文章编号:1000-0887(2019)05-0536-10　　　　

非 Fourier 温度场分布的奇摄动解*

包立平[1], 李文彦[1], 吴立群[2]

(1. 杭州电子科技大学 理学院, 杭州 310018;
2. 杭州电子科技大学 机械工程学院, 杭州 310018)

摘要: 应用非 Fourier 热传导定律构建了单层材料中温度场模型,即一类在无界域上带小参数的奇摄动双曲方程,通过奇摄动展开方法,得到了该问题的渐近解.首先应用奇摄动方法得到了该问题的外解和边界层矫正项,通过对内解和外解的最大模估计和关于时间导数的最大模估计以及线性抛物方程理论,得到了内外解的存在唯一性,从而得到了解的形式渐近展开式.通过余项估计,给出了渐近解的 L^2 估计,得到了渐近解的一致有效性,从而得到了无界域上温度场的分布.通过奇摄动分析,给出了非 Fourier 温度场与 Fourier 温度场的关系,描述了非 Fourier 温度场的具体形态.

关 键 词: 奇摄动; 热传导方程; 无界域; 一致有效估计

中图分类号: TK12　　**文献标志码:** A　　DOI: 10.21656/1000-0887.390112

引　　言

随着超短脉冲激光加热、金属快速凝固等现代高新技术的发展,热作用的周期时间短到皮秒以至飞秒量级的超急速、超常规热传导规律的研究越来越引起人们的重视.因此近年来,非 Fourier 温度场得到了人们的重视.特别是在温度场急剧变化的场合,用 Fourier 热传导定律来描述存在一定问题.张浙等[1]对非 Fourier 热传导的实质、模型、模型的求解及应用与实验等几个方面的研究进展做了一个较详尽的概括与评述.李金娥等[2]指出了该问题,建立了一个双层材料层合板瞬态加热情况下的非 Fourier 热传导分析模型,用向后差分法得到了温度场的数值解.Mao 等[3]基于双相滞后(DPL)的热传导模型、Cattaneo Vernotte (CV)模型和改进的 CV 模型研究了纳米级厚度的金薄膜在超快激光加热下的一维热传导,应用数值模拟探讨了系统参数对温度场的影响.文献[4]建立了有限空圆柱体的轴对称非 Fourier 温度场的数学模型,利用分离变量法和 Duhamel 积分求得有限空圆柱体双曲型热传导问题的精确解析解.文献[5]中,主要研究了非 Fourier 的理论和实验研究以及热传导行为,以一种新的热原子理论为理论基础,为精确预测非 Fourier 导热提供了一个通用的热传导方程.文献[6]对平板太阳能集热器吸收板中的 Fourier 和非 Fourier 热传导进行了分析,采用变量分离法建立模型,采用基于有限差分法的数值技术来对该抛物型方程和双曲型方程进行了求解,并对非 Fourier 导热模型的使用要求进行了比较研究.

---

* **收稿日期:** 2018-04-11; **修订日期:** 2018-11-12
基金项目: 国家自然科学基金(51175134);浙江省重点自然科学基金(LZ15E050004)
作者简介: 包立平(1962—),男,副教授,博士(通讯作者. E-mail: baolp@ hdu.edu.cn);
李文彦(1993—),女,硕士生.

数值模拟的方法对于分析温度场的变化、分析各参数的影响和温度场的定性性质存在一定的难度．因此，求解解析解在理论研究和实际应用中均有相应的价值．赵伟涛等[7]用双曲型热传导方程描述了平板表面温度急剧变化时的热传导问题，利用分离变量法和 Duhamel 积分原理，得到了解析解，然后进行了数值模拟．但是该模型要求比较高，只适用于一维平板的研究．文献[8]针对激光束瞬间加热物体表面时，材料表面附近温度场变化的问题，建立了基于非 Fourier 热传导理论的三维热传导数学模型．利用积分变换技巧，得到了问题 Laplace 逆变换的解析形式，从而给出了新的温度场解析解，并据此分析了传热过程中固体内部的温度场演化规律及特征．文献[9]讨论了非平衡温度在非 Fourier 导热中的作用热模型和声子 Boltzmann 方程，用不同理论进行了比较．但是求解解析解存在着相当大的困难，从而只有在一些特定的场合才适用求近似解的方法．近年来人们应用奇异摄动的方法，求得近似解析解，对于非 Fourier 温度场分布的研究就有了很大的价值．张盛等[10]采用一种时间-空间多尺度高阶渐近均匀化分析方法，模拟了多维微尺度多相周期性结构中的非经典热传导问题．本文则应用奇异摄动理论中的边界层矫正法，分析由非 Fourier 热传导定律导出的奇摄动双曲方程问题，得到了相应的近似解析解．从而由近似解析结果分析了温度场的定性性质和定量性质．

