

# 一维正交准晶中具有四条裂纹的椭圆孔口问题的解析解\*

高媛媛, 刘官厅

(内蒙古师范大学 数学科学学院, 呼和浩特 010022)

**摘要:** 运用广义复变函数方法,通过构造适当的广义保角映射,研究了一维正交准晶中具有四条裂纹的椭圆孔口的平面弹性问题.通过引入应力函数,把平面弹性问题的基本方程简化为一个四阶偏微分方程,从而给出了各个应力分量在像平面的复表示,求得了裂纹尖端的应力强度因子的解析解.当描述缺陷的各参数发生变化时,该文的结果不仅可以还原已有文献中的结论,还可给出多种常见缺陷构型的应力强度因子,为工程力学分析提供了理论依据.

**关键词:** 广义保角映射; 一维正交准晶; 具有四条裂纹的椭圆孔口; 应力强度因子

**中图分类号:** O346.1

**文献标志码:** A

**DOI:** 10.21656/1000-0887.390032

## 引言

准晶是三十多年前发现的一种新的凝聚态物质,由于其独特的原子结构而表现出高硬度、不黏性、耐腐蚀和耐磨损等许多优异性能,在航空航天、新能源、光学、声学、金属成型等工程技术领域有广泛的应用前景.其弹性问题的刻画不仅需要声子场还需要描述准周期排列的相位子场,是通过二者相互耦合作用的.自发现准晶以来,国内外许多学者都投入到准晶的研究之中,取得若干重要成果<sup>[1-8]</sup>.由于一维六方准晶结构对称性较强,独立的弹性常数较少,许多研究者将其作为研究的首选对象,取得了丰富的研究成果.文献[9-12]运用复变函数方法和保角映射技术研究了具有两条或三条不对称裂纹的圆形孔口问题;文献[13]研究了裂纹与位错的相互作用,给出了裂纹尖端的应力强度因子和作用在位错上的力的解析解;文献[14]考虑了一维六方准晶中运动裂纹的问题;文献[15]利用复变函数法,讨论了一维六方准晶非周期平面的两类周期接触问题.

一维正交准晶较一维六方准晶更具有普遍性,它的非零独立弹性常数比一维六方准晶多一些,导致准晶弹性与缺陷问题的研究更为复杂.文献[16]研究了一维正交准晶板中的弯曲问题;文献[17]采用拟 Stroh 形式研究了由一维正交准晶和准晶组成的多层功能梯度板受到表面载荷作用下的精确解;文献[18]研究了多层一维正交准晶板的精确闭合解;文献[19]引入四种势函数,得到了具有压电效应的一维正交准晶的楔形问题和半平面问题的一般解;文献

\* 收稿日期: 2018-01-22; 修订日期: 2018-06-24

**基金项目:** 国家重点研发计划(2017YFC1405605);内蒙古自然科学基金(2018MS01005);内蒙古自治区研究生教育创新计划(CXJJS18069)

**作者简介:** 高媛媛(1993—),女,硕士生(E-mail: 1223729636@qq.com);

刘官厅(1966—),男,教授,博士生导师(通讯作者. E-mail: guantingliu@imnu.cn).

[20-21]利用广义复变方法,通过构造广义保角映射,研究了一维正交准晶中的椭圆孔口和半无限裂纹问题.带四条裂纹的椭圆孔口是断裂力学中一个典型的缺陷,存在于各种材料和铸件中,对于它的研究具有广泛的应用价值,在分析工程断裂问题中更具有重要的意义.在文献[20-21]的基础上,本文研究了一维正交准晶中带四条裂纹的椭圆孔口的断裂力学问题,得到了裂纹尖端点的应力强度因子的解析解,分析了缺陷各参数的变化情况.

## 1 基本理论

在点群  $mm2$  一维正交准晶材料中,设  $x_3$  轴方向为准周期方向,  $x_i (i = 1, 2)$  轴方向为周期方向,当材料的缺陷沿着准周期方向  $x_3$  穿透时,根据材料的几何对称性,材料的物理性质是不随准周期方向改变的,即在广义 Hooke 定律、几何方程和弹性平衡方程这三套基本方程中有

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_3} = 0. \quad (1)$$

将式(1)分别代入三套基本方程中,可以得到两个相互独立的问题.其中一个问题类似于二维正交准晶的平面弹性问题,可以用经典弹性理论的方法求解,这里不再讨论.另一个问题为

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = 2C_{44}\varepsilon_{23} + R_4\omega_2, \quad (2)$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = 2C_{55}\varepsilon_{31} + R_5\omega_1, \quad (3)$$

$$H_1 = 2R_5\varepsilon_{31} + K_1\omega_1, \quad H_2 = 2R_4\varepsilon_{23} + K_2\omega_2, \quad (4)$$

$$\varepsilon_{3j} = \frac{1}{2} \partial_j u_3, \quad \omega_j = \partial_j v, \quad j = 1, 2, \quad (5)$$

$$\partial_1 \sigma_{31} + \partial_2 \sigma_{32} = 0, \quad \partial_1 H_1 + \partial_2 H_2 = 0. \quad (6)$$

该问题是声子场与相位子场耦合的反平面问题.

由文献[20]引入新的应力势函数  $U(x_1, x_2)$  和  $V(x_1, x_2)$ , 使

$$\sigma_{31} = \partial_2 U, \quad \sigma_{23} = -\partial_1 U, \quad H_1 = \partial_2 V, \quad H_2 = -\partial_1 V, \quad (7)$$

则平衡方程(6)自动满足.

