol{\theta}\,|\,\mathfrak{M},D)$ 是 Bayes 系统识别的目标,表示在给定模型 $\mathfrak{M}$ 和监测资料 D 的前提下,得到模型参数的概率.

为了将分析模型嵌入到概率模型中,Beck 与 Katafygiotis[3] 引入了预测误差 $\boldsymbol{e}(n;\boldsymbol{\theta})$(prediction error)的概念:

$$\boldsymbol{y}(n)=\boldsymbol{q}(n;\boldsymbol{\theta})+\boldsymbol{e}(n;\boldsymbol{\theta}),\tag{2}$$

其中预测误差 $\boldsymbol{e}(n;\boldsymbol{\theta})$ 表示模型输出(model response) $\boldsymbol{q}(n;\boldsymbol{\theta}) \in \Re^{N_s}$ 和实测响应(measured response) $\boldsymbol{y}(n) \in \Re^{N_s}$ 之间的差异;$n=1,2,\cdots,N$ 表示第 n 个数据点.为了描述预测误差的不确定性,依据最大信息熵原理,一般假定预测误差 $\boldsymbol{e}(n;\boldsymbol{\theta})$ 服从均值为 0、方差为 σ 的 Gauss(高斯)白噪声.就结构动力系统而言,给定观测时程数据 D(包括系统输入数据 $\hat{\boldsymbol{Z}}_1^N$ 和系统输出数据 $\hat{\boldsymbol{Y}}_1^N$) 和分析问题采用的模型类(model class) $\mathfrak{M}$,根据工程判断选择先验概率密度函数 $p(\boldsymbol{\theta}\,|\,\mathfrak{M})=\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta})$,可以得到系统输出参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的后验概率密度函数[3]:

$$p(\boldsymbol{\theta}\,|\,D,\mathfrak{M}) = cp(\hat{\boldsymbol{Y}}_1^N\,|\,\boldsymbol{\theta},\hat{\boldsymbol{Z}}_1^N,\mathfrak{M})p(\boldsymbol{\theta}\,|\,\mathfrak{M}) = cf_N(\hat{\boldsymbol{Y}}_1^N;\boldsymbol{\theta},\hat{\boldsymbol{Z}}_1^N)\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}), \tag{3}$$

其中

$$f_N(\hat{\boldsymbol{Y}}_1^N;\boldsymbol{\theta},\hat{\boldsymbol{Z}}_1^N) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma})^{NN_s}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=1}^{N}\|\boldsymbol{y}(n)-\boldsymbol{q}(n;\boldsymbol{\theta})\|^2\right], \tag{4}$$

归一化常数 c 由下式计算:

$$c^{-1} = p(\hat{\boldsymbol{Y}}_1^N\,|\,\hat{\boldsymbol{Z}}_1^N,\mathfrak{M}) = \int_{S(\boldsymbol{\theta})} f_N(\hat{\boldsymbol{Y}}_1^N;\boldsymbol{\theta},\hat{\boldsymbol{Z}}_1^N)\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}. \tag{5}$$

这样,根据观测响应数据更新模型参数的后验概率分布,可以把系统识别问题转换为一个优化问题,最优化似然函数就可以得到模型参数的最可能值(most probable values),即

$$f_N(\hat{\boldsymbol{Y}}_1^N;\hat{\boldsymbol{\theta}},\hat{\boldsymbol{Z}}_1^N) = \max_{\boldsymbol{\theta}\in S(\boldsymbol{\theta})} f_N(\hat{\boldsymbol{Y}}_1^N;\boldsymbol{\theta},\hat{\boldsymbol{Z}}_1^N). \tag{6}$$

模型参数的不确定量化通常有两种求解方法:

1) 近似逼近方法

当数据点 N 足够多的情况下,$p_N(\hat{\boldsymbol{Y}}_1^N;\boldsymbol{\theta},\hat{\boldsymbol{Z}}_1^N)$ 在每一个最优参数 $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ 处十分尖锐,Beck 与 Katafygiotis[3] 证明了参数的后验概率密度函数可以近似为一个 Gauss 分布.对 $p_N(\hat{\boldsymbol{Y}}_1^N;\boldsymbol{\theta},\hat{\boldsymbol{Z}}_1^N)$ 在参数最优值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 处进行二阶 Taylor(泰勒)展开,考虑到一阶项为 0,可以近似得到

$$p_N(\hat{\boldsymbol{Y}}_1^N;\boldsymbol{\theta},\hat{\boldsymbol{Z}}_1^N) \approx f_N(\hat{\boldsymbol{Y}}_1^N;\hat{\boldsymbol{\theta}},\hat{\boldsymbol{Z}}_1^N)\exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_N(\boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}})\right), \tag{7}$$

其中,$\boldsymbol{A}_N(\boldsymbol{\theta})$ 是一个 $N_{\boldsymbol{\theta}} \times N_{\boldsymbol{\theta}}$ 的 Hessian 矩阵,其第 $(i,\ j)$ 个元素可以由下式计算得到:

$$[\boldsymbol{A}_N(\boldsymbol{\theta})]_{ij} = -\,\partial^2 \ln p_N(\hat{\boldsymbol{Y}}_1^N;\boldsymbol{\theta},\hat{\boldsymbol{Z}}_1^N)/(\partial\theta_i\partial\theta_j). \tag{8}$$

Bayes 模型更新需要进行高维度的积分,采用 Laplace 逼近,Beck 与 Katafygiotis[3] 进一步推导出了预测响应的概率密度函数近似表达式.

2) 随机抽样方法

需要指出,采用近似逼近的方法,适用于监测资料很多,且模型不确定性及监测误差较小的情况.当监测资料较少,或模型参数维度很高时,直接得到后验概率密度函数十分困难[12].如果未知参数的后验分布呈高维、复杂的非常见分布,会加大不确定性分析的难度,使得 Bayes 方法在实际应用中大大受限.为了解决这一问题,随机抽样方法被广泛应用于 Bayes 系统识别中.随机抽样方法不论监测资料的多少,都可以进行抽样,进而估算出后验概率密度函数[7,11].最常用的随机抽样方法是 Markov(马尔科夫)链 Monte Carlo(蒙特卡洛)(MCMC)方法,而 MCMC 方法的引入,大大促进了 Bayes 方法在系统识别领域的发展应用,取得了令人瞩目的成果.MCMC 方法即为使用 Markov 链的 Monte Carlo 积分,其基本思想是:构造一条 Markov 链,使其平稳分布为待估参数的后验分布,通过这条 Markov 链产生后验分布的样本,并基于 Markov 链达到平稳分布时得到的有效样本进行 Monte Carlo 积分[11].

综合以上分析不难发现,基于 Bayes 理论的参数识别方法不仅能给出参数的最优值,而且能得到定量描述模型参数不确定性的协方差矩阵,这对提高系统识别的鲁棒性与准确性来说

具有重要的意义和理论价值.因此,Bayes 系统识别框架近年来被广泛应用于模态参数识别、结构损伤识别和模型修正等领域.