对于有界域上的奇异摄动双曲方程，康连城[11]研究了一类具有非线性初边值条件的奇摄动问题的 n 维拟线性双曲抛物型方程，给出了该摄动问题光滑解具有一致有效的一阶渐近展开式的存在性．文献[12]中，研究了一类具有变动边界的初边值问题的奇摄动的拟线性双曲抛物型方程，给出了此问题的解具有以退化问题充分光滑解为首项的广义渐近展开式的存在性．文献[13]中，讨论了具有参数的混合抛物型双曲型方程的一类特殊黏性条件的非局部边值问题，给出了 Green 函数的方法和积分微分算子的性质．但是在实际问题中，由于材料的尺寸常常用到无界域的概念，如薄板材料等．例如关建飞、沈中华等[14-15]用 Fourier 热传导定律描述了板状金属材料中脉冲激光激发的超声波，并用有限元方法进行了数值模拟．他们讨论的板块材料在 z 轴方向是有界的，即在 x,y 轴方向是无界的．这种无界域的情形不但有实际应用的意义，而且在数学上有着与有界域不同的性质．传统的奇摄动双曲方程的研究方法难以应用到无界域上的问题，因此无论是从理论研究还是实际应用角度，对此开展研究都是十分必要的．

本文讨论一类在无界域上带小参数的奇摄动双曲抛物方程问题，通过奇摄动分析，构造了相应的形式渐近解，给出了外解和内解的存在唯一性．并通过余项估计得到渐近解的有效性，从而得到了在无界域中温度场的分布．本文所建立的温度场模型是在文献[14]的基础上进一步的拓展，并应用奇异摄动方法给出了近似解析解．文献[14]的模型可以作为本文模型的特例．

1　模型建立

现做出如下的假设：

[H1]　$f_1(x,y,z)$，$f_2(x,y,z)$ 是已知的任意阶连续可微函数，记

$$f_3 = f_{1x} + f_{1y} + f_{1z},$$

$$|f_1| \leqslant M\mathrm{e}^{-r/r_0^2+kt+z/h},\quad |f_3| \leqslant M\mathrm{e}^{-r/r_0^2+kt+z/h},$$

$$|\Delta f_1| \leqslant M\mathrm{e}^{-r/r_0^2+kt+z/h},\quad |f_2| \leqslant M\mathrm{e}^{-r^2/r_0^2+kt+z/h},$$

其中 M 是正整数．

[H2]　$f(r)$ 及 $g(t)$ 是脉冲激光的空间分布，可以表示成

$$f(r)=\exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right),$$

$$g(t)=\exp\left(-\frac{t}{t_0}\right),$$

式中 r_0 是激光辐照的光斑半径，t_0 是脉冲激光的上升时间.

［H3］$u(x,y,z,t)$ 表示 t 时刻的温度分布；ρ,c,k 分别表示密度、热容量和热导率，记 $m=k/(\rho c)$.

［H4］$C^{2k+\alpha,k+\alpha/2}(Q_T)$ 为 Banach 空间，$Q_T=\bar{\Omega}\times[0,T]$，$\Omega=R^2\times(0,h)$.

注 1 文献[14]中的模型是本文模型中的退化方程，即文献[14]中是用 Fourier 定律来描述的，而本文是用非 Fourier 定律来描述的.本文的定解条件增加了初始的温度场分布以及初始层温度场的变化速率，初始条件可以参考文献[2].本文以激光为例，考虑了在平板上各系数以指数衰减的情况.文献[2,14]中的参数满足本文的要求.

本文从单相延迟双曲型热传导模型出发，考虑热流矢量的传播和温度梯度的形成之间有一个延迟，数学上可以表达为

$$q(x,y,z,t+\varepsilon)=-k\nabla u(x,y,z,t),\tag{1}$$

其中 ε 为时间上的相位延迟，它是介质的固有热特性.系统的能量方程为

$$-\nabla q(x,y,z,t)=\rho c\frac{\partial q(x,y,z,t)}{\partial t}.\tag{2}$$

将式(1)关于 ε 进行 Taylor 级数展开，可得到

$$q(x,y,z,t+\varepsilon)=q(x,y,z,t)+\varepsilon\frac{\partial q(x,y,z,t)}{\partial t}+o(\varepsilon^2)=-k\nabla u(x,y,z,t).\tag{3}$$

因为相位延迟时间 ε 很小，其范围大致是：金属 $10^{-14}\sim10^{-11}$ s，气体约为 $10^{-10}\sim10^{-8}$ s，而对液体和绝热体大致介于两者之间.在低温下，对金属大致为 $10^{-11}\sim10^{-6}$ s.对于多孔介质、生物组织，其弛豫时间则比较高，常温时可达到几十秒.也就是说，除了生物组织和多孔介质外，工程材料的弛豫时间 ε 是在纳秒到皮秒的量级.故忽略其二次项和高阶项，方程(3)近似为

$$q(x,y,z,t)+\varepsilon\frac{\partial q(x,y,z,t)}{\partial t}\cong-k\nabla u(x,y,z,t).\tag{4}$$