将式(2)~(4)变形为

$$\begin{cases} \varepsilon_{31} = a_1 \sigma_{31} - a_2 H_1, & \varepsilon_{23} = a_3 \sigma_{23} - a_4 H_2, \\ \omega_1 = -2a_2 \sigma_{31} - a_5 H_1, & \omega_2 = -2a_4 \sigma_{23} - a_6 H_2, \end{cases} \quad (8)$$

其中

$$\begin{cases} a_1 = \frac{K_1}{2C_{55}K_1 - 2R_5^2}, & a_2 = \frac{R_5}{2C_{55}K_1 - 2R_5^2}, & a_3 = \frac{K_2}{2C_{44}K_2 - 2R_4^2}, \\ a_4 = \frac{R_4}{2C_{44}K_2 - 2R_4^2}, & a_5 = \frac{C_{55}}{R_5^2 - K_1C_{55}}, & a_6 = \frac{C_{44}}{R_4^2 - K_2C_{44}}. \end{cases}$$

由式(5)得  $x_1 O x_2$  平面内的变形协调方程为

$$\partial_2 \varepsilon_{31} - \partial_1 \varepsilon_{23} = 0, \quad \partial_2 \omega_1 - \partial_1 \omega_2 = 0. \quad (9)$$

用应力势函数表示方程(9),得

$$L_1 U - L_2 V = 0, \quad 2L_2 U + L_3 V = 0. \quad (10)$$

方程(10)消去  $V(x_1, x_2)$  后,得到问题的最终控制方程为一个四阶偏微分方程:

$$(L_1 L_3 + 2L_2^2) U = 0, \quad (11)$$

其中

$$L_1 = a_1 \partial_2^2 + a_3 \partial_1^2, L_2 = a_2 \partial_2^2 + a_4 \partial_1^2, L_3 = a_5 \partial_2^2 + a_6 \partial_1^2.$$

由文献[22],方程(11)的解可用两个广义解析函数  $\psi_k(z_k)$  ( $k=1,2$ ) 表示为

$$U(x_1, x_2) = 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \psi_k(z_k), z_k = x_1 + \mu_k x_2; \quad (12)$$

方程(11)的特征方程为

$$(a_1 a_5 + 2a_2^2) \mu^4 + (a_1 a_6 + a_3 a_5 + 4a_2 a_4) \mu^2 + (a_3 a_6 + 2a_4^2) = 0, \quad (13)$$

其中  $\text{Re}$  表示取相应复变量的实部,  $\mu_k = \alpha_k + i\beta_k$  ( $k=1,2$ ) 是特征方程(13)的特征根,  $\alpha_k$  和  $\beta_k$  是依赖于 mm2 一维正交准晶各弹性常数的实常数. 如果特征根为重根, 即  $\mu_1 = \mu_2$ , 则式(12)可以进一步简化, 可用经典弹性的复变方法求解上述问题.

由方程(10)得

$$V(x_1, x_2) = 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \eta_k \psi_k(z_k), \eta_k = \frac{a_2 \mu_k^2 + a_4}{a_1 \mu_k^2 + a_3}. \quad (14)$$

将式(12)和(14)代入式(7), 得到声子场与相位子场各应力分量复表示为

$$\begin{cases} \sigma_{31} = 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k \psi'_k(z_k), \\ \sigma_{23} = -2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \psi'_k(z_k), \\ H_1 = 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \eta_k \mu_k \psi'_k(z_k), \\ H_2 = -2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \eta_k \psi'_k(z_k); \end{cases} \quad (15)$$

边界条件的复表示为

$$U = - \int_s T_p ds, V = - \int_s T_h ds, \quad (16)$$

其中  $T_p$  表示作用于声子场边界上的面力,  $T_h$  表示作用于相位子场空间的广义力,  $s$  为边界曲线的积分路径,  $ds$  为弧微分.

## 2 一维正交准晶中带四条裂纹的椭圆孔口的平面弹性问题

假设在点群 mm2 一维正交准晶中, 沿准周期  $x_3$  方向有一个穿透性的带有四条不对称裂纹的椭圆孔口, 在无穷远处该准晶体受到沿准周期方向的剪切力  $p$ , 考虑的构型如图 1 所示.

问题的边界条件为

$$z \rightarrow \infty: \sigma_{31}(z) = 0, \sigma_{23}(z) = p, \quad (17)$$

$$z = t \in L: T_p(t) = 0; \quad (18)$$

垂直于声子场和相位子场的应力边界条件为

$$z \rightarrow \infty: H_1(z) = H_2(z) = 0, \quad (19)$$

$$z = t \in L: T_h(t) = 0, \quad (20)$$

$L$  为带有四条不对称裂纹的椭圆孔口的边界, 求解上述边值问题.

### 2.1 广义保角映射和广义解析函数求解

图 1 所示构型的区域  $\Omega$  中,  $\psi_k(z_k)$  是广义解析的, 那么  $\psi_k(z_k)$  的 Laurent 展式为

$$\psi_k(z_k) = c_k z_k + \sum_{j=2}^{+\infty} c_k^{(j)} z_k^j + \psi_k^{(0)}(z_k), \quad (21)$$

其中  $\psi_k^{(0)}(z_k) = a_{k0} + \sum_{j=1}^{+\infty} a_{kj} z_k^{-j}$ ,  $c_k, c_k^{(j)}$  和  $a_{kj}$  是待定的复常数.

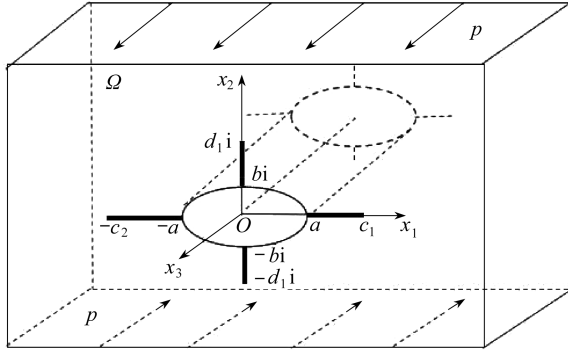


图 1 一维正交准晶中带有四条不对称裂纹的椭圆孔口

Fig. 1 Four cracks originating from an elliptical hole embedded in 1D orthorhombic QCs

将  $\psi_k(z_k)$  代入方程(15),再由条件(17)和(19)得:由于  $z_k \rightarrow \infty$  时,

$$c_k^{(j)} = 0, z_k^{-j} = 0, \quad k = 1, 2, j = 2, 3, \dots,$$

故

$$\begin{cases} 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k c_k = 0, \\ -2\text{Re} \sum_{k=1}^2 c_k = p, \\ 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \eta_k \mu_k c_k = 0, \\ -2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \eta_k c_k = 0, \end{cases} \quad (22)$$

4个独立方程中有4个实常数  $\text{Re} c_k, \text{Im} c_k, k = 1, 2$ , 故可解得  $c_k$ .