2　模态参数识别的 Bayes 方法

2.1　Bayes 模态参数识别的初始框架

基于 Bayes 系统识别框架,Yuen 和 Katafygiotis 较早地研究了模态参数识别的不确定性量化问题[13].他们提出了 Bayes 模态参数识别的快速 Fourier(傅立叶)变换(FFT)方法[14]、功率谱矩阵驱动方法[15-16]、时域响应方法[17-18].这些方法根据频域 FFT 系数、功率谱矩阵或时域响应的统计特性,将模态域描述的响应模型嵌入到 Bayes 系统识别框架中,可以识别出频率、阻尼、振型等特征参数的概率密度函数.与传统的识别方法不同,Bayes 模态参数识别方法还可以识别出预测误差以及模态激励的功率谱.

Yuen 和 Katafygiotis 等系统研究了 FFT 系数和功率谱密度矩阵的统计特性[13,19].对于振动响应信号的原始 FFT 数据 $\boldsymbol{F}_N(\omega_k)=\sqrt{\Delta t/(2\pi N)}\sum_{n=0}^{N-1}\boldsymbol{y}(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k n\Delta t}$,可以证明由其实部和虚部构成的随机向量 $\boldsymbol{Z}(\omega_k)=[\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}(\omega_k),\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}(\omega_k)]^{\mathrm{T}}\in\Re^{2N_s}$ 近似服从一个 $2N_S$ 维的多元相关正态分布,其均值为 0,协方差矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{Z}}(\omega_k)$ 近似等于

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{Z}}(\omega_k)=\mathrm{cov}[\boldsymbol{Z}(\omega_k)]\approx\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathrm{Re}\{E[\boldsymbol{S}_{y,N}(\omega_k)]\} & -\mathrm{Im}\{E[\boldsymbol{S}_{y,N}(\omega_k)]\}\\ \mathrm{Im}\{E[\boldsymbol{S}_{y,N}(\omega_k)]\} & \mathrm{Re}\{E[\boldsymbol{S}_{y,N}(\omega_k)]\}\end{pmatrix},\tag{9}$$

其中 $E[\boldsymbol{S}_{y,N}(\omega_k)]$ 表示功率谱矩阵的均值; $\mathrm{Re}(\cdot)$ 和 $\mathrm{Im}(\cdot)$ 为复变函数的实部和虚部.Yuen 和 Katafygiotis 还证明了不同频率 ω_l 和 ω_k 对应的 $\boldsymbol{Z}(\omega_l)$ 和 $\boldsymbol{Z}(\omega_k)$ 具有近似独立性.在频率范围$[\omega_{k_1},\omega_{k_2}]$ 内,FFT 系数 $\boldsymbol{Z}^{k_1,k_2}=[\boldsymbol{Z}(\omega_{k_1}),\cdots,\boldsymbol{Z}(\omega_{k_2})]$$(k_1\geqslant k,l\geqslant k_2)$ 对应的似然函数为

$$p(\boldsymbol{Z}^{k_1,k_2}|\boldsymbol{\theta})\approx\prod_{k=k_1}^{k_2}p(\boldsymbol{Z}(\omega_k))=\prod_{k=k_1}^{k_2}[(2\pi)^{N_S}|\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{Z}}(\omega_k)|^{1/2}]^{-1}\exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(\omega_k)\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{Z}}^{-1}(\omega_k)\boldsymbol{Z}(\omega_k)\right).\tag{10}$$

根据 Bayes 理论,模态参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的后验概率密度函数为

$$p(\boldsymbol{\theta}|\hat{\boldsymbol{Z}}^{k_1,k_2})=c_1p(\boldsymbol{\theta})p(\hat{\boldsymbol{Z}}^{k_1,k_2}|\boldsymbol{\theta}),\tag{11}$$

通过最小化 $g(\boldsymbol{\theta})=-\ln[p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{Z}^{k_1,k_2})]$ 可以求得参数的最优值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$,参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的后验概率密度函数近似服从 Gauss 分布 $N(\hat{\boldsymbol{\theta}},\boldsymbol{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$,$\boldsymbol{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ 表示当 $\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 时 $g(\boldsymbol{\theta})$ 的 Hessian 矩阵.

基于 FFT 系数的统计特性,可以进一步证明功率谱矩阵 $\boldsymbol{S}_{y,N}^{M}(\omega_k)=\sum_{i=1}^{M}\boldsymbol{S}_{y,N}^{(i)}(\omega_k)=\sum_{i=1}^{M}\boldsymbol{F}_N^{(i)}(\omega_k)(\boldsymbol{F}_N^{(i)}(\omega_k))^*$ 近似服从 Wishart 分布[19].采用与 Bayes FFT 算法类似的思路可以将功率谱矩阵的概率模型嵌入到 Bayes 框架,形成新的目标函数,进而计算出模态参数的后验概率密度函数.Bayes 模态参数识别的时域响应方法[17]认为响应服从一个零均值的 Gauss 分布,将其嵌入到 Bayes 框架识别出频率、阻尼、振型等特征参数的概率密度函数.后来,Bayes 时域方法被拓展到非平稳的工况[18],他们通过单自由度和多自由度系统的数值模拟来验证所提方法的正确性.

Yuen 和 Katafygiotis 提出的这些方法具有严格的理论推导,考虑了多源不确定性因素的影响,可以识别出频率、阻尼、振型等特征参数的概率密度函数.但是,这些方法应用的主要障碍是计算时间和收敛的稳定性,因为确定模态参数的最优值和它们的协方差矩阵需要求解一个数值优化问题,而这个优化问题的维数随着测试自由度数目的增长而呈爆炸式增长,而且其目

标函数涉及病态矩阵求逆,这使得该方法难以用于实际问题,但是这些工作为后来的研究奠定了坚实的理论基础.

2.2 Bayes 模态参数识别的快速算法

针对 Yuen 和 Katafygiotis 方法存在的问题,Au 通过仔细分析 Bayes FFT 方法目标函数的数学结构,巧妙地引入了矩阵论和函数优化理论等数学处理方式,提出了 Bayes FFT 模态参数快速识别方法[20-22],极大地改善了传统 Bayes FFT 识别方法在优化和计算协方差矩阵上的难度.对于系统的某一阶分离模态(well-separated mode), Au 将参数识别问题转换为一个只含有 $\{\boldsymbol{f},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{S},\boldsymbol{\sigma}^2\}$ 这 4 个优化参数的目标函数[20],其中 $\{\boldsymbol{f},\boldsymbol{\zeta}\}$ 代表频率和阻尼,$\{\boldsymbol{S},\boldsymbol{\sigma}^2\}$ 为模态激励和预测误差的功率谱.得到 $\{\boldsymbol{f},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{S},\boldsymbol{\sigma}^2\}$ 的最优值后,可以通过奇异值分解直接得到振型的最优值.同时,Au 还推导出了模态参数的后验协方差矩阵解析表达式.因此,不需要有限差分就能够快速计算出协方差矩阵,可以在很短的时间内完成不确定性量化.

