文章编号:1000-0887(2019)03-0343-12

D-η-E- 半预不变凸映射和 D-η-E- 半预不变真拟凸映射*

王海英, 符祖峰

(安顺学院 数理学院, 贵州 安顺 561000)

摘要: 研究了 D-η-E- 半预不变凸映射和 D-η-E- 半预不变真拟凸映射的一些性质.首先,讨论了 D-η-E- 半预不变凸与 D-η-E- 严格半预不变真拟凸、D-η-E- 半严格半预不变真拟凸和 D-η-E- 半预不变真拟凸之间的关系,在中间点的 D-η-E- 半预不变凸性和其他一些条件下,得到了它的 3 个重要的性质定理;其次,对 D-η-E- 半预不变真拟凸与 D-η-E- 半严格半预不变真拟凸和 D-η-E- 严格半预不变真拟凸之间的关系也进行了讨论;最后,获得了 D-η-E- 半预不变真拟凸映射在优化中的一个重要应用.

关 键 词: D-η-E- 半预不变凸; D-η-E- 半预不变真拟凸; D-η-E- 半严格半预不变真拟凸; 优化

中图分类号: O211.6 **文献标志码:** A DOI: 10.21656/1000-0887.390143

引　　言

凸性和广义凸性在数学规划的研究中起着相当关键的作用.Kazmi[1]给出了向量值情形下的 D- 预不变凸映射.进一步地,Peng 和 Zhu[2]建立了 D- 预不变凸映射的一些性质.Long 等[3]讨论了 D- 半严格预不变凸和 D- 预不变凸之间的关系.彭再云等[4]提出了 D- 半预不变真拟凸、D- 半严格半预不变真拟凸和 D- 严格半预不变真拟凸的概念,并建立了这几类广义凸性间的关系.黄应全[5]应用 D- 上半连续性, $*$-上半连续性和中间点的 D- 半预不变真拟凸性,得到了 D- 半预不变真拟凸映射的两个性质定理.唐莉萍和杨新民[6]分别利用 D- 半严格半预不变真拟凸性和 D- 严格半预不变真拟凸性建立 D- 半预不变凸性的充要条件,最后利用 D- 半预不变真拟凸性给出了半预不变凸性的刻画.彭建文[7]给出了向量值情形下的 D-η- 预不变真拟凸映射,并给出了它的一些性质.还有其他一些文献[8-14]对向量广义凸映射进行了研究.随后,文献[15]提出了一类新的向量值广义凸映射: D-η-E- 半预不变凸映射,它是 D-η- 预不变凸映射的真推广,建立了 D-η-E- 半预不变凸映射与 D-η-E- 严格半预不变凸映射、D-η-E- 半严格半预不变凸映射间的关系,并讨论了 D-η-E- 半严格半预不变凸映射在一类隐约束向量优化问题中的重要应用.

---

* **收稿日期:** 2018-05-10; **修订日期:** 2018-06-15
基金项目: 国家自然科学基金(61304146);贵州省科技厅、安顺市人民政府、安顺学院三方联合科技基金(LH[2017]7052)
作者简介: 王海英(1982—),女,教授,硕士(通讯作者. E-mail: why8206@163.com).

受文献[6-7]的启发,本文考虑 D-η-E- 半预不变凸性的新刻画.首先,对文献[15]中提出的条件 H 给出了一个重要的性质,在此基础上,结合稠密性结果,分别应用 D-η-E- 半严格半预不变真拟凸性、D-η-E- 严格半预不变真拟凸性和 D-η-E- 半预不变真拟凸性,建立了 D-η-E- 半预不变凸性的一些充要条件;其次,提出了一类新的广义凸映射: D-η-E- 半预不变真拟凸映射,建立了 D-η-E- 半预不变真拟凸性与 D-η-E- 半严格半预不变真拟凸性、D-η-E- 严格半预不变真拟凸性之间的关系;最后,给出了 D-η-E- 半严格半预不变真拟凸映射在优化中的应用.

1 预备知识

设 $X, Y \subset R^n$, $K \subset X$ 且 $K \neq \varnothing$, 点闭凸锥 $D \subset X$ 且 $D \neq \varnothing$,

$$f: K \to Y,\ \eta: R^n \times R^n \times [0,1] \to R^n,\ E(\cdot): K \to K.$$

定义 1[15] 如果 $\forall x, y \in K, \forall \alpha \in [0,1], \forall \lambda \in [0,1]$, 有

$$E(y) + \alpha\eta(E(x), E(y), \lambda) \in K,$$

那么,称 $K \subset X$ 关于 η 是 E- 半不变凸集.