将  $\psi_k(z_k)$  代入方程(16),再由条件(18)和(20)得

$$\sum_{k=1}^2 [\psi_k^{(0)}(z_k) + \overline{\psi_k^{(0)}(z_k)}] = - \sum_{k=1}^2 [c_k z_k + \overline{c_k z_k}], \quad (23)$$

$$\sum_{k=1}^2 [\eta_k \psi_k^{(0)}(z_k) + \overline{\eta_k \psi_k^{(0)}(z_k)}] = - \sum_{k=1}^2 [\eta_k c_k z_k + \overline{\eta_k c_k z_k}], \quad (24)$$

其中  $z_k$  取  $L$  的边界值,  $(\bar{\cdot})$  表示复共轭.

构造如下广义保角映射:

$$z_k = \omega_k(\zeta_k) = \frac{a\sqrt{h(\zeta_k)} + i\mu_k b\sqrt{h(\zeta_k)} - 16\zeta_k^2}{4\zeta_k}, \quad (25)$$

其中

$$h(\zeta_k) = -16g_3^2 \zeta_k^2 + [\sqrt{g_2^2 + g_3^2}(\zeta_k - 1)^2 + \sqrt{g_1^2 + g_3^2}(\zeta_k + 1)^2]^2, \quad (26)$$

$$g_1 = \frac{e_1^2 + 1}{2e_1}, g_2 = \frac{e_2^2 + 1}{2e_2}, g_3 = \frac{f_1^2 - 1}{2f_1}, \quad (27)$$

$$e_1 = \frac{c_1 + \sqrt{c_1^2 - a^2 + b^2}}{a + b}, e_2 = \frac{c_2 + \sqrt{c_2^2 - a^2 + b^2}}{a + b}, f_1 = \frac{d_1 + \sqrt{d_1^2 + a^2 - b^2}}{a + b}. \quad (28)$$

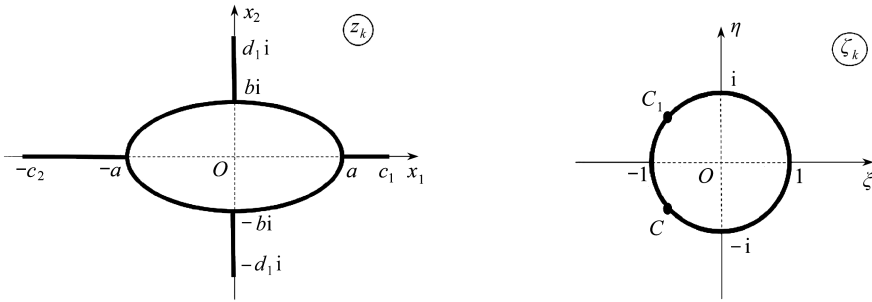


图2 带四条裂纹的椭圆孔口外部到单位圆内部的保角映射

Fig. 2 Conformal mapping from the outer region of an elliptical hole with 4 edge cracks to the inside of a unit circle

将  $\zeta_k$  平面的单位圆内部映射到  $z_k$  平面内的区域  $\Omega_k$ , 且  $\omega_k^{-1}(c_1) \rightarrow 1, \omega_k^{-1}(-c_2) \rightarrow -1, \omega_k^{-1}(d_1 i) \rightarrow C, \omega_k^{-1}(-d_1 i) \rightarrow C_1$ , 如图2所示. 记单位圆边界为  $r$ , 取  $\zeta_k = \sigma = e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ , 则  $\Omega_k$  上两个点被映射到单位圆上一个点, 用  $\Phi_k^{(0)}(\zeta_k)$  表示  $\psi_k^{(0)}(z_k)$  被映射后的函数.

则式(23)和(24)可写为

$$\sum_{k=1}^2 [\Phi_k^{(0)}(\sigma) + \overline{\Phi_k^{(0)}(\sigma)}] = \frac{ap}{4} \cdot \frac{\sqrt{h(\sigma)}}{\sigma}, \quad (29)$$

$$\sum_{k=1}^2 [\eta_k \Phi_k^{(0)}(\sigma) + \overline{\eta_k \Phi_k^{(0)}(\sigma)}] = 0. \quad (30)$$

对式(29)和(30)两边同时乘以  $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta_k}$ ,  $\zeta_k$  为单位圆内任意一点, 然后沿边界  $r$  积分,

由 Cauchy(柯西)积分定理, 得

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{\Phi_k^{(0)}(\sigma)}{\sigma - \zeta_k} d\sigma = \Phi_k^{(0)}(\zeta_k), \\ \frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{\overline{\Phi_k^{(0)}(\sigma)}}{\sigma - \zeta_k} d\sigma = 0, \\ \frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{\sqrt{h(\sigma)}}{\sigma(\sigma - \zeta_k)} d\sigma = \frac{\sqrt{h(\zeta_k)}}{\zeta_k} - \frac{\sqrt{g_1^2 + g_3^2} + \sqrt{g_2^2 + g_3^2}}{\zeta_k}, \end{cases} \quad (31)$$

可解得

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^2 \Phi_k^{(0)}(\zeta_k) = \frac{ap}{4} \frac{\sqrt{h(\zeta_k)} - \sqrt{g_1^2 + g_3^2} - \sqrt{g_2^2 + g_3^2}}{\zeta_k}, \\ \sum_{k=1}^2 \eta_k \Phi_k^{(0)}(\zeta_k) = 0. \end{cases} \quad (32)$$