由式(2)、(4)，消除 q，可得到

$$\nabla\cdot k\nabla u(x,y,z,t)=\rho c\left[\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial t^2}\right].\tag{5}$$

假设热导率 k 为常数，上式可化简为

$$\varepsilon\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t}=\frac{k}{\rho c}\Delta u(x,y,z,t).\tag{6}$$

记 $m=k/(\rho c)$，则得到

$$\varepsilon\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t}=m\Delta u(x,y,z,t),\tag{7}$$

其边界条件为

$$\begin{cases} -k\dfrac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=0} = I_0(1-R)f(r)g(t), \\ \dfrac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=h} = 0, \\ u(x,y,z,0) = f_1(x,y,z), \\ u_t(x,y,z,t)\mid_{t=0} = f_2(x,y,z), \end{cases}$$

式中 R 是样品表面的反射率, h 是样品的厚度, I_0 是单脉冲激光的辐照能量.

2 形 式 展 开

对式(7)做正则展开,得到

$$\bar{u}(x,y,z,t,\varepsilon) = u_0(x,y,z,t) + \varepsilon u_1(x,y,z,t) + \varepsilon^2 u_2(x,y,z,t) + \cdots.$$

比较 ε 的同次幂系数,可得

$$\begin{cases} u_{0t} = m\Delta u_0, \\ u_0(x,y,z,t)\mid_{t=0} = f_1, \\ -ku_{0z}(x,y,z,t)\mid_{z=0} = I_0(1-R)f(r)g(t), \\ u_{0z}(x,y,z,t)\mid_{z=h} = 0, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} u_{1t} = m\Delta u_1 - u_{0tt}, \\ u_1(x,y,z,t)\mid_{t=0} = 0, \\ u_{1z}(x,y,z,t)\mid_{z=0} = 0, \\ u_{1z}(x,y,z,t)\mid_{z=h} = 0, \end{cases} \tag{9}$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} u_{nt} = m\Delta u_n - u_{(n-1)tt}, \\ u_n(x,y,z,t)\mid_{t=0} = -p_{n-1}\mid_{t=0}, \\ u_{nz}(x,y,z,t)\mid_{z=0} = 0, \\ u_{nz}(x,y,z,t)\mid_{z=h} = 0, \end{cases} \tag{10}$$

其中

$$p \approx \sum_{j=0}^{\infty} p_j \varepsilon^j.$$

现给出式(7)的合成展开式:

$$\begin{cases} u(x,y,z,t,\varepsilon) = \bar{u}(x,y,z,t,\varepsilon) + \varepsilon p(x,y,z,t,\varepsilon)\mathrm{e}^{-t/\varepsilon}, \\ p \approx \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} p_j \varepsilon^j,\ \bar{u} \approx \sum_{i=0}^{\infty} u_i \varepsilon^i. \end{cases} \tag{11}$$

将上式代入到式(7)中,比较 ε 的同次幂系数,可得

$$\begin{cases} p_{0t} = -m\Delta p_0, \\ p_0\mid_{t=0} = \bar{u}_{0t}\mid_{t=0} - f_2, \\ p_{0z}\mid_{z=0} = 0, \\ p_{0z}\mid_{z=h} = 0, \end{cases} \tag{12}$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} p_{nt} = - m\Delta p_n - p_{(n-1)tt}, \\ p_n |_{t=0} = \bar{u}_{nt} |_{t=0} + p_{(n-1)t} |_{t=0}, \\ p_{nz} |_{z=0} = 0, \\ p_{nz} |_{z=h} = 0. \end{cases} \tag{13}$$

现给出如下定理.

定理 1 考虑下述线性方程在 $Q_T = \bar{\Omega} \times [0,T]$, $\Omega = R^2 \times (0,h)$ 的初边值问题:

$$\begin{cases} u_t = m\Delta u + g, \\ u(x,y,z,t) |_{t=0} = h_1, \\ u_z(x,y,z,t) |_{z=0} = h_2, \\ u_z(x,y,z,t) |_{z=h} = h_3. \end{cases} \tag{14}$$