对于密集模态(closely spaced modes),因为各阶振型之间并非彼此正交,Bayes FFT 模态参数快速识别方法的实现将变得更为复杂.为了降低算法的复杂性,Au 通过一组标准正交基来表示振型向量,那么振型矩阵 $\boldsymbol{\Phi} \in R^{N_s\times m}$ 可以表示为[21-22]

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{\alpha}, \tag{12}$$

其中,$\boldsymbol{B}' \in R^{N_s\times m'}$ 中的列包含在一组正交的“模态基”;$\boldsymbol{\alpha} \in R^{m'\times m}$ 中的列为每个振型关于各正交模态基的坐标;$m' \leqslant \min(n,m)$ 是模态正交基的维数,其不超过振型矩阵的列数和测试的自由度数.通过这样的分解,经过一系列巧妙的数学变换,可以得到非常紧凑的目标函数.因为优化过程中涉及复杂数值运算的矩阵维度仅为 m', 在实际应用中它比测试的自由度数小得多,因此目标函数的运算与测试的自由度无关,这对于提高运算的效率具有非常重要的意义.利用 Newton(牛顿)迭代法直至收敛可以有效地确定不同参数的最优值.目标函数的 Hessian 矩阵可以根据已经推导出来的解析表达式准确有效地计算出来,对该 Hessian 矩阵求逆即可得到协方差矩阵用来量化模态参数的不确定性.

此外,Au 和 Zhang 研究了通过模态置信准则(MAC)的概率指标来宏观度量振型向量的不确定性[23].Au 还深入研究了环境激励下模态参数识别的精度影响规律,推导出了模态参数精度的渐进表达式,该表达式适用于分离模态、小阻尼和足够多数据的情况,其形式十分简单,但却提供了深刻的见解[24-25].各模态参数的变异系数(coefficients of variances)近似等于

$$\begin{cases} \delta_f^2 \sim \zeta/[2\pi N_c B_f(\kappa)];\ \delta_\zeta^2 \sim 1/[2\pi\zeta N_c B_\zeta(\kappa)]; \\ \delta_S^2 \sim 1/[N_f B_S(\kappa)];\ \delta_{\sigma^2}^2 \sim 1/[(n-1)N_f], \end{cases} \tag{13}$$

上式中 $B_f(\kappa)$,$B_\zeta(\kappa)$ 和 $B_S(\kappa)$ 是与所选频谱带宽参数 κ 直接相关的函数;$N_c = T_d f$ 和 $N_f = 2\zeta\kappa N_c$;T_d 为采样时长.值得一提的是,Au 揭示了频率学派和 Bayes 学派在系统识别参数不确定性量化结果之间的关系[26].文献[27]对环境激励下 Bayes FFT 快速算法做了较为全面的综述,涵盖了理论、计算和实际应用等问题.

近年来,快速 Bayes FFT 参数识别方法的研究思路和技巧在不同文献里得到了广泛借鉴.例如,Au 和 Ni 提出了利用已知单点激励和多点输出的的快速 Bayes FFT 算法[28],该方法对于分离模态以及密集模态均适用.文献[29-30]利用自由振动响应的数据,采用 Bayes FFT 方法实现了模态参数识别.大型土木工程结构动力测试通常包括多个测组,为了有效融合各测组的“局部振型”,Au 提出了参考点不唯一或不固定的工况下“整体振型融合”的全局最小二乘算法[31].基于文献[20]和[31]的思路,Au 和 Zhang 等提出了能够融合多测组数据的快速 Bayes FFT 模态识别方法[32-33],该方法能够直接识别整体振型,避免了振型融合的独立步骤.快速

Bayes FFT 识别方法被应用于多个工程结构的参数识别[34-36].

针对 Katafygiotis 和 Yuen 所提出的功率谱矩阵驱动方法[16]在实际应用中存在的困难,Yan 和 Katafygiotis 提出了两阶段快速 Bayes 谱密度方法[37].通过对自功率谱密度和互功率谱密度的统计特性进行深入分析可知,当样本数量很大时,功率谱密度矩阵 $\boldsymbol{S}_{y,N}^{M}$ 的迹 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{S}_{y,N}^{M})$ 近似服从正态分布.受文献[20-22]的启发,基于这一统计特性,Yan 和 Katafygiotis 提出了 Bayes 频域模态参数识别的变量分离原理,实现了振型与其他模态参数在分离模态和密集模态下的解耦,旨在减少参数识别优化问题的维度,然后通过两个阶段对模态参数分别进行独立识别.为了组合不同测组的局部模态,Yan 和 Katafygiotis 提出了振型融合 Bayes 方法[38],该方法可以有效地考虑不同测组数据质量的差异,计算出整体振型的最优值和协方差矩阵.

3　结构随机模型修正的 Bayes 方法

模型修正的目的就是尽量减小理论模型与实际结构之间的误差,其本质上属于一种优化问题.近年来,Bayes 方法越来越多地被用于随机模型修正,达到量化修正参数不确定性的目的.基于 Bayes 方法的随机模型修正,正是利用 Bayes 原理很好地综合了工程经验、专家判断等先验信息和实测数据等客观信息来推断修正参数的后验概率分布.它以正向模型计算的方式解决了复杂的逆向不确定性量化的数学反问题,有效地避免了优化方法中可能存在的梯度计算、病态和非唯一解等问题,是一种很有前景的随机模型修正方法[39].Bayes 模型修正的主要创新大致可以分为两类,一是形成合理的优化目标函数,二是参数不确定性量化的随机抽样方法,因此本节以此为主线进行归纳.

3.1　目标函数构建的若干思路

Beck 和 Katafygiotis 较早地将 Bayes 方法用于随机模型修正问题,他们提出的框架被广泛应用于随机模型修正[40].为了构建目标函数,Vanik 等[41]首先引入了辅助变量"系统振型(system mode shape)"这一概念."系统振型"代表结构的实际振型而非特征向量,通过引入辅助变量,有以下优点:(i) 避免了测试振型与特征向量阶次的匹配;(ii) 避免了运算非常耗时的特征值分解;(iii) 由于结构模型采用不精确的数学约束,很多时候很难得出与试验振型匹配较好的理论振型(特征向量),因此引入辅助变量使得模型修正变得更加灵活;(iv) 可以避免模态扩展的步骤,自动实现不同测组局部振型信息的融合.由于以上这些优势, Ching, Yuen 和 Yan 等[42-46]在模型修正的研究中也引入了系统振型这一辅助变量来形成目标函数.

基于 Vanik 的工作,Ching 等[42]在研究中引入"系统振型",建立了实测模态数据与模型参数之间的联系:

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\phi}_r = \hat{\boldsymbol{\omega}}_{r,j}^2\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}_r + \boldsymbol{\varepsilon}_{r,j};\ \hat{\boldsymbol{\psi}}_{r,j} = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\phi}_r + \boldsymbol{e}_{r,j}, \tag{14}$$

其中, $\boldsymbol{\phi}_r(r=1,2,\cdots,m)$ 表示系统振型;$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{r,j}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\psi}}_{r,j}$ 分别是第 j 次实测的第 r 阶模态频率和振型向量; $\boldsymbol{\Gamma}$ 是选择矩阵,使得系统振型自由度与测量自由度对应; $\boldsymbol{\varepsilon}_{r,j}$ 和 $\boldsymbol{e}_{r,j}$ 是预测误差向量.根据最大熵原理, 预测误差可假定服从正态分布,即 $\boldsymbol{\varepsilon}_{r,j}\sim(0,\sigma_r^2\boldsymbol{I})$; $\boldsymbol{e}_{r,j}\sim(0,\delta_r^2\boldsymbol{I})$.δ_r^2 可以直接从测试振型的数据中估算出来.根据 Bayes 理论,可以构建关于 $\{\boldsymbol{\theta},\ \boldsymbol{\phi},\ \sigma^2\}$ 的模型修正目标函数:

$$p(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\phi},\sigma^2|D) = \frac{p(\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\phi})p(\sigma^2)p(D|\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\phi},\sigma^2)}{\int p(\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\phi})p(\sigma^2)p(D|\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\phi},\sigma^2)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}\mathrm{d}\boldsymbol{\phi}\mathrm{d}\sigma^2}. \tag{15}$$

上式的积分由于维度高而无法用解析方法或者一般的数值方法进行求解,针对该问题,Ching 采用了 Gibbs(吉布斯)采样法(GS)进行采样以得到目标结果.类似的研究思路在另外两

篇文献中得到了拓展和应用[43-44].