解方程组(32)得

$$\Phi_k^{(0)}(\zeta_k) = \frac{ap}{4} \left[ \frac{\sqrt{h(\zeta_k)} - \sqrt{g_1^2 + g_3^2} - \sqrt{g_2^2 + g_3^2}}{\zeta_k} \right] \Lambda_k, \quad (33)$$

其中 
$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\eta_1 - \eta_2} \begin{pmatrix} \eta_2 \\ -\eta_1 \end{pmatrix}.$$

## 2.2 应力场的复表示

由式(21)得

$$\psi'_k(z_k) = c_k + \frac{\Phi'_k{}^{(0)}(\zeta_k)}{\omega'_k(\zeta_k)} = c_k + B(\zeta_k). \quad (34)$$

记  $B(\zeta_k) = \frac{\Phi'_k{}^{(0)}(\zeta_k)}{\omega'_k(\zeta_k)}$ , 且由式(25)和(33)计算得

$$\Phi'_k{}^{(0)}(\zeta_k) = \left[ \frac{(\sqrt{h(\zeta_k)})' \zeta_k - \sqrt{h(\zeta_k)} + \sqrt{g_1^2 + g_3^2} + \sqrt{g_2^2 + g_3^2}}{(\zeta_k)^2} \right] \frac{ap}{4} \Lambda_k, \quad (35)$$

$$\omega'_k(\zeta_k) = \frac{(ib\mu\sqrt{h(\zeta_k)} + a\sqrt{h(\zeta_k)} - 16\zeta^2)(\zeta_k h'(\zeta_k) - 2h(\zeta_k))}{8\zeta_k^2 \sqrt{h(\zeta_k)} \sqrt{h(\zeta_k)} - 16\zeta_k^2}, \quad (36)$$

其中

$$\begin{aligned} h(\zeta_k) &= -16g_3^2\zeta_k^2 + [\sqrt{g_2^2 + g_3^2}(\zeta_k - 1)^2 + \sqrt{g_1^2 + g_3^2}(\zeta_k + 1)^2]^2, \\ (\sqrt{h(\zeta_k)})' &= 2\{ (1 + \zeta_k)^3 g_1^2 + (\zeta_k - 1)[(\zeta_k - 1)^2 g_2^2 + 2\zeta_k(1 + \zeta_k)(g_3^2 + \sqrt{g_1^2 + g_3^2}\sqrt{g_2^2 + g_3^2})] \} \div \\ &\quad \sqrt{-16g_3^2\zeta_k^2 + [\sqrt{g_2^2 + g_3^2}(\zeta_k - 1)^2 + \sqrt{g_1^2 + g_3^2}(\zeta_k + 1)^2]^2}. \end{aligned}$$

将式(34)代入式(15), 可得

$$\begin{cases} \sigma_{31} = 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k [c_k + B(\zeta_k)], \\ \sigma_{23} = -2\text{Re} \sum_{k=1}^2 [c_k + B(\zeta_k)], \\ H_1 = 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \eta_k \mu_k [c_k + B(\zeta_k)], \\ H_2 = -2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \eta_k [c_k + B(\zeta_k)]. \end{cases} \quad (37)$$

式(37)为点群 mm2 一维正交准晶弹性场的应力分量的复表示.

## 2.3 应力强度因子

根据文献[23], 可定义裂纹尖端点  $z = c_1$  处的声子场 III 型应力强度因子如下:

$$K_{\text{III}}^\sigma = \lim_{x_1 \rightarrow a} \sqrt{2\pi(x_1 - a)} \sigma_{23}. \quad (38)$$

将式(37)代入式(38), 经适当的计算, 可得尖端点  $z = c_1$  处的声子场 III 型应力强度因子为

$$K_{\text{III}}^\sigma = 2\sqrt{\pi} \lim_{\zeta_k \rightarrow 1} \sum_{k=1}^2 \frac{\Phi'_k{}^{(0)}(\zeta_k)}{\sqrt{\omega''_k(\zeta_k)}} = \frac{ap\sqrt{\pi}}{2} K, \quad (39)$$

其中

$$K = \frac{\sqrt{2g_1^2(g_1^2 - 1)} (\sqrt{g_1^2 + g_3^2} + \sqrt{g_2^2 + g_3^2})}{\sqrt{(bg_1^2\sqrt{g_1^2 - 1} + ag_1(g_1^2 - 1)) [g_1^2 + g_3^2 + \sqrt{(g_1^2 + g_3^2)(g_2^2 + g_3^2)}}}.$$

### 3 讨论与结果

当几何参数取极限时,可以得到一些特殊构型的应力强度因子的解析解,具体讨论如下.

**情形 1** 当  $c_2 \rightarrow a$  时,此时  $g_2 \rightarrow 1$ , 构型为具有三条裂纹的椭圆孔口,如图 3 所示.由式 (39)可知,在裂纹尖端点  $z = c_1$  处的应力强度因子为

$$K_{\text{III}}^{\sigma} = \frac{ap\sqrt{\pi}}{2} \frac{g_1\sqrt{2(g_1^2-1)}(\sqrt{1+g_3^2}+\sqrt{g_1^2+g_3^2})}{\sqrt{(bg_1^2\sqrt{g_1^2-1}+ag_1(g_1^2-1))[g_1^2+g_3^2+\sqrt{(1+g_3^2)(g_1^2+g_3^2)}}]} \quad (40)$$