本文假设 $K \subset X$ 是关于 η 的 E- 半不变凸集.

定义 2[15] 如果 $\forall x, y \in K, \forall \alpha \in [0,1], \forall \lambda \in [0,1]$, 有

$$f(E(y) + \alpha\eta(E(x), E(y), \lambda)) \in \alpha f(E(x)) + (1-\alpha) f(E(y)) - D,$$

那么,称 $f: K \to Y$ 关于 η 是 D-η-E- 半预不变凸.

定义 3 如果 $\forall x, y \in K, \forall \alpha \in [0,1], \forall \lambda \in [0,1]$, 有

$$f(E(y) + \alpha\eta(E(x), E(y), \lambda)) \in f(E(x)) - D,$$

或

$$f(E(y) + \alpha\eta(E(x), E(y), \lambda)) \in f(E(y)) - D,$$

那么,称 $f: K \to Y$ 关于 η 是 D-η-E- 半预不变真拟凸.

定义 4 如果 $\forall x, y \in K, x \neq y, \forall \alpha \in [0,1], \forall \lambda \in [0,1]$, 有

$$f(E(y) + \alpha\eta(E(x), E(y), \lambda)) \in f(E(x)) - \operatorname{int} D,$$

或

$$f(E(y) + \alpha\eta(E(x), E(y), \lambda)) \in f(E(y)) - \operatorname{int} D,$$

那么,称 $f: K \to Y$ 关于 η 是 D-η-E- 严格半预不变真拟凸.

定义 5 如果 $\forall x, y \in K, f(E(x)) \neq f(E(y)), \forall \alpha \in [0,1], \forall \lambda \in [0,1]$, 有

$$f(E(y) + \alpha\eta(E(x), E(y), \lambda)) \in f(E(x)) - \operatorname{int} D,$$

或

$$f(E(y) + \alpha\eta(E(x), E(y), \lambda)) \in f(E(y)) - \operatorname{int} D,$$

那么,称 $f: K \to Y$ 关于 η 是 D-η-E- 半严格半预不变真拟凸.

为了讨论 D-η-E- 半预不变凸的一些性质,将用到下面的条件和引理.

条件 H[15] $\forall x, y \in K, \forall \alpha \in [0,1], \forall \lambda \in [0,1]$, 如果 η 和 E 满足关系式:

(H1) $\eta(E(y), E(y) + \alpha\eta(E(x), E(y), \lambda), \lambda) = -\alpha\eta(E(x), E(y), \lambda)$,

(H2) $\eta(E(x), E(y) + \alpha\eta(E(x), E(y), \lambda), \lambda) = (1-\alpha)\eta(E(x), E(y), \lambda)$,

那么,称 η 满足条件 H .

引理 1[15] 设 η 满足条件 H, $K \subset X$ 关于 η 是 E- 半不变凸集,若 $f:K \to Y$ 满足

① $f(E(y)+\eta(E(x),E(y),\lambda)) \in f(E(x))-D, \forall x,y \in K$;

② $\forall x,y \in K, \exists \alpha \in [0,1]$, s.t.

$$f(E(y)+\alpha\eta(E(x),E(y),\lambda)) \in \alpha f(E(x))+(1-\alpha)f(E(y))-D,$$

则

$$A=\{\gamma \in [0,1] \mid f(E(y)+\gamma\eta(E(x),E(y),\lambda)) \in \gamma f(E(x))+(1-\gamma)f(E(y))-D\}$$

在$[0,1]$中稠密.

性质 1 设 η 满足条件 H,那么

$$\eta(E(y)+\alpha_1\eta(E(x),E(y),\lambda),E(y)+\alpha_2\eta(E(x),E(y),\lambda),\lambda)=(\alpha_1-\alpha_2)\eta(E(x),E(y),\lambda),$$
$$\forall x,y \in K,\ \forall \alpha_1,\alpha_2 \in [0,1],\ \forall \lambda \in [0,1]. \tag{1}$$

证明 分 3 种情形考虑.

(i) 当 $\alpha_1=\alpha_2$ 时,结论明显成立.