后来,Yuen 等学者[45]提出了一种使用不完备振型测试信息的 Bayes 模型修正方法.为了构建似然函数,Yuen 引入了辅助变量“系统频率” $\boldsymbol{\omega}$ 和“系统振型”$\boldsymbol{\phi}$,测量误差 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和特征方程误差 $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{eq}}$:

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\omega}}^2 \\ \hat{\boldsymbol{\psi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}^2 \\ \boldsymbol{\Gamma\phi} \end{bmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon},\ \boldsymbol{K}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\phi}_r = \hat{\boldsymbol{\omega}}_r^2\boldsymbol{M\phi}_r + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{eq}}, \tag{16}$$

式中,$\hat{\boldsymbol{\psi}} = [\hat{\boldsymbol{\psi}}_1^{\mathrm{T}}, \hat{\boldsymbol{\psi}}_2^{\mathrm{T}}, \cdots, \hat{\boldsymbol{\psi}}_m^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^2 = [\hat{\omega}_1^2, \hat{\omega}_2^2 \cdots, \hat{\omega}_m^2]^{\mathrm{T}}$;$\hat{\boldsymbol{\psi}}_r$ 为 r 阶实测振型,$\hat{\omega}_r^2$ 表示观测的系统固有频率;$\boldsymbol{\Gamma}$ 为选择矩阵,用于选择与观测自由度对应的系统振型分量;$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 为 Bayes 模态参数识别算法得到的模态参数后验协方差.假定 $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}})$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{eq}} \sim N(0, \sigma_{\mathrm{eq}}^2\boldsymbol{I})$,因此可以构建如下的目标函数:

$$J(\boldsymbol{\omega}^2, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}) = (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0) + \\ \sigma_{\mathrm{eq}}^{-2}\sum_{r=1}^{m} \| (\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\theta}) - \omega_r^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{\phi}_r \|^2 + \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\omega}}^2 - \boldsymbol{\omega}^2 \\ \hat{\boldsymbol{\psi}} - \boldsymbol{\Gamma\phi} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\omega}}^2 - \boldsymbol{\omega}^2 \\ \hat{\boldsymbol{\psi}} - \boldsymbol{\Gamma\phi} \end{bmatrix}, \tag{17}$$

式中 $\|\cdot\|$ 表示 Euclid(欧几里得)范数;$\boldsymbol{\Sigma}_0$ 为根据先验信息决定的参数协方差矩阵.为了说明方法的有效性和计算的鲁棒性,Yuen 等通过一个剪切型结构和一个三维框架结构进行了验证[45].

在 Yuen 和 Ching 等工作的基础上,Yan 和 Katafygiotis[46]提出了一种有效融合多测组模态统计信息的 Bayes 模态修正方法.在进行模型更新前,首先应用两阶段快速 Bayes 谱密度方法[37-38]来确定模态参数的统计特性,然后通过引入辅助变量融合多测组局部振型信息,构建了新的目标函数.为了减轻目标函数优化时的计算负担,文献[45]和[46]都采用了快速解析耦合迭代算法.该算法把数值优化分解为若干耦合迭代问题,首先解析地推导出目标函数关于不同类型参数的一阶偏导数,依次对不同参数的偏导数取 0 求解线性优化问题,反复迭代直至收敛.

需要指出,当自由度数目很多时,Bayes 模型修正的计算工作量往往非常巨大.为了提高计算效率,减少计算时间,研究人员在形成目标函数时采取了模型折减或者替代模型的手段.Papadimitriou 等[47-49]引进了一种“模态综合技术”(component mode synthesis)[50]进行 Bayes 有限元模型修正.该方法的主要思路是通过对有限元模型分块,进一步简化有限元模型,在大幅减少的广义坐标空间上,文献[51]引入了 Gauss 过程模型形成随机模型修正的目标函数.他们都将所提方法应用于桥梁的模型修正,以此说明方法的有效性,有限元模型修正过程中计算量减少了若干个数量级,显著减少了计算耗费.

常用的 Bayes 模型修正方法都假设模型参数随着时间不存在变异性.然而,这种假设可能不适用于土木结构,因为结构质量和刚度由于多源的不确定性存在固有的变异性,如环境温度的改变、温度梯度、风速和交通负荷等.Behmanesh 等[52]采用分层 Bayes 模型修正技术形成目标函数,在这个方向上做出了初步探索.分层 Bayes 模型修正技术[53]考虑到线性系统的时间变异性,能够预测修正参数的整体不确定性.

3.2 随机抽样算法的若干进展

待修正模型参数的后验概率密度函数往往存在维度高和复杂性大等问题,难以采用解析方法或一般的数值方法进行求解.为解决这些问题,近年来 Beck,Au,Papadimitriou 以及 Ching 等将 MCMC 方法引入了模型修正领域,取得了良好的成果.Au 和 Beck 证明了 MH 算法在解决可靠性问题上的潜在用途[54].在此基础上,Beck 和 Au 结合了 MH 算法和类似于模拟退火[55]

的理念,提出了自适应 MCMC 模拟方法[56].自适应 MCMC 算法解决了从后验概率密度函数相当尖锐或尖峰形态中取样的困难,其主要理念是避免直接从后验概率密度函数中取样,而是从一系列较容易的 PDF 中取样,进而得到后验概率密度函数的样本,而此一系列 PDF 会逼近到后验概率密度函数.然而当遭遇模型参数维度较高的情况,该方法仍可能失效[11].

Ching 等[11]提出了著名的渐进 Markov 链 Monte Carlo(TMCMC)法进行 Bayes 模型修正,该方法避免直接从较困难的后验概率密度函数(例如多峰值概率密度函数、非常尖锐的概率密度函数以及有平坦区域的概率密度函数)中取样,而是从一系列中间概率密度函数中进行抽样,此一系列概率密度函数逼近于后验概率密度函数且易于抽样,进而得到后验概率密度函数的样本.此外,TMCMC 法可以在给定资料的情况下估算出假定模型的可能性,即证据值(evidence),如此可进行模型选定,找出较具可能性的模型,解决了只进行模型修正却不知修正结果是否合理的限制,也降低了模型种类的不确定性.TMCMC 法也适用于多峰相关的后验概率密度函数,或者当不确定性参数维度很高的情况,但是该法的准确性会随着维度的增加而降低.TMCMC 方法与自适应 MCMC 方法[56]理念十分类似.两种方法最主要的区别是,TMCMC 可以估算出自适应 MCMC 方法无法估算出的证据值,这对于模型选定和模型平均十分重要,可以降低模型类的不确定性.此外,TMCMC 可经由选择合适的中间值或是采用无拒绝 MCMC 方法(如 Gibbs 采样法)有效降低拒绝率.由于 TMCMC 算法的诸多优点,它已经成为一个十分流行的算法,应用于许多工程问题[57-59],同时有助于启发其他算法,比如 AIMS[60]算法.