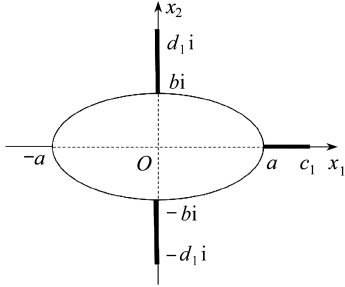


图 3 具有三条裂纹的椭圆孔口

Fig. 3 An elliptical hole with 3 edge cracks

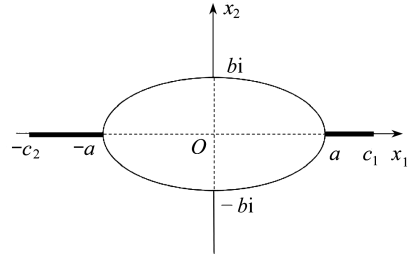


图 4 非对称共线双裂纹的椭圆孔口

Fig. 4 An elliptical hole with 2 unequal edge cracks

**情形 2** 当  $d_1 \rightarrow b$  时,此时  $g_3 \rightarrow 0$ , 构型为具有非对称共线双裂纹的椭圆孔口,如图 4 所示.由式 (39)可知,在裂纹尖端点  $z = c_1$  处的应力强度因子为

$$K_{\text{III}}^{\sigma} = \frac{ap\sqrt{\pi}}{2} \frac{g_1(g_1+g_2)\sqrt{2(g_1^2-1)}}{\sqrt{[bg_1^2\sqrt{g_1^2-1}+ag_1(g_1^2-1)](g_1^2+g_1g_2)}} \quad (41)$$

① 当  $c_2 \rightarrow c_1$  时,构型为对称共线双裂纹的椭圆孔口,如图 5 所示.由式 (39)可知,在裂纹尖端点  $z = c_1$  处的应力强度因子为

$$K_{\text{III}}^{\sigma} = \frac{ap\sqrt{\pi}g_1\sqrt{g_1^2-1}}{\sqrt{bg_1^2\sqrt{g_1^2-1}+ag_1(g_1^2-1)}} \quad (42)$$

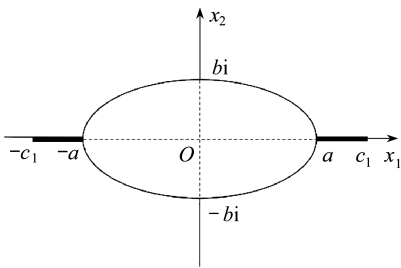


图 5 对称共线双裂纹的椭圆孔口

Fig. 5 An elliptical hole with 2 equal edge cracks

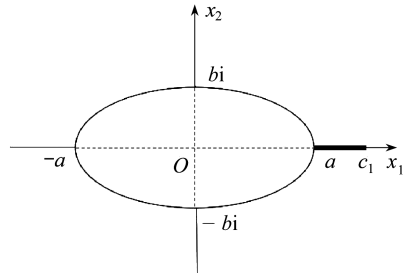


图 6 带单裂纹的椭圆孔口

Fig. 6 An elliptical hole with an edge crack

② 当  $c_2 \rightarrow a$  时,构型为带单裂纹的椭圆孔口,如图 6 所示.由式 (39)可知,在裂纹尖端点  $z = c_1$  处的应力强度因子为

$$K_{\text{III}}^{\sigma} = \frac{ap\sqrt{\pi}\sqrt{g_1^2 - g_1}(g_1 + 1)}{\sqrt{2[bg_1^2\sqrt{g_1^2 - 1} + ag_1(g_1^2 - 1)]}}. \quad (43)$$

③ 当  $a \rightarrow b$  时, 构型为具有非对称双裂纹的圆形孔口, 如图 7 所示. 由式 (39) 可知, 在裂纹尖端点  $z = c_1$  处的应力强度因子为

$$K_{\text{III}}^{\sigma} = \frac{bp\sqrt{\pi}g_1(g_1 + g_2)\sqrt{g_1^2 - 1}}{\sqrt{2b[g_1^2\sqrt{g_1^2 - 1} + g_1(g_1^2 - 1)](g_1^2 + g_1g_2)}}. \quad (44)$$

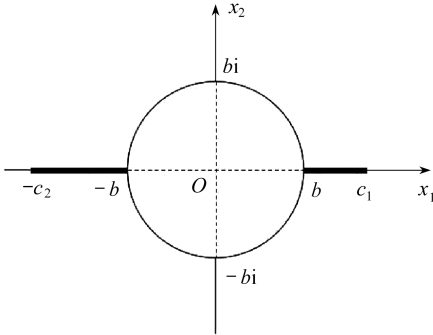


图 7 非对称双裂纹的圆形孔口

Fig. 7 An circular hole with 2 unequal edge cracks

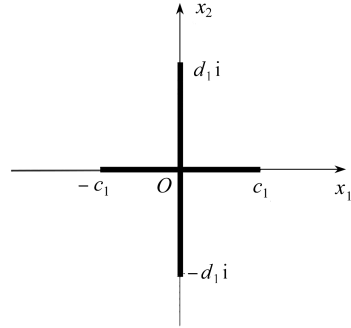


图 8 对称十字型裂纹

Fig. 8 Symmetrical cross cracks

**情形 3** 当  $b \rightarrow 0, c_2 \rightarrow c_1$  时, 构型为对称十字型裂纹, 如图 8 所示. 由式 (39) 可知, 在裂纹尖端点  $z = c_1$  处的应力强度因子为

$$K_{\text{III}}^{\sigma} = p\sqrt{\pi c_1}. \quad (45)$$

特别地, 当  $b \rightarrow 0, c_2 \rightarrow c_1, d_1 \rightarrow 0$  时, 得一维正交准晶中 Griffith 裂纹在裂纹尖端的应力强度因子的解析解为

$$K_{\text{III}}^{\sigma} = p\sqrt{\pi c_1}. \quad (46)$$

该结果表明, 具有十字型对称裂纹的一维正交准晶, 在无穷远处沿准周期方向受剪切力时, 垂直的裂纹不影响水平裂纹尖端的应力强度因子, 其结果与 Griffith 裂纹情况相同.