(ii) 当 $\alpha_1>\alpha_2$ 时,

$$\begin{aligned}&\eta(E(y)+\alpha_1\eta(E(x),E(y),\lambda),E(y)+\alpha_2\eta(E(x),E(y),\lambda),\lambda)=\\&\quad\eta(E(y)+\alpha_1\eta(E(x),E(y),\lambda),E(y)+\alpha_1\eta(E(x),E(y),\lambda)+\\&\quad(\alpha_2-\alpha_1)\eta(E(x),E(y),\lambda),\lambda)=\\&\quad\eta(E(y)+\alpha_1\eta(E(x),E(y),\lambda),E(y)+\alpha_1\eta(E(x),E(y),\lambda)+\\&\quad\eta(E(y),E(y)+(\alpha_1-\alpha_2)\eta(E(x),E(y),\lambda)),\lambda)=\\&\quad-\eta(E(y),E(y)+(\alpha_1-\alpha_2)\eta(E(x),E(y),\lambda),\lambda)=\\&\quad(\alpha_1-\alpha_2)\eta(E(x),E(y),\lambda).\end{aligned}$$

(iii) 当 $\alpha_1<\alpha_2$ 时,

$$\begin{aligned}&\eta(E(y)+\alpha_1\eta(E(x),E(y),\lambda),E(y)+\alpha_2\eta(E(x),E(y),\lambda),\lambda)=\\&\quad\eta(E(y)+\alpha_1\eta(E(x),E(y),\lambda),E(y)+\alpha_1\eta(E(x),E(y),\lambda)+\\&\quad(\alpha_2-\alpha_1)\eta(E(x),E(y),\lambda),\lambda)=\\&\quad-(\alpha_2-\alpha_1)\eta(E(x),E(y),\lambda)=\\&\quad(\alpha_1-\alpha_2)\eta(E(x),E(y),\lambda).\end{aligned}$$

则式(1)成立.

2 *D-η-E-* 半预不变凸映射

本节将结合性质 1 和条件 H,分别应用 *D-η-E-* 半严格半预不变真拟凸性、*D-η-E-* 严格半预不变真拟凸性和 *D-η-E-* 半预不变真拟凸性给出 *D-η-E-* 半预不变凸性的新刻画.

定理 1 $f:K \to Y$ 关于 η 是 *D-η-E-* 半预不变凸$\Leftrightarrow$

① $f(E(y)+\eta(E(x),E(y),\lambda)) \in f(E(x))-D, \forall x,y \in K, \forall \lambda \in (0,1)$;

② $f:K \to Y$ 关于 η 是 *D-η-E-* 半严格半预不变真拟凸;

③ $\forall x,y \in K, \forall \lambda \in (0,1), \exists \alpha \in [0,1]$, s.t.

$$f(E(y)+\alpha\eta(E(x),E(y),\lambda)) \in \alpha f(E(x))+(1-\alpha)f(E(y))-D.$$

证明 必要性明显成立,只需要证明充分性.

(反证法) 设 $\exists x,y \in K,\lambda \in (0,1),\beta \in (0,1)$, s.t.

$$f(E(y)+\beta\eta(E(x),E(y),\lambda)) \notin \beta f(E(x))+(1-\beta)f(E(y))-D. \tag{2}$$

根据引理 1, $\exists \mu,\omega \in A$, 满足 $0<\mu<\beta<\omega<1$, s.t.

$$f(E(z_\beta)) \notin \mu f(E(x))+(1-\mu)f(E(y))-D, \tag{3}$$

$$f(E(z_\beta)) \notin \omega f(E(x))+(1-\omega)f(E(y))-D, \tag{4}$$

其中 $E(z_\beta)=E(y)+\beta\eta(E(x),E(y),\lambda)$.

令

$$t_1=\frac{\beta-\mu}{1-\mu}<\beta,\ t_2=\frac{\beta}{\omega}>\beta,$$

由条件(H2)和性质 1,有

$$E(z_\beta)=E(z_{t_1})+\mu\eta(E(x),E(z_{t_1}),\lambda),\ E(z_\beta)=E(y)+\omega\eta(E(z_{t_2}),E(y),\lambda),$$

其中 $E(z_{t_1})=E(y)+t_1\eta(E(x),E(y),\lambda)$, $E(z_{t_2})=E(y)+t_2\eta(E(x),E(y),\lambda)$.