针对传统 MCMC 方法计算效率受参数空间维数制约这一问题,Cheung 和 Beck 引入并改进了混合 Monte Carlo 法(HMCM)[61],该方法适用于求解高维不确定参数的 Bayes 模型修正问题,并显示出了很大的潜力.该方法避免了 MH 算法带来的局部随机游走行为,这种情况在 Bayes 模型修正中是经常遇到的,这一优势在参数高度相关的后验分布采样时更为突出.他们认为该方法可以适用于任何类型的模型,包括物理模型或者黑箱模型,线性或者非线性模型.此外,他们还推导出了一个 MCMC 收敛性评价的新公式.

基于前人的研究,最近 Green 提出了数据退火(data annealing)[62]算法,其思路类似于模拟退火的理念,但是增加对似然函数影响的方式是通过引入额外的数据点到实验数据 D 中.此外,Green 等[63]在 Bayes 推理的两个层次(即参数估计和模型选择)中,对于涉及非常大的训练数据集的情况,提出通过利用可用数据的一个不仅短小而且“高度信息(highly informative)”子集,以此显著减少运行 MCMC 程序时的计算负担.

随着研究工作的发展和交叉,最近有些学者尝试将近似 Bayes 方法和可靠度分析方法应用于模型修正领域.近似 Bayes 计算[64]已经成为 Bayes 学派的一个重要方面,在人们感兴趣的许多实际问题中,Bayes 似然函数不可得,或者由于计算量太大而不能被拟合,亦或所需的模拟方法不能处理问题的复杂性.为了提高近似 Bayes 计算(ABC)的效率,Chiachio 等把近似 Bayes 计算的原理和子集模拟技术结合起来,提出了基于子集仿真的近似 Bayes 计算(ABC-subsim)[65-66],此处 ABC 表示近似 Bayes 计算(approximate Bayesian computation, 简称 ABC),subset 代表子集抽样算法[67].ABC 需要许多候选样本来筛选一个可接受的样本,计算效率较低,因此需要以一个更有效的小概率事件抽样方法.子集模拟(subset simulation)是为了解决工程系统可靠性分析中遇到的小失效概率计算而提出的一种模拟方法,该算法可以很容易适应 ABC 方法.同时,ABC-subsim 可以简便估计 ABC 的证据值以进行模型类评估,他们通过对线性和非线性系统数值模拟证明了该方法的适用性和有效性.最近,Straub 等[68]和 Au[69]等在基于子集抽样算法的随机模型修正方面也做了深入的研究,他们发现该方法具有显著的优势,计算

效率不随随机变量数目的增加而变化.

除了上述的工作,国内外不少学者[70-72]在 Bayes 模型修正方面做出了大量新的尝试.Simoen 和 de Roeck 等[73]对基于 Bayes 方法的随机模型修正也进行了较为详细的归纳和总结.由于篇幅限制的原因,此处不再做详细介绍.

4 结构统计损伤识别 Bayes 方法

近年来,Bayes 方法也被广泛应用于结构损伤识别之中.Collins 等[74]较早对基于 Bayes 理论的损伤识别进行了探索,这是基于概率统计理论的损伤识别方法的开端.Sohn 等[75]提出,基于 Bayes 方法通过比较不同损伤程度的相对可能性来进行搜索,同时将 Ritz 向量引入了 Bayes 理论框架,并对一个三维的桁架模型与一个 5 层的框架模型进行了有噪声条件下刚度折减引起的损伤识别.后来,Sohn 等[76]针对损伤问题又进一步提出了运用 Bayes 概率方法来预测诊断最可能损伤位置和损伤程度,并进行了实验室混凝土柱模型动力试验中塑性铰的预测定位.

Beck 与 Katafygiotis 提出的基本框架在结构损伤识别领域也发挥了重要作用.该框架被 Vanik 应用于结构在线损伤识别[77],并通过剪切型框架结构进行了数值模拟验证.Yuen 等针对 IASC-ASCE 的 Phase I Benchmark 框架模型研究提出了利用 Bayes 损伤识别的两阶段法[78].该方法需要用 Bayes 方法进行实测模态参数不确定性的量化,基于模态参数的概率特性可以识别出单元的损伤程度.基于传递比矩阵联系两组测试响应的思想和 FFT 系数的统计特性,Yuen 等[79-80]提出了 Bayes 损伤识别方法,该方法避免了对输入的测试,而且可以拓展到子结构损伤识别,并采用剪切型建筑的数值模拟数据证明了所提方法的有效性和准确性.在此基础上,Yan 和 Katafygiotis[81]将传递比矩阵与功率谱迹的统计特性相结合,提出了运算效率更高的 Bayes 损伤识别方法,该方法的缺陷是为了满足功率谱迹的正态分布假定,对数据的测试数目有一定的要求.需要指出,通过以上这些系统识别方法计算出损伤状态与无损状态的刚度参数,可以得到结构不同单元的损伤存在概率:

$$P_i(d_i) \approx \Phi\left(\frac{(1-d_i)\hat{\boldsymbol{\theta}}_i^{\mathrm{ud}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_i^{\mathrm{pd}}}{\sqrt{(1-d_i^2)(\boldsymbol{\sigma}_i^{\mathrm{ud}})^2 + (\boldsymbol{\sigma}_i^{\mathrm{pd}})^2}}\right), \tag{18}$$

式中 $\Phi(\cdot)$ 表示标准正态分布;$d_i \in [0,1]$ 表示第 i 个刚度参数的损伤阈值;上标 ud 表示未损伤的结构,pd 表示可能损伤的结构;$\hat{\boldsymbol{\theta}}_i^{\mathrm{ud}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i^{\mathrm{pd}}$ 表示损伤前后刚度参数的最优值;$\boldsymbol{\sigma}_i^{\mathrm{ud}}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_i^{\mathrm{pd}}$ 表示损伤前后刚度参数的方差.

最近,Ebrahimian 等[82]提出基于批量 Bayes 估计(batch Bayesian estimation)的非线性有限元模型修正框架,并将其应用于损伤识别.批量 Bayes 方法的原理是得到一个扩展最大似然函数估算方法,以此估计模型参数,并通过使用 Cramer-Rao 下界定理计算 Fisher 信息矩阵量化参数的不确定性,通过两个案例研究说明了所提出的框架在结构震后损伤识别(检测,定位和量化)的成功表现.在国内,易伟建等[83]基于 Bayes 损伤诊断的方法进行了框架结构的损伤识别实验研究,结果表明,识别结果能揭示损伤的位置.值得一提的是,Bayes 方法还被广泛地应用于裂纹诊断[84-86]、轨枕损伤识别[87]和基于其他无损检测技术的损伤识别[88-89]等,取得了良好的效果.

5 结论和展望

通过以上综述,不难发现,结构动力系统存在着不同形式的不确定性.为了提高结构动力分析结果的鲁棒性和准确性,在结构动力安全性分析中引入 Bayes 方法来充分考虑这些误差

或不确定性的影响不失为一种很好的手段.除了在模态参数识别、模型修正和损伤识别领域之外,Bayes 方法在模型选择和平均[90-92]、传感器优化[93-94]和载荷识别[95]等方面也有着诸多的优势和广泛的应用.需要指出,基于 Bayes 理论框架下的系统识别仍然还存在许多难题,需要继续深入探索:

1) 随着电子信息技术的发展,开发出更为高效、智能的算法,实现 Bayes 模态参数的在线实时识别,是未来应用于实际工程的一个重点.然而,快速 Bayes FFT 模态参数识别算法需要先确定选定频谱范围内的模态阶数才能进行准确识别.因此如何自动快速地判定系统在选定频带内的模态阶数是需要深入探索的问题,这也是 Bayes 模态参数识别方法用于在线实时识别的一个障碍.