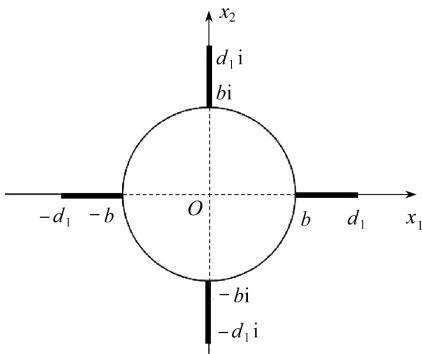


图 9 带四条裂纹的圆形孔口

Fig. 9 A circular hole with 4 edge cracks

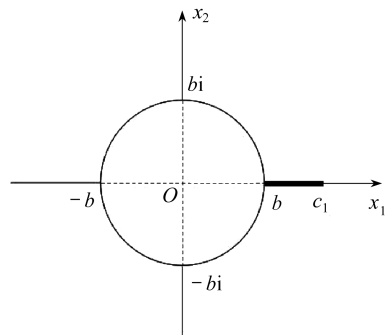


图 10 带单裂纹的圆形孔口

Fig. 10 A circular hole with an edge crack

**情形 4** 当  $a \rightarrow b, c_2 \rightarrow d_1, c_1 \rightarrow d_1$  时, 构型为具有四条对称裂纹的圆形孔口, 如图 9 所示. 由式 (39) 可知, 在裂纹尖端点  $z = c_1$  处的应力强度因子为



$$K_{\text{III}}^{\sigma} = \frac{p\sqrt{\pi}(b^2 - d_1^2)\sqrt{b^2 + d_1^2}}{\sqrt{2d_1\left[(b^2 - d_1^2)^2 + bd_1\sqrt{2 - \frac{b^4 + d_1^4}{b^2d_1^2}}(b^2 + d_1^2)\right]}}. \quad (47)$$

当  $a \rightarrow b, d_1 \rightarrow b, c_2 \rightarrow b$  时, 构型为带单裂纹的圆形孔口, 如图 10 所示. 由式 (39) 可知, 在裂纹尖端点  $z = c_1$  处的应力强度因子为

$$K_{\text{III}}^{\sigma} = \frac{p\sqrt{\pi}(b + c_1)^2(b - c_1)}{2\sqrt{c_1\left[(b^2 - c_1^2)^2 + bc_1\sqrt{2 - \frac{b^4 + c_1^4}{b^2c_1^2}}(b^2 + c_1^2)\right]}}. \quad (48)$$

## 4 数值分析

为了研究一维正交准晶材料的断裂行为, 选取准晶材料 Al-Ni-Co, 讨论裂纹构型的几何参数和剪切力对应力强度因子的影响, 其材料常数如下:

$$C_{11} = C_{22} = 2.3433 \times 10^{11} \text{ N/m}^2,$$

$$C_{12} = 5.741 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, C_{13} = C_{23} = 6.663 \times 10^{10} \text{ N/m}^2,$$

$$C_{33} = 2.3222 \times 10^{11} \text{ N/m}^2, C_{44} = C_{55} = 7.019 \times 10^{10} \text{ N/m}^2,$$

$$C_{66} = \frac{C_{11} - C_{22}}{2} = 8.846 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 8.846 \times 10^9 \text{ N/m}^2,$$

$$K_1 = K_2 = 1.22 \times 10^9 \text{ N/m}^2, K_3 = 2.4 \times 10^8 \text{ N/m}^2.$$

将其材料常数代入特征方程 (13) 中, 求解出的特征根  $\mu = \pm i$ , 取  $\mu = i$  代入式 (39), 同时固定剪切力 (假设  $p = 1$ ). 图 11~13 分别给出了在相同的剪切力作用下, 几何参数对椭圆孔口右裂纹尖端  $z = c_1$  的应力强度因子的影响. 给定椭圆孔不同形状  $a$  和  $b$  的值, 图 11 给出了相同右裂纹长度  $L_1 = c_1 - a = 1 \text{ cm}$  和上下两条裂纹长度  $L_2 = d_1 - b = 1.5 \text{ cm}$  的情形时, 左裂纹不同长度端点坐标  $c_2$  对  $K_{\text{III}}$  的影响规律. 由图可知, 应力强度因子随着左裂纹长度的增加而增加, 同时当左裂纹长度也固定时, 应力强度因子随着椭圆孔长短半轴  $a$  和  $b$  的值增加而减小.

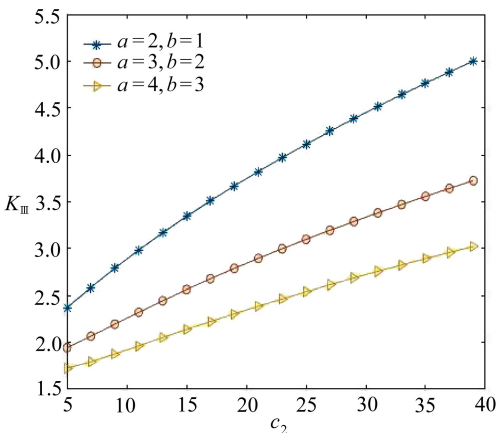


图 11 应力强度因子  $K_{\text{III}}$  随  $c_2$  的变化

Fig. 11 Variation of  $K_{\text{III}}$  with  $c_2$

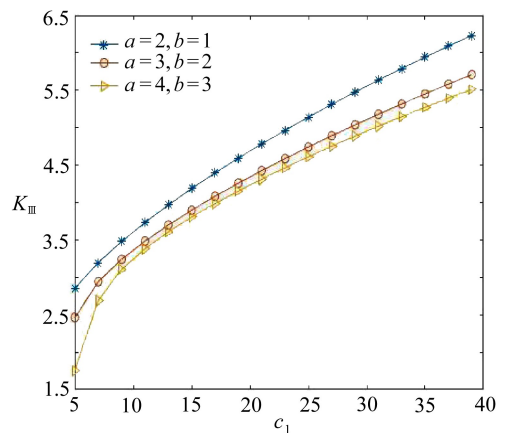


图 12 应力强度因子  $K_{\text{III}}$  随  $c_1$  的变化

Fig. 12 Variation of  $K_{\text{III}}$  with  $c_1$

图 12 给出了相同左裂纹长度  $L_3 = c_2 - a = 2 \text{ cm}$  和上下两条裂纹长度  $L_2 = 1.5 \text{ cm}$  的情形时,右裂纹不同长度端点坐标  $c_1$  对  $K_{III}$  的影响规律.由图可知,应力强度因子的变化趋势与图 11 相似,但  $a$  和  $b$  的值变化不大时,对  $K_{III}$  的影响不大.图 13 给出了相同左、右裂纹长度情形时 ( $L_3 = 2 \text{ cm}, L_1 = 1 \text{ cm}$ ),上下裂纹不同长度端点坐标  $d_1$  对  $K_{III}$  的影响规律.由图可知,变化曲线几乎呈水平趋势,说明上下裂纹的长度对右裂纹尖端  $z = c_1$  的应力强度因子影响不大.特别地,取  $b = d_1 = 0$  时,裂纹退化成经典的 Griffith 裂纹,其裂纹尖端的应力强度因子随裂纹长度的影响如图 14 所示,与最终式(46)表达图形相同,说明结果与经典弹性一样.