若满足 $|g| \leqslant M\mathrm{e}^{-r/r_0^2+kt+z/h}$, 且 $g \in C^{1,2}(Q_T)$, $|h_1| \leqslant M\mathrm{e}^{-r/r_0^2+kt+z/h}$, $|h_2| \leqslant M\mathrm{e}^{-r^2/r_0^2+kt+z/h}$, $h_3 \leqslant M\mathrm{e}^{-r/r_0^2+kt+z/h}$, $h_2, h_3 \in C^{3,3/2}(Q_T)$, 其中 M 为正整数,则 u 存在唯一,且满足估计式 $|u| \leqslant D\mathrm{e}^{-r/r_0^2+kt+z/h}$, 其中 D 满足

$$D = \begin{cases} \dfrac{M}{k + m/r_0^2 - 1/h^2}, & (x,y,z,t) \in Q_T \backslash \partial_p Q_T, \\ hM\mathrm{e}^{1/4r_0^2+1}, & (x_1,y_1,z_1,t_1) \in \partial_p Q_T |_{z=0}, \\ Mh, & (x_1,y_1,z_1,t_1) \in \partial_p Q_T |_{z=h}, \\ M\mathrm{e}^{kT}, & (x_1,y_1,z_1,t_1) \in \partial_p Q_T |_{t=0}. \end{cases}$$

证明 令 $D = \inf\{\bar{C}: |u| \leqslant \bar{C}\mathrm{e}^{-r/r_0^2+kt+z/h}\}$, 则存在 $(r_1,z_1,t_1) \in Q_T \backslash \partial_p Q_T$, 使得 $|u| = D\mathrm{e}^{-r_1/r_0^2+kt_1+z_1/h}$.先讨论 $|u| = D\mathrm{e}^{-r_1/r_0^2+kt_1+z_1/h}$ 的情形,对式(14)做极坐标变换,有

$$u_t - m\cdot\frac{1}{r}\cdot u_r - mu_{rr} - mu_{zz} - g = 0. \tag{15}$$

将 u 代入式(15),则有

$$D\mathrm{e}^{-r/r_0^2+kt+z/h}\left(k + \frac{m}{r_1\cdot r_0^2}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-r/r_0^2+kt+z/h}\left(M + \frac{mD}{r_0^4} + \frac{mD}{h^2}\right),$$

化简可得当 $k > \dfrac{m}{r_0^4} + \dfrac{m}{h^2}$ 时,

$$D \leqslant \frac{M}{k - \dfrac{m}{r_0^2} - \dfrac{1}{h^2}}.$$

若 $(r_1,0,t_1) \in \partial_p Q_T |_{z=0}$, 使得 $u = D\mathrm{e}^{-r_1/r_0^2+kt_1}$, 则有

$$u_z |_{z=0} = \frac{D}{h}\mathrm{e}^{-r_1/r_0^2+kt_1} = h_2 \leqslant M\mathrm{e}^{-r_1^2/r_0^2+kt_1},$$

化简可得 $D \leqslant hM\mathrm{e}^{1/(4r_0^2)+1}$.

若 $(r_1,h,t_1) \in \partial_p Q_T |_{z=h}$, 则有

$$u_z |_{z=h} = \frac{D}{h}\mathrm{e}^{-r_1/r_0^2+kt_1+1} = h_3 \leqslant M\mathrm{e}^{-r_1/r_0^2+kt_1+1},$$

化简可得 $D \leqslant Mh$.

若 $(r_1, z_1, 0) \in \partial_p Q_T|_{t=0}$, 则有

$$u|_{t=0} = D\mathrm{e}^{-r_1/r_0^2 + z_1/h} = h_1 \leqslant M\mathrm{e}^{-r_1/r_0^2 + kt_1 + z_1/h},$$

化简可得 $D \leqslant M\mathrm{e}^{kT}$.

$-u = D\mathrm{e}^{-r_1/r_0^2 + kt_1 + z_1/h}$ 类似可得相同结果,则 u 满足 $|u| \leqslant D\mathrm{e}^{-r/r_0^2 + kt + z/h}$.

下证存在唯一性.

考虑式(14)在 $Q_{T_k} = \bar{\Omega}_k \times [0,T]$ 的初边值问题,其中 $\Omega_k \subset \Omega$ 是一个有界域.因为 $g \in C^{1,2}(Q_{T_k})$, $h_2, h_3 \in C^{3,3/2}(Q_{T_k})$, 满足文献[9]中定理 8.3.1 的条件,则式(14)在 Q_{T_k} 上的初边值问题存在唯一的解 $u \in C^{3,3/2}(Q_{T_k})$. 因为 $|u| \leqslant D\mathrm{e}^{-r/r_0^2 + kt + z/h} \leqslant D\mathrm{e}^{kT+1}$, 即 u 有界, $|g| \leqslant M\mathrm{e}^{-r/r_0^2 + kt + z/h} \leqslant M\mathrm{e}^{kT+1}$, 所以与边界 k 的选取无关,则在无界域上,该问题的解存在且唯一.