2) 目前的 Bayes 模型修正方法通常假定预测误差服从零均值正态分布,且假定各个测点的预测误差是独立同分布的,具有相同的协方差.在实际应用中,这些假定往往都是很难成立的,它们会影响不确定性量化结果的准确性和系统识别的鲁棒性[96].因此,在未来的研究中,提出更合理的概率模型考虑不同测点的预测误差,是 Bayes 模型修正的一个难点.

3) 虽然随机抽样方法被广泛地应用于 Bayes 系统识别中估算参数的后验概率密度函数,但是这些方法的计算耗费是巨大的,且随着模型参数维度的增加而增加.当遇到后验概率密度函数为多峰形态、很尖锐或者形状怪异的情况,随机抽样方法的抽样效率会降低甚至出现抽样失败的情况.因此开发出更高效的随机抽样方法仍然是学术界一个热门的研究方向.

4) 环境和运营条件不确定性(交通流荷载、风载、温度等)的作用下,结构参数和测试信号会发生变化,导致损伤因子的提取结果产生变化.显然,环境因素引起的损伤因子的变化或者波动不是结构本身的健康状态引起的,是结构正常运营状态下允许出现的差异.因此,如何很好地通过长期数据的统计,从根本上分离环境变异以及结构损伤导致的损伤指标变异是 Bayes 系统识别领域还没有很好解决的问题.

5) Bayes 系统识别的案例研究大多仍局限于学术范畴.算法的准确性似乎还很难通过试验验证,因此设计一个完整的试验验证不同文献量化不确定性的精度是一个很有意义的研究内容.此外,提高计算效率,引入更先进的工具,使 Bayes 系统识别应用于更多较大规模的土木工程结构是未来发展的重要方向.

参考文献(References):

[1] 禹丹江. 土木工程结构模态参数识别——理论、实现与应用[D]. 博士学位论文. 福州: 福州大学, 2006.(YU Dan-jiang. Modal parameter identification of civil engineering structures—theory, implementation and application[D]. PhD Thesis. Fuzhou: Fuzhou University, 2006.(in Chinese))

[2] 李炜明, 董莪, 朱宏平. 土木工程系统辨识统计方法的现状与展望[J]. 振动与冲击, 2012, **31**(11): 42-47.(LI Wei-ming, DONG E, ZHU Hong-ping. Progress of system identification with statistical methods in civil engineering[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2012, **31**(11): 42-47.(in Chinese))

[3] Beck J L, Katafygiotis L S. Updating models and their uncertainties—I: Bayesian statistical framework[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1998, **124**(4): 455-461.

[4] Katafygiotis L S, Beck J L. Updating models and their uncertainties—II: model identifiability[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1998, **124**(4):463-467.

[5] YAN Wang-ji. Wireless sensor network based structural health monitoring accommodating multiple uncertainties[D]. PhD Thesis. Hong Kong: Hong Kong University of Science and Technol-

ogy, 2013.

[6] Housner G W, Bergman L A, Caughey T K, et al. Structural control: past, present, and future [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1997, **123**(9): 897-971.

[7] Beck J L. Bayesian system identification based on probability logic [J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2010, **17**(7): 825-847.

[8] 茆诗松. 贝叶斯统计[M]. 北京: 中国统计出版社, 1999.(MAO Shi-song. *Bayesian Statistics* [M]. Beijing: China Statistics Press, 1999.(in Chinese))

[9] Bayes T. An essay towards solving a problem in the doctrine of chances [J]. *Resonance*, 2003, **8**(4): 80-88.

[10] CHEUNG Sai-hung. Stochastic analysis, model and reliability updating of complex systems with applications to structural dynamics [D]. PhD Thesis. Pasadena, CA: California Institute of Technology, 2009.

[11] CHING Jian-ye, CHEN Yi-chu. Transitional Markov chain Monte Carlo method for Bayesian model updating, model class selection, and model averaging [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2007, **133**(7): 816-832.

[12] Katafygiotis L S, LAM Heung-fai. Tangential-projection algorithm for manifold representation in unidentifiable model updating problems [J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2002, **31**(4): 791-812.

[13] YUEN Ka-veng. Structural modal identification using ambient dynamic data [D]. Master Thesis. Hong Kong: Hong Kong University of Science and Technology, 1999.

[14] YUEN Ka-veng, Katafygiotis L S. Bayesian fast Fourier transform approach for modal updating using ambient data [J]. *Advances in Structural Engineering*, 2003, **6**(2): 81-95.

[15] YUEN Ka-veng, Katafygiotis L S, Beck J L. Spectral density estimation of stochastic vector processes [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2002, **17**(3): 265-272.

[16] Katafygiotis L S, YUEN Ka-veng. Bayesian spectral density approach for modal updating using ambient data [J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2001, **30**(8): 1103-1123.

[17] YUEN Ka-veng, Katafygiotis L S. Bayesian time-domain approach for modal updating using ambient data [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2001, **16**(3): 219-231.

[18] YUEN Ka-veng, Beck J L, Katafygiotis L S. Probabilistic approach for modal identification using non-stationary noisy response measurements only [J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2002, **31**(4): 1007-1023.

[19] YUEN Ka-veng. *Bayesian Methods for Structural Dynamics and Civil Engineering* [M]. New York: John Wiley & Sons Ltd, 2010.

[20] AU Siu-kui. Fast Bayesian FFT method for ambient modal identification with separated modes [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2011, **137**(3): 214-226.

[21] AU Siu-kui. Fast Bayesian ambient modal identification in the frequency domain, part I: posterior most probable value [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2012, **26**: 60-75.

[22] AU Siu-kui. Fast Bayesian ambient modal identification in the frequency domain, part II: posterior uncertainty [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2012, **26**: 76-90.

[23] AU Siu-kui, ZHANG Feng-liang. On assessing the posterior mode shape uncertainty in ambient modal identification [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2011, **26**(3): 427-434.

[24] AU Siu-kui. Uncertainty law in ambient modal identification—part I: theory [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2014, **48**(1/2): 15-33.

[25] AU Siu-kui. Uncertainty law in ambient modal identification—part II: implication and field

verification[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2014, **48**(1/2): 34-48.

[26] AU Siu-kui. Connecting Bayesian and frequentist quantification of parameter uncertainty in system identification[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2012, **29**:328-342.

[27] AU Siu-kui, ZHANG Feng-liang, NI Yan-chun. Bayesian operational modal analysis: theory, computation, practice[J]. *Computers & Structures*, 2013, **126**: 3-14.

[28] AU Siu-kui, NI Yan-chun. Fast Bayesian modal identification of structures using known single-input forced vibration data[J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2014, **21**: 381-402.

[29] ZHANG Feng-liang, NI Yan-chun, AU Siu-kui, et al. Fast Bayesian approach for modal identification using free vibration data, part I: most probable value[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2016, **70/71**: 209-220.