图 15 给出了当裂纹长度固定 ( $L_1 = 1 \text{ cm}, L_2 = 1.5 \text{ cm}, L_3 = 2 \text{ cm}$ ),椭圆孔口形状相同时,所受剪切力  $p$  对  $K_{III}$  的影响规律.由图可知,剪切力越大对裂纹尖端的应力强度因子影响越大,同时当椭圆孔形状比  $b/a$  越来越大时,应力强度因子反而降低.

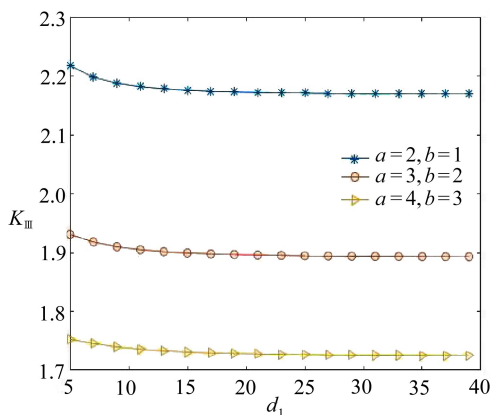


图 13 应力强度因子  $K_{III}$  随  $d_1$  的变化

Fig. 13 Variation of  $K_{III}$  with  $d_1$

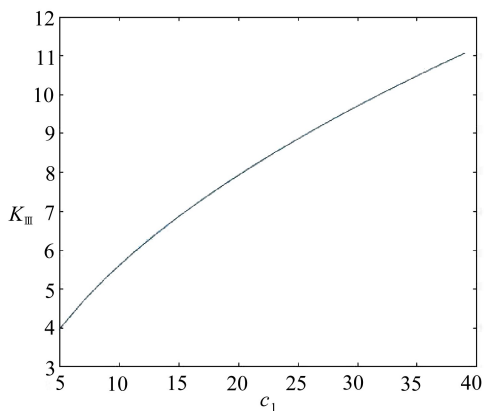


图 14 应力强度因子  $K_{III}$  随  $c_1$  的变化

Fig. 14 Variation of  $K_{III}$  with  $c_1$

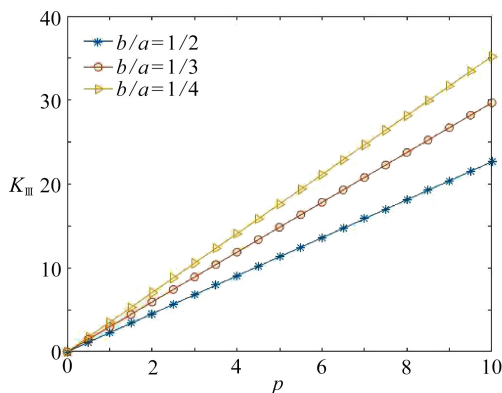


图 15 应力强度因子  $K_{III}$  随  $p$  的变化

Fig. 15 Variation of  $K_{III}$  with  $p$

## 5 总 结

本文研究了点群  $mm2$  一维正交准晶周期平面内的平面弹性问题,最终控制方程为四阶偏微分方程.采用广义复变函数方法,构造新的广义保角映射,将缺陷映射到单位圆内去求解广

义解析函数,从而求得应力场和应力强度因子的解析解.对于材料中带有四条裂纹的椭圆孔口构型,除了可以还原经典的 Griffith 裂纹外,还可以模拟其他实际问题,如对称的双裂纹椭圆孔口或圆孔口,三条裂纹的椭圆孔口,以及对称的十字型裂纹等平面问题,在断裂力学以及工程实践中具有重要的实际意义.