推论 1　问题(8)~(13)的解存在唯一,且满足 $|u_n| \leqslant D\mathrm{e}^{-r/r_0^2 + kt + z/h}$, $|p_n| \leqslant D\mathrm{e}^{-r/r_0^2 + kt + z/h}$, $|u_{ntt}| \leqslant D\mathrm{e}^{-r/r_0^2 + kt + z/h}$, $|p_{ntt}| \leqslant D\mathrm{e}^{-r/r_0^2 + kt + z/h}$.

证明　式(8)中,取 $h_1 = f_1$,则 $|h_1| \leqslant M\mathrm{e}^{-r/r_0^2 + kt + z/h}$, 取

$$h_2 = -\frac{I_0(1-R)\mathrm{e}^{-r^2/r_0^2 - t/t_0}}{k},$$

则

$$|h_2| = \left|\frac{I_0(1-R)\mathrm{e}^{-r^2/r_0^2 - t/t_0}}{k}\right| \leqslant M\mathrm{e}^{-r^2/r_0^2 + kt + z/h},$$

取 $h_3 = 0$, $g = 0$, 因此满足定理 1 的条件, u_0 满足如下估计 $|u_0| \leqslant D\mathrm{e}^{-r/r_0^2 + kt + z/h}$.

由式(8)可得

$$\begin{cases} u_{0tt} = m\Delta u_{0t}, \\ u_{0t}|_{t=0} = \Delta f_1, \\ u_{0zt}|_{z=0} = -\dfrac{1}{t_0}\dfrac{1}{k}I_0(1-R)f(r)g(t), \\ u_{0zt}|_{z=h} = 0. \end{cases} \tag{16}$$

取

$$h_1, h_3 = 0,\ h_2 = -\frac{1}{t_0}\frac{1}{k}I_0(1-R)f(r)g(t),$$

所以

$$|h_2| = \left|\frac{1}{t_0}\frac{1}{k}I_0(1-R)f(r)g(t)\right| \leqslant M_3\mathrm{e}^{-r^2/r_0^2 + kt + z/h},$$

$g = 0$, 均满足定理 1 的条件,所以 $|u_{0t}| \leqslant D\mathrm{e}^{-r/r_0^2 + kt + z/h}$.

由式(16)可得

$$\begin{cases} u_{0ttt} = m\Delta u_{0tt}, \\ u_{0tt}|_{t=0} = f_3, \\ u_{0ztt}|_{z=h} = 0, \\ u_{0ztt}|_{z=0} = -\dfrac{1}{t_0^2}\dfrac{1}{k}I_0(1-R)f(r)g(t). \end{cases} \tag{17}$$

取

$$h_1=0,\ h_2=\frac{1}{t_0^2}\frac{1}{k}I_0(1-R)f(r)g(t),$$

则

$$|h_2|=\left|\frac{1}{t_0^2}\frac{1}{k}I_0(1-R)f(r)g(t)\right|\leqslant M\mathrm{e}^{-r^2/r_0^2+kt+z/h},$$

取 $h_3=f_3$, 则 $|h_3|\leqslant M\mathrm{e}^{-r^2/r_0^2+kt+z/h}$, $g=0$, 均满足定理 1 的条件,所以 $|u_{0tt}|\leqslant D\mathrm{e}^{-r/r_0^2+kt+z/h}$.取式(12)中 $g=0$, $h_2,h_3=0,h_1=\Delta f_1-f_2$, 则

$$|h_1|\leqslant|M\mathrm{e}^{-r/r_0^2+kt+z/h}+M\mathrm{e}^{-r^2/r_0^2+kt+z/h}|\leqslant M\mathrm{e}^{-1/(4r_0^2)+2kt+2(z/h)}.$$

显然满足定理 1 中的条件,则有 $|p_0|\leqslant D\mathrm{e}^{-r/r_0^2+kt+z/h}$.

式(9)中,取 $h_1,h_2,h_3=0$, $g=u_{0tt}$, $|g|=|u_{0tt}|\leqslant D\mathrm{e}^{-r/r_0^2+kt+z/h}$, 所以式(9)满足定理 1 的条件,则有 $|u_1|\leqslant D\mathrm{e}^{-r/r_0^2+kt+z/h}$.重复上述过程,可得到

$$|u_n|\leqslant D\mathrm{e}^{-r/r_0^2+kt+z/h},\ |p_n|\leqslant D\mathrm{e}^{-r/r_0^2+kt+z/h},\ |u_{ntt}|\leqslant D\mathrm{e}^{-r/r_0^2+kt+z/h},\ |p_{ntt}|\leqslant D\mathrm{e}^{-r/r_0^2+kt+z/h}.$$

根据定理 1 可得式(8)~(13)的存在唯一性,证毕.

因此可得式(7)的形式渐近解为

$$u(x,\varepsilon)=\bar{u}(r,z,t,\varepsilon)+\varepsilon p(r,z,t,\varepsilon)\mathrm{e}^{-t/\varepsilon},\qquad \bar{u}=\sum_{i=0}^{\infty}\bar{u}_i\varepsilon^i,\ p=\sum_{j=0}^{\infty}p_j\varepsilon^j. \tag{18}$$

3 余 项 估 计

定理 2 式(18)的形式渐近解一致有效.