[30] NI Yan-chun, ZHANG Feng-liang, LAM Heung-fai, et al. Fast Bayesian approach for modal identification using free vibration data, part II: posterior uncertainty and application[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2016, **70/71**: 221-244.

[31] AU Siu-kui. Assembling mode shapes by least squares[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2011, **25**(1): 163-179.

[32] AU Siu-kui, ZHANG Feng-liang. Fast Bayesian ambient modal identification incorporating multiple setups[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2012, **138**(7): 800-815.

[33] ZHANG Feng-liang, AU Siu-kui, LAM Heung-fai. Assessing uncertainty in operational modal analysis incorporating multiple setups using a Bayesian approach[J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2015, **22**(3): 395-416.

[34] AU Siu-kui, ZHANG Feng-liang. Ambient modal identification of a primary-secondary structure by fast Bayesian FFT method[J]. *Mechanical Systems & Signal Processing*, 2012, **28**: 280-296.

[35] AU Siu-kui, NI Yan-chun, ZHANG Feng-liang, et al. Full-scale dynamic testing and modal identification of a coupled floor slab system[J]. *Engineering Structures*, 2012, **37**(4): 167-178.

[36] AU Siu-kui, ZHANG Feng-liang, TO Ping. Field observations on modal properties of two tall buildings under strong wind[J]. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 2012, **101**: 12-23.

[37] YAN Wang-ji, Katafygiotis L S. A two-stage fast Bayesian spectral density approach for ambient modal analysis. Part I: posterior most probable value and uncertainty[J]. *Mechanical Systems & Signal Processing*, 2014, **54/55**: 139-155.

[38] YAN Wang-ji, Katafygiotis L S. A two-stage fast Bayesian spectral density approach for ambient modal analysis. Part II: mode shape assembly and case studies[J]. *Mechanical Systems & Signal Processing*, 2015, **54/55**: 156-171.

[39] 万华平. 结构动力不确定性及其随机模型修正方法研究[D]. 博士学位论文. 长沙：中南大学，2014.(WAN Hua-ping. Research on structural dynamic uncertainty and its stochastic model updating method[D]. PhD Thesis. Changsha: Central South University.(in Chinese))

[40] Beck J L, AU Siu-kui, Vanik M W. Monitoring structural health using a probabilistic measure [J]. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 2001, **16**(1): 1-11.

[41] Vanik M W, Beck J L, Au S K. Bayesian probabilistic approach to structural health monitoring [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2000, **126**(7): 738-745.

[42] CHING Jian-ye, Muto M, Beck J L. Structural model updating and health monitoring with incomplete modal data using Gibbs sampler[J]. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engi-*

neering, 2006, **21**(4): 242-257.

[43] CHING Jian-ye, Beck J L. Bayesian analysis of the phase II IASC-ASCE structural health monitoring experimental benchmark data[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2004, **130**(10): 1233-1244.

[44] CHING Jian-ye, Beck J L. New Bayesian model updating algorithm applied to a structural health monitoring benchmark[J]. *Structural Health Monitoring*, 2004, **3**(4): 313-332.

[45] YUEN Ka-veng, Beck J L, Katafygiotis L S. Efficient model updating and health monitoring methodology using incomplete modal data without mode matching[J]. *Structural Control & Health Monitoring*, 2006, **13**(1): 91-107.

[46] YAN Wang-ji, Katafygiotis L S. A novel Bayesian approach for structural model updating utilizing statistical modal information from multiple setups[J]. *Structural Safety*, 2015, **52**: 260-271.

[47] Papadimitriou C, Papadioti D C. Component mode synthesis techniques for finite element model updating[J]. *Computers & Structures*, 2013, **126**(1):15-28.

[48] Jensen H A, Millas E, Kusanovic D, et al. Model-reduction techniques for Bayesian finite element model updating using dynamic response data[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2014, **279**: 301-324.

[49] Papadimitriou C, Papadioti D C. *Fast Computing Techniques for Bayesian Uncertainty Quantification in Structural Dynamics*[M]//Simmermacher T, Cogan S, Moaveni B, et al, ed. *Topics in Model Validation and Uncertainty Quantification*. Vol **5**. New York: Springer, 2013: 25-31.

[50] Craig Jr R R. *Structural Dynamics: An Introduction to Computer Methods*[M]. New York: John Wiley and Sons, 1981.

[51] Wan H P, Ren W X. Stochastic model updating utilizing Bayesian approach and Gaussian process model[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2016, **70**: 245-268.

[52] Behmanesh I, Moaveni B, Lombaert G, et al. Hierarchical Bayesian model updating for structural identification[J]. *Mechanical Systems & Signal Processing*, 2015, **64**: 360-376.

[53] Gamerman D, Lopes H F. *Markov Chain Monte Carlo: Stochastic Simulation for Bayesian Inference*[M]. Boca Raton: Chapman & Hall, 2006.

[54] AU Siu-kui, Beck J L. A new adaptive importance sampling scheme for reliability analysis[J]. *Structural Safety*, 1999, **21**(2): 135-158.

[55] Kirkpatrick S, Gelatt C D, Vecchi M P. Optimization by simulated annealing[J]. *Science*, 1983, **220**(4598): 671-680.

[56] Beck J L, AU Siu-kui. Bayesian updating of structural models and reliability using Markov chainMonte Carlo simulation[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2002, **128**(4): 380-391.

[57] Goller B, Schuëller G I. Investigation of model uncertainties in Bayesian structural model updating[J]. *Journal of Sound & Vibration*, 2011, **330**(25): 6122-6136.

[58] ZHENG Wei, YU Yi. Bayesian probabilistic framework for damage identification of steel truss bridges under joint uncertainties[J]. *Advances in Civil Engineering*, 2013, **2013**: 307171. doi: 10.1155/2013/307171.

[59] WANG Jia, Katafygiotis L S. Reliability-based optimal design of linear structures subjected to stochastic excitations[J]. *Structural Safety*, 2014, **47**(2): 29-38.

[60] Beck J L, Zuev K M. Asymptotically independent Markov sampling: a new Markov chain Monte Carlo scheme for Bayesian inference[J]. *International Journal for Uncertainty Quan-*

tification, 2013, **3**(5): 445-474.

[61] CHEUNG Sai-hung, Beck J L. Bayesian model updating using hybrid Monte Carlo simulation with application to structural dynamic models with many uncertain parameters[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2009, **135**(4): 243-255.

[62] Green P L. Bayesian system identification of a nonlinear dynamical system using a novel variant of simulated annealing[J]. *Mechanical Systems & Signal Processing*, 2015, **52/53**: 133-146.

[63] Green P L, Cross E J, Worden K. Bayesian system identification of dynamical systems using highly informative training data[J]. *Mechanical Systems & Signal Processing*, 2015, **56/57**: 109-122.

[64] Marin J M, Pudlo P, Robert C P, et al. Approximate Bayesian computational methods[J]. *Statistics & Computing*, 2012, **22**(6): 1167-1180.

[65] Chiachio M, Beck J L, Chiachio J, et al. Approximate Bayesian computation by subset simulation[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2014, **36**(3): A1339-A1338.

[66] Vakilzadeh M K, Huang Y, Beck J L, et al. Approximate Bayesian computation by subset simulation using hierarchical state-space models[J]. *Mechanical Systems & Signal Processing*, 2017, **84**(B): 2-20.