因 $\mu,\omega \in A$, 故

$$f(E(z_\beta)) \in \mu f(E(x))+(1-\mu)f(E(z_{t_1}))-D, \tag{5}$$

$$f(E(z_\beta)) \in \omega f(E(z_{t_2}))+(1-\omega)f(E(y))-D. \tag{6}$$

分别结合式(3)及式(5),则有

$$f(E(z_{t_1})) \notin f(E(y))-D, \tag{7}$$

$$f(E(z_{t_2})) \notin f(E(x))-D. \tag{8}$$

以下从两个方面来证明:

(i) $f(E(x)) \neq f(E(y))$. 根据 f 的 D-η-E- 半严格半预不变真拟凸性, 结合式(7)及式(8),有

$$f(E(z_{t_1})) \in f(E(x))-\operatorname{int} D,\ f(E(z_{t_2})) \in f(E(y))-\operatorname{int} D.$$

再分别结合式(5)与式(6),有

$$f(E(z_\beta)) \in f(E(x))-\operatorname{int} D,\ f(E(z_\beta)) \in f(E(y))-\operatorname{int} D.$$

则 $f(E(z_\beta)) \in \beta f(E(x))+(1-\beta)f(E(y))-\operatorname{int} D$, 与式(2)相矛盾.

(ii) $f(E(x))=f(E(y))$. 由式(2), $f(E(z_\beta)) \neq f(E(y))$. 由性质 1,则

$$E(z_{t_1})=E(y)+\frac{\beta-\mu}{\beta(1-\mu)}\eta(E(z_\beta),E(y),\lambda).$$

根据 f 的 D-η-E- 半严格半预不变真拟凸性和式(7),有 $f(E(z_{t_1})) \in f(E(z_\beta))-\operatorname{int} D$. 结合式(5),有

$$f(E(z_\beta)) \in \mu f(E(x))+(1-\mu)f(E(z_\beta))-\operatorname{int} D,$$

则

$$\begin{aligned}f(E(z_\beta)) &\in f(E(x))-\operatorname{int} D=\beta f(E(x))+(1-\beta)f(E(x))-\operatorname{int} D=\\ &\beta f(E(x))+(1-\beta)f(E(y))-\operatorname{int} D,\end{aligned}$$

与式(2)相矛盾. 证毕.

根据定义 4 和定义 5, D-η-E- 严格半预不变真拟凸一定是 D-η-E- 半严格半预不变真拟凸,故由定理 1,可得到如下的一个推论:

推论 1 $f:K\to Y$ 关于 η 是 D-η-E- 半预不变凸$\Leftrightarrow$

① $f(E(y)+\eta(E(x),E(y),\lambda))\in f(E(x))-D,\forall x,y\in K,\forall\lambda\in(0,1)$;

② $f:K\to Y$ 关于 η 是 D-η-E- 严格半预不变真拟凸;

③ $\forall x,y\in K,\forall\lambda\in(0,1),\exists\alpha\in[0,1]$, s.t.

$$f(E(y)+\alpha\eta(E(x),E(y),\lambda))\in\alpha f(E(x))+(1-\alpha)f(E(y))-D. \tag{9}$$

接下来将应用 D-η-E- 半预不变真拟凸性给出 D-η-E- 半预不变凸性的一个新刻画.

定理 2 $f:K\to Y$ 关于 η 是 D-η-E- 半预不变凸$\Leftrightarrow$

① $f(E(y)+\eta(E(x),E(y),\lambda))\in f(E(x))-D,\forall x,y\in K,\forall\lambda\in(0,1)$;

② $f:K\to Y$ 关于 η 是 D-η-E- 半预不变真拟凸;

③ $\forall x,y\in K,\forall\lambda\in(0,1),\exists\alpha\in[0,1]$, s.t.

$$f(E(y)+\alpha\eta(E(x),E(y),\lambda))\in\alpha f(E(x))+(1-\alpha)f(E(y))-D. \tag{10}$$

证明 必要性明显成立,只需要证明充分性.

(反证法) 设 $\exists x,y\in K,\lambda\in(0,1),\beta\in(0,1)$, s.t.

$$f(E(y)+\beta\eta(E(x),E(y),\lambda))\notin\beta f(E(x))+(1-\beta)f(E(y))-D. \tag{11}$$

且 $\exists\mu,\omega\in A$, 满足 $0<\mu<\beta<\omega<1$, s.t.

$$E(z_\beta)=E(z_{(\beta-\mu)/(1-\mu)})+\mu\eta(E(x),E(z_{(\beta-\mu)/(1-\mu)}),\lambda)E(z_\beta)=$$
$$E(y)+\omega\eta(E(z_{\beta/\omega}),E(y),\lambda),$$