证明 首先考虑式(7)的余项 R, 则

$$U(r,z,t)=u_0+\varepsilon u_1+\cdots+\varepsilon^n u_n+\varepsilon p_0\mathrm{e}^{-t/\varepsilon}+\cdots+\varepsilon^{n+1}p_n^n\mathrm{e}^{-t/\varepsilon}+\varepsilon^{N+1}R. \tag{19}$$

将式(19)代入到式(7),可得

$$\varepsilon R_{tt}+R_t-m\Delta R=-u_{(n+1)tt}-p_{ntt}\mathrm{e}^{-t/\varepsilon}, \tag{20}$$

边界条件为

$$-k\frac{\partial R(x,y,z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=0}=0,\ \frac{\partial R(x,y,z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=h}=0,$$

$$R(x,y,z,0)=0,\ R_t(x,y,z,0)=0.$$

记 $f=-u_{(n+1)tt}-p_{ntt}\mathrm{e}^{-t/\varepsilon}$, 由定理 1 可得 $|u_{(n+1)tt}|\leqslant D\mathrm{e}^{-r/r_0^2+kt+z/h}$, $|p_{(n+1)tt}|\leqslant D\mathrm{e}^{-r/r_0^2+kt+z/h}$, 则

$$\int_{Q_T}f^2\mathrm{d}Q_T\leqslant 2\int_{Q_T}D\mathrm{e}^{-2r/r_0^2+2kt+2z/h}\mathrm{d}Q_T+2\int_{Q_T}D\mathrm{e}^{-2r/r_0^2+(2k-2/\varepsilon)t+2z/h}\mathrm{d}Q_T,$$

$$2\int_{Q_T}D\mathrm{e}^{-2r/r_0^2+2kt+2z/h}\mathrm{d}Q_T=\frac{Dhr_0^2}{4k}(\mathrm{e}^{2kT}-1)(\mathrm{e}^2-1)$$

有界,

$$2\int_{Q_T}D\mathrm{e}^{-2r/r_0^2+(2k-2/\varepsilon)t+2z/h}\mathrm{d}Q_T=\frac{D\varepsilon}{1-k\varepsilon}\frac{r_0^2h}{8}(\mathrm{e}^{2k-2/\varepsilon}-1)(\mathrm{e}^2-1)$$

也有界,所以 $\int_{Q_T}f^2\mathrm{d}Q_T$ 有界.

式(20)同乘 $2R_t$, 并在 Q_T 上积分,可得

$$\int_{Q_T} 2\varepsilon R_t R_{tt} \mathrm{d}Q_T + \int_{Q_T} 2R_t^2 \mathrm{d}Q_T - \int_{Q_T} 2mR_t \Delta R \mathrm{d}Q_T = \int_{Q_T} 2fR_t \mathrm{d}Q_T,$$

经化简得 $\varepsilon\int_{\bar{\Omega}} R_t^2 \mathrm{d}\bar{\Omega} + \int_{Q_T} R_t^2 \mathrm{d}Q_T + m\int_{\bar{\Omega}} |\nabla R|^2 \mathrm{d}\bar{\Omega} \leqslant \int_{Q_T} f^2 \mathrm{d}Q_T$, 其中

$$f^2 = u_{(n+1)tt}^2 + p_{ntt}^2 \mathrm{e}^{-2t/\varepsilon} + 2u_{(n+1)tt} p_{ntt} \mathrm{e}^{-t/\varepsilon}. \tag{21}$$

$\int_{Q_T} R_t^2 \mathrm{d}Q_T \leqslant \int_{Q_T} f^2 \mathrm{d}Q_T = \|f\|^2$, 记 $L = \int_{\bar{\Omega}} R^2 \mathrm{d}\bar{\Omega}$, 有

$$\int_{Q_T} (R^2)_t \mathrm{d}Q_T = 2\int_{Q_T} RR_t \mathrm{d}Q_T \leqslant \int_{Q_T} R^2 \mathrm{d}Q_T + \int_{Q_T} R_t^2 \mathrm{d}Q_T,$$

$$\int_{Q_T} (R^2)_t \mathrm{d}Q_T = \int_0^T \int_{\bar{\Omega}} (R^2)_t \mathrm{d}\bar{\Omega}\mathrm{d}t = \int_{\bar{\Omega}} (R^2) |_0^T \mathrm{d}\bar{\Omega} = L - \int_{\bar{\Omega}} (R^2) |_{t=0} \mathrm{d}\bar{\Omega} = L,$$

$$L \leqslant \int_0^T L \mathrm{d}t + \int_{Q_T} R_t^2 \mathrm{d}Q_T \leqslant \int_0^T L \mathrm{d}t + \int_{Q_T} f^2 \mathrm{d}Q_T.$$