[67] AU Siu-kui, Beck J L. Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2001, **16**(4): 263-277.

[68] Straub D, Papaioannou I. Bayesian updating with structural reliability methods[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2014, **141**(3): 04014134.

[69] DiazDelaO F A, Garbuno-Inigo A, Au S K, et al. Bayesian updating and model class selection with subset simulation[Z]. arXiv preprint arXiv: 1510.06989, 2015.

[70] LAM Heung-fai, YANG Jia-hua, AU Siu-kui. Bayesian model updating of a coupled-slab system using field test data utilizing an enhanced Markov chain Monte Carlo simulation algorithm [J]. *Engineering Structures*, 2015, **102**: 144-155.

[71] SUN Hao, Büyüköztürk O. Probabilistic updating of building models using incomplete modal data[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2016, **75**: 27-40.

[72] ZHANG Jian, WAN Chun-feng, Sato T. Advanced Markov chain Monte Carlo approach for finite element calibration under uncertainty[J]. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 2013, **28**(7): 522-530.

[73] Simoen E, De Roeck G, Lombaert G. Dealing with uncertainty in model updating for damage assessment: a review[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2015, **56/57**: 123-149.

[74] Collins J D, Hart G C, Haselman T K, et al. Statistical identification of structures[J]. *Aiaa Journal*, 1973, **12**(2): 185-190.

[75] Sohn H, Law K H. A Bayesian probabilistic damage detection using load-dependent Ritz vectors[C]//*Proceedings of the 16th International Modal Analysis Conference*. Santa Barbara, California : Society for Experimental Mechanics, Inc, 1998: 374-380.

[76] Sohn H, Law K H. Bayesian probabilistic damage detection of a reinforced-concrete bridge column[J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2000, **29**(8): 1131-1152.

[77] Vanik M W. A Bayesian probabilistic approach to structural health monitoring: technical report EERL 97-07[R]. Earthquake Engineering Research Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, CA, 1997.

[78] YUEN Ka-veng, AU Siu-kui, Beck J L. Two-stage structural health monitoring approach for

phase I benchmark studies[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2004, **130**(1):16-33.

[79] YUEN Ka-veng, Katafygiotis L S. Model updating using response measurements without knowledge of the input spectrum[J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2005, **34**(2): 167-187.

[80] YUEN Ka-veng, Katafygiotis L S. Substructure identification and health monitoring using response measurement only[J]. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 2006, **21**(4): 280-291.

[81] YAN Wang-ji, Katafygiotis L S. Application of transmissibility matrix and random matrix to Bayesian system identification with response measurements only[J]. *Smart Materials and Structures*, 2016, **25**(10): 105017.

[82] Ebrahimian H, Astroza R, Conte J P, et al. Nonlinear finite element model updating for damage identification of civil structures using batch Bayesian estimation[J]. *Mechanical Systems & Signal Processing*, 2017, **84**(B): 194-222.

[83] 易伟建，周云，李浩. 基于贝叶斯统计推断的框架结构损伤诊断研究[J]. 工程力学，2009，**26**(5): 121-129.(YI Wei-jian, ZHOU Yun, LI Hao. Damage assessment research on frame structure based on Bayesian statistical inference[J]. *Engineering Mechanics*, 2009, **26**(5): 121-129.(in Chinese))

[84] Lam H F, Yin T. Statistical detection of multiple cracks on thin plates utilizing dynamic response[J]. *Engineering Structures*, 2010, **32**(10): 3145-3152.

[85] Lam H F, Lee Y Y, Sun H Y, et al. Application of the spatial wavelet transform and Bayesian approach to the crack detection of a partially obstructed beam[J]. *Thin-Walled Structures*, 2005, **43**(1): 1-21.

[86] Lam H F, Ng C T, Veidt M. Experimental characterization of multiple cracks in a cantilever beam utilizing transient vibration data following a probabilistic approach[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, **305**(1): 34-49.

[87] Lam H F, Wong M T, Yang Y B. A feasibility study on railway ballast damage detection utilizing measured vibration of in situ concrete sleeper[J]. *Engineering Structures*, 2012, **45**: 284-298.

[88] Ng C T, Veidt M, Lam H F. Guided wave damage characterisation in beams utilising probabilistic optimisation[J]. *Engineering Structures*, 2009, **31**(12): 2842-2850.

[89] Flynn E B, Todd M D, Wilcox P D, et al. Maximum-likelihood estimation of damage location in guided-wave structural health monitoring[J]. *Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2011, **467**(2133): 2575-2596.

[90] YUEN Ka-veng. Recent developments of Bayesian model class selection and applications in civil engineering[J]. *Structural Safety*, 2010, **32**(5): 338-346.

[91] Beck J L, YUEN Ka-veng. Model selection using response measurements: Bayesian probabilistic approach[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2004, **130**(2): 192-203.

[92] CHEUNG Sai-hung, Beck J L. Calculation of posterior probabilities for Bayesian model class assessment and averaging from posterior samples based on dynamic system data[J]. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 2010, **25**(5): 304-321.

[93] Papadimitriou C. Pareto optimal sensor locations for structural identification[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, **194**(12): 1655-1673.

[94] YUEN Ka-veng, KUOK Sin-chi. Efficient Bayesian sensor placement algorithm for structural identification: a general approach for multi-type sensory systems[J]. *Earthquake Engineering*

& Structural Dynamics, 2015, **44**(5): 757-774.

[95] SUN Hao, FENG Dong-ming, LIU Yang, et al. Statistical regularization for identification of structural parameters and external loadings using state space models[J]. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 2015, **30**(11): 843-858.

[96] Simoen E, Papadimitriou C, Lombaert G. On prediction error correlation in Bayesian model updating[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, **332**(18): 4136-4152.

Uncertainty Quantification for System Identification Utilizing the Bayesian Theory and Its Recent Advances

YAN Wang-ji, CAO Shi-ze, REN Wei-xin

(*School of Civil Engineering*, *Hefei University of Technology*, *Hefei* 230009, *P.R.China*)

(Contributed by REN Wei-xin, M. AMM Editorial Board)

Abstract: System identification is inevitably affected by various uncertainties involving measurement error, modeling error, numerical error as well as environmental variation, which indicates that it is of fundamental importance to explore statistical methods to improve the robustness in identification. The Bayesian approach has attracted widespread attention in the field of system identification due to a number of advantages. On the basis of the classic Bayesian theory, this paper systematically outlined the progress of the Bayesian system identification in the context of structural dynamics. In this study, the theoretical framework for the Bayesian system identification with special emphasis on applicable conditions and the limits on the two kinds of uncertainty quantification approaches were presented. In addition, this paper reviewed some theory, implementation and practice of the Bayesian approaches applied to uncertainty quantification for modal analysis, model updating and damage detection. Finally, the trends and challenges of the Bayesian system identification were prospected.

Key words: Bayesian theory; system identification; uncertainty; modal parameter; model updating

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (51408176; 51278163); The National Key Research and Development Project of China (2016YFE0113400)

引用本文/Cite this paper:

颜王吉, 曹诗泽, 任伟新. 结构系统识别不确定性分析的 Bayes 方法及其进展[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(1): 44-59.

YAN Wang-ji, CAO Shi-ze, REN Wei-xin. Uncertainty quantification for system identification utilizing the Bayesian theory and its recent advances[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(1): 44-59.