### 参考文献(References):

- [1] 丁棣华,王仁卉,杨文革,等.准晶的弹性、塑性与位错[J].物理学进展,1998,18(3):223-260.(DING Dihua, WANG Renhui, YANG Wenge, et al. Elasticity, plasticity and dislocations of quasicrystals[J]. *Progress in Physics*, 1998, 18(3): 223-260.(in Chinese))
- [2] FAN T Y. *Mathematical Theory of Elasticity of Quasicrystals and Its Applications*[M]. Beijing: Science Press, 2010.
- [3] 董闯.准晶材料[M].北京:国防工业出版社,1998.(DONG Chuang. *The Quasicrystal Material* [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1998.(in Chinese))
- [4] LIU G T, FAN T Y. Complex method of the plane elasticity in 2D quasicrystal with point group 10 mm tenfold rotational symmetry and hole problems[J]. *Science in China*, 2003, 46(3): 326-336.
- [5] 王仁卉,胡承正,桂嘉年.准晶物理学[M].北京:科学出版社,2004.(WANG Renhui, HU Chengzheng, GUI Jianian. *Quasicrystal Physics*[M]. Beijing: Science Press, 2004.(in Chinese))
- [6] ZHOU W M, FAN T Y. Contact problem in decagonal two-dimensional quasicrystal[J]. *Journal of Beijing Institute of Technology*, 2001, 10(1): 51-55.
- [7] WANG X, PAN E. Analytical solutions for some defect problems in 1D hexagonal and 2D octagonal quasicrystals[J]. *Pramana*, 2008, 70(5): 911-933.
- [8] 刘官厅.准晶弹性的复变方法与非线性方程的显式解[M].呼和浩特:内蒙古人民出版社,2005.(LIU Guanting. *The Complex Variable Function Method of Quasicrystals Elasticity and Analytic Solutions of Nonlinear Equations* [M]. Hohhot: Inner Mongolia People's Publishing House, 2005.(in Chinese))
- [9] 郭俊宏,刘官厅.一维六方准晶中具有不对称裂纹的圆形孔口问题的解析解[J].应用数学学报,2007,30(6):1066-1075.(GUO Junhong, LIU Guanting. Analytic solutions of the one-dimensional hexagonal quasicrystals about problem of a circular hole with asymmetry cracks[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2007, 30(6): 1066-1075.(in Chinese))
- [10] YANG J, LI X, DING S H. Anti-plane analysis of a circular hole with three unequal cracks in one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals[J]. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2016, 33(2): 184-198.
- [11] 杨丽星,刘官厅.一维六方准晶中带三条不对称裂纹的圆形孔口问题的解析解[J].数学的实践与认识,2010,40(2):148-156.(YANG Lixing, LIU Guanting. Analytic solutions of about a circular hole with three unequal straight edge cracks in one-dimensional hexagonal quasicrystals [J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2010, 40(2): 148-156.(in Chinese))
- [12] 郭俊宏,刘官厅.一维六方准晶中带双裂纹的椭圆孔口问题的解析解[J].应用数学和力学,2008,29(4):439-446.(GUO Junhong, LIU Guanting. Analytical solutions of problem about an elliptic hole with two straight cracks in one-dimensional hexagonal quasicrystals[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, 29(4): 439-446.(in Chinese))

- [13] 李联和, 刘官厅. 一维六方准晶中螺型位错与楔形裂纹的相互作用[J]. 物理学报, 2012, **61**(8): 326-330. (LI Lianhe, LIU Guanting. A screw dislocation interacting with a wedge-shaped crack in one-dimensional hexagonal quasicrystals [J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, **61**(8): 326-330. (in Chinese))
- [14] FAN T Y, LI X F, SUN Y F. A moving screw dislocation in a one-dimensional hexagonal quasicrystal[J]. *Acta Physica Sinica (Overseas Edition)*, 1999, **8**(4): 288-295.
- [15] 马小丹, 李星. 一维六方准晶的两类周期接触问题[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(7): 699-709. (MA Xiaodan, LI Xing. Kinds of periodic contact problems of 1D hexagonal quasicrystals [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(7): 699-709. (in Chinese))
- [16] SLADEK J, SLADEK V, PAN E. Bending analyses of 1D orthorhombic quasicrystal plates[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, **50**(24): 3975-3983.
- [17] LI Y, YANG L Z, GAO Y. An exact solution for a functionally graded multiayered one-dimensional orthorhombic quasicrystal plate[J]. *Acta Mechanica*, 2017; 1-17. DOI: 10.1007/s00707-017-2028-8.
- [18] YANG L Z, GAO Y, PAN E, et al. An exact closed-form solution for a multilayered one-dimensional orthorhombic quasicrystal plate[J]. *Acta Mechanica*, 2015, **226**(11): 3611-3621.
- [19] ZHANG L L, ZHANG Y M, GAO Y. General solutions of plane elasticity of one-dimensional orthorhombic quasicrystals with piezoelectric effect [J]. *Physics Letters A*, 2014, **378**(37): 2768-2776.
- [20] 于静, 刘官厅. 一维正方准晶椭圆孔口平面弹性问题的解析解[J]. 固体力学学报, 2010, **31**(4): 411-416. (YU Jing, LIU Guanting. Analytic solution of plane elasticity of one-dimensional orthorhombic quasicrystals with elliptical hole [J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2010, **31**(4): 411-416. (in Chinese))
- [21] 高健, 刘官厅. 一维正方准晶中半无限裂纹问题的解析解[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(9): 945-955. (GAO Jian, LIU Guanting. Analytical solutions for problems of 1D orthorhombic quasicrystal with semi-infinite crack [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(9): 945-955. (in Chinese))
- [22] 匡震邦, 马法尚. 裂纹端部场[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2002. (KUANG Zhenbang, MA Fashang. *Crack Tip Fields* [M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2002. (in Chinese))
- [23] 范天佑. 断裂理论基础[M]. 北京: 科学出版社, 2003. (FAN Tianyou. *Fracture Theory Basis* [M]. Beijing: Science Press, 2003. (in Chinese))

# Analytical Solutions to Problems of Elliptical Holes With 4 Edge Cracks in 1D Orthorhombic Quasicrystals

GAO Yuanyuan, LIU Guanting

(College of Mathematical Science, Inner Mongolia Normal University,  
Hohhot 010022, P.R.China)

**Abstract:** The plane elastic problems of elliptical holes with 4 cracks in 1D orthorhombic quasicrystals were investigated through introduction of a new generalized conformal mapping with the generalized complex variable method. With the stress functions, the basic elasticity equations were reduced to 4th-order partial differential equations, the complex expression of stress components was derived in the image plane and the analytical solution of stress intensity factors (SIFs) at the crack tips was found out. With the change of parameters describing the defects, the results can not only reduce to the conclusions in previous literatures, but also give the SIFs of a variety of common defect configurations, which provides a theoretical basis for engineering mechanics analysis.

**Key words:** generalized conformal mapping; 1D orthorhombic quasicrystal; elliptical hole with 4 cracks; stress intensity factor

**Foundation item:** The National Key R&D Program of China(2017YFC1405605)

---

引用本文/Cite this paper:

高媛媛, 刘官厅. 一维正交准晶中具有四条裂纹的椭圆孔口问题的解析解[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(2): 210-222.

GAO Yuanyuan, LIU Guanting. Analytical solutions to problems of elliptical holes with 4 edge cracks in 1D orthorhombic quasicrystals[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(2): 210-222.