根据 Gronwall 不等式,可得 $\int_{Q_T} R^2 \mathrm{d}Q_T \leqslant \|f\|^2 (\mathrm{e}^T - 1)$.因为

$$\int_{\bar{\Omega}} |\nabla R|^2 \mathrm{d}\bar{\Omega} \leqslant \int_{Q_T} f^2 \mathrm{d}Q_T,$$

$$\int_{Q_T} |\nabla R|^2 \mathrm{d}Q_T = \int_0^T \int_{\bar{\Omega}} |\nabla R|^2 \mathrm{d}\bar{\Omega} \leqslant \int_0^T \|f\|^2 \mathrm{d}t = T\|f\|^2,$$

又 $\int_{Q_T} f^2 \mathrm{d}Q_T$ 有界,则 $\int_{\bar{\Omega}} |\nabla R|^2 \mathrm{d}\bar{\Omega}$ 有界.根据文献[7],可得余项 R 在区域 Q 上一致成立下面的估计式:

$$\|R\|_{L^2(Q_T)} + \|\nabla R\|^2_{L^2(Q_T)} + \|R_t\|^2_{L^2(Q_T)} \leqslant M.$$

因此 R 有界,即式(18)一致有效.

4 结 束 语

本文中,应用非 Fourier 热传导定律构建了单层材料中温度场模型.该模型来源于激光作用下单层材料的热分析问题.该模型是无界域上奇摄动双曲方程初边值问题.应用奇摄动分析方法,得到了形式渐近解,通过对内解和外解的最大模估计和关于时间导数的最大模估计以及线性抛物方程理论,得到了在无界域上内外解的存在唯一性,从而得到了解的形式渐近展开式.利用上述估计,给出了渐近解的 L^2 估计,得到了无界域上的余项估计,从而完整地得到了无界域上奇摄动双曲方程的渐近解.实际上,模型的正则展开部分(外解)的首项就是 Fourier 温度场的分布.非 Fourier 温度场在 $t=0$ 处有个初始层,从而在初期非 Fourier 温度场与 Fourier 温度场有较大区别,随着时间发展,非 Fourier 温度场逐步与 Fourier 温度场描述趋于一致,从而描述了单层材料非 Fourier 温度场的具体形态.

参考文献(References):

[1] 张浙, 刘登瀛. 非傅里叶热传导研究进展[J]. 力学进展, 2000, **30**(3): 446-456.(ZHANG Zhe, LIU Dengying. Progress in the research of non-Fourier heat conduction[J]. *Advance in Mechanics*, 2000, **30**(3): 446-456.(in Chinese))

[2] 李金娥, 王保林, 常冬梅. 层合材料的非傅里叶热传导及热应力[J]. 固体力学学报, 2011, **32**(S): 248-253.(LI Jin'e, WANG Baolin, CHANG Dongmei. Non-Fourier heat conduction and thermal stress of laminated materials[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2011, **32**(S):

248-253.(in Chinese))

[3] MAO Y D, XU M T. Non-Fourier heat conduction in a thin gold film heated by an ultra-fast-laser[J]. *Science China Technological Sciences*, 2015, **58**(4): 638-649.

[4] 张丽静, 尚新春. 由激光辐照固体表面引起的非 Fourier 三维传热问题的解析解[J]. 北京理工大学学报, 2016, **36**(8): 876-880.(ZHANG Lijing, SHANG Xinchun. Analytical solution of non-Fourier three-dimensional heat transfer problem induced by laser irradiation on solid surface [J]. *Transactions of Beijing Institute of Technology*, 2016, **36**(8): 876-880.(in Chinese))

[5] WANG H D. *Theoretical and Experimental Studies on Non-Fourier Heat Conduction Based on Thermomass Theory*[M]. Berlin: Springer, 2014.

[6] KUNDU B, LEE K S. Fourier and non-Fourier heat conduction analysis in the absorber plates of a flat-plate solar collector[J]. *Solar Energy*, 2012, **86**(10): 3030-3039.

[7] 赵伟涛, 吴九汇. 平板在任意周期表面热扰动作用下的非 Fourier 热传导的求解与分析[J]. 物理学报, 2013, **62**(18): 288-296.(ZHAO Weitao, WU Jiuhui. Solution and analysis of non-Fourier heat conduction in a plane slab under arbitrary periodic surface thermal disturbance[J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, **62**(18): 288-296.(in Chinese))

[8] 王晓燕, 刘洪伟, 李杰, 等. 基于非傅里叶的有限空圆柱体的温度场解析解及其在谐波均匀的圆柱体上的应用[J]. 数学的实践与认识, 2017, **47**(19): 105-110.(WANG Xiaoyan, LIU Hongwei, LI Jie, et al. Analytical solution of non-Fourier temperature field of finite hollow cylinder and application of harmonic uniform cylinder [J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2017, **47**(19): 105-110.(in Chinese))

[9] DONG Y, CAO B Y, GUO Z Y. Temperature innonequilibrium states and non-Fourier heat conduction[J]. *Physical Review E*, 2013, **87**(3): 32150.

[10] 张盛, 张洪武, 毕金英, 等. 多维非经典热传导问题的时间-空间多尺度高阶均匀化分析[J]. 复合材料学报, 2009, **26**(1): 123-133.(ZHANG Sheng, ZHANG Hongwu, BI Jinying, et al. Multi-dimensional nonclassical heat conduction analysis with multiple spatial and temporal scales analysis method[J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2009, **26**(1): 123-133.(in Chinese))

[11] 康连城. 关于非线性初边值问题的奇摄动(I)[J]. 数学年刊: A 辑(中文版), 1989, **10**(5): 529-531.(KANG Liancheng. Singular perturbation for nonlinear initial boundary value problems(I) [J]. *Chinese Annals of Mathematics*, 1989, **10**(5): 529-531.(in Chinese))

[12] 康连城. 关于非线性初边值问题的奇摄动(II)[J]. 应用数学和力学, 1992, **13**(2): 135-143.(KANG Liancheng. Singular perturbation for nonlinear initial boundary value problems(II)[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1992, **13**(2): 135-143.(in Chinese))

[13] BERDYSHEV S A, CABADA A, KARIMOV E T. On a non-local boundary problem for a parabolic-hyperbolic equation involving a Riemann-Liouville fractional differential operator [J]. *Nonlinear Analysis*, 2013, **75**(6): 3268-3273.

[14] 关建飞, 沈中华, 许伯强, 等. 板状材料中脉冲激光激发超声导波的数值分析[J]. 光电子·激光, 2005, **16**(2): 231-235.(GUAN Jianfei, SHEN Zhonghua, XU Boqiang, et al. Numerical analysis of ultrasonic guided waves generated by pulsed laser in plate[J]. *Journal of Optoelectronics·Laser*, 2005, **16**(2): 231-235.(in Chinese))

[15] 沈中华, 许伯强, 倪晓武, 等. 单层和双层材料中的脉冲激光超声数值模拟[J]. 中国激光, 2004, **31**(10): 1275-1280.(SHEN Zhonghua, XU Boqiang, NI Xiaowu, et al. Numerical simulation of pulsed laser induced ultrasound in monolayer and double layer materials[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2004, **31**(10): 1275-1280.(in Chinese))

[16] 伍卓群, 尹景学, 王春明. 椭圆与抛物型方程引论[M]. 北京：科学出版社, 2003.(WU Zhuoqun, YIN Jingxue, WANG Chunming. *Introduction to Elliptic and Parabolic Equations*[M]. Beijing：Science Press, 2003.(in Chinese))

Singularly Perturbed Solutions of Non-Fourier Temperature Field Distribution in Single-Layer Materials

BAO Liping[1], LI Wenyan[1], WU Liqun[2]

(1. *School of Sciences*, *Hangzhou Dianzi University*, *Hangzhou* 310018, *P.R.China*;

2. *School of Mechanical Engineering*, *Hangzhou Dianzi University*, *Hangzhou* 310018, *P.R.China*)

Abstract：A temperature field model for single-layer materials was constructed with the non-Fourier heat conduction law, i.e. a type of singularly perturbed hyperbolic equations with small parameters in an unbounded domain. The asymptotic solution to the problem was obtained with the singularly perturbed expansion method. Firstly, the singular perturbation method was used to obtain the external solution and boundary layer correction terms of the problem. Through estimation of the maximum norms of the internal solution and the external solution, and the maximum norms of the time derivative, and under the theory of linear parabolic equations, the existence and uniqueness of the internal and external solutions were obtained, and the formal asymptotic expansion of the solution was obtained. The L^2 estimator of the asymptotic solution was given with the remainder estimator. The uniform validity of the asymptotic solution and the distribution of the temperature field in the unbounded domain were got. Through singular perturbation analysis, the relationship between the non-Fourier temperature field and the Fourier temperature field was given, and the specific behaviors of the non-Fourier temperature field were described.

Key words：singular perturbation; heat conduction equation; unbounded domain; uniformly valid estimate

Foundation item：The National Natural Science Foundation of China(51175134)

引用本文/Cite this paper：

包立平, 李文彦, 吴立群. 非 Fourier 温度场分布的奇摄动解[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(5)：536-545.

BAO Liping, LI Wenyan, WU Liqun. Singularly perturbed solutions of non-Fourier temperature field distribution in single-layer materials[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(5)：536-545.