其中

$$E(z_\beta)=E(y)+\beta\eta(E(x),E(y),\lambda),$$

$$E(z_{(\beta-\mu)/(1-\mu)})=E(y)+\frac{\beta-\mu}{1-\mu}\eta(E(x),E(y),\lambda),$$

$$E(z_{\beta/\omega})=E(y)+\frac{\beta}{\omega}\eta(E(x),E(y),\lambda).$$

因 $\mu,\omega\in A$, 故

$$f(E(z_\beta))\in\mu f(E(x))+(1-\mu)f(E(z_{(\beta-\mu)/(1-\mu)}))-D, \tag{12}$$

$$f(E(z_\beta))\in\omega f(E(z_{\beta/\omega}))+(1-\omega)f(E(y))-D, \tag{13}$$

式(12)、(13)分别结合式(5)及式(6),有

$$f(E(z_{(\beta-\mu)/(1-\mu)}))\notin f(E(y))-D, \tag{14}$$

$$f(E(z_{\beta/\omega}))\notin f(E(x))-D, \tag{15}$$

而

$$E(z_{(\beta-\mu)/(1-\mu)})=E(y)+\frac{\beta-\mu}{1-\mu}\eta(E(x),E(y),\lambda),$$

$$E(z_{\beta/\omega})=E(y)+\frac{\beta}{\omega}\eta(E(x),E(y),\lambda).$$

由 f 的 D-η-E- 半预不变真拟凸性、式(14)及式(15),则

$$f(E(z_{(\beta-\mu)/(1-\mu)}))\in f(E(z_\beta))-D,\ f(E(z_{\beta/\omega}))\in f(E(z_\beta))-D.$$

分别结合式(12)、(13),有

$$f(E(z_\beta))\in f(E(x))-D,\ f(E(z_\beta))\in f(E(y))-D,$$

与式(11)相矛盾.

3 D-η-E- 半预不变真拟凸映射

定理 3 设 $E:K\to K$ 满射,若

① $f:K\to Y$ 关于 η 是 D-η-E- 半预不变真拟凸映射;

② $\exists\alpha\in[0,1]$, 对 $\forall x,y\in K,x\neq y,\forall\lambda\in(0,1)$, s.t.

$$f(E(y)+\alpha\eta(E(x),E(y),\lambda))\in f(E(x))-\operatorname{int}D,\tag{16a}$$

或

$$f(E(y)+\alpha\eta(E(x),E(y),\lambda))\in f(E(y))-\operatorname{int}D,\tag{16b}$$

那么, $f:K\to Y$ 关于 η 是 D-η-E- 严格半预不变真拟凸映射.

证明(反证法) 设 $f:K\to Y$ 关于 η 不是 D-η-E- 严格半预不变真拟凸映射,则 $\exists x,y\in K$, $x\neq y,\beta\in(0,1)$, s.t.

$$f(E(y)+\alpha\eta(E(x),E(y),\lambda))\notin f(E(x))-\operatorname{int}D,\tag{17a}$$

或

$$f(E(y)+\alpha\eta(E(x),E(y),\lambda))\notin f(E(y))-\operatorname{int}D.\tag{17b}$$

选取合适的 β_1,β_2, 使它们满足 $0<\beta_1<\beta_2<1,\beta=\alpha\beta_1+(1-\alpha)\beta_2$.

因为 $E:K\to K$ 是满射,所以 $\exists\bar{x},\bar{y}\in K$, s.t.

$$E(\bar{x})=E(y)+\beta_1\eta(E(x),E(y),\lambda),\ E(\bar{y})=E(y)+\beta_2\eta(E(x),E(y),\lambda).$$

因为 $f:K\to Y$ 关于 η 是 D-η-E- 半预不变真拟凸映射,所以

$$f(E(\bar{x}))\in f(E(x))-D,$$

或

$$f(E(\bar{x}))\in f(E(y))-D;$$

且

$$f(E(\bar{y}))\in f(E(x))-D,\tag{18a}$$

或

$$f(E(\bar{y}))\in f(E(y))-D.\tag{18b}$$

根据条件 H 有

$$\begin{aligned}&E(\bar{y})+\alpha\eta(E(\bar{x}),E(\bar{y}),\lambda)=\\&\quad E(y)+\beta_2\eta(E(x),E(y),\lambda)+\alpha\eta(E(y)+\beta_1\eta(E(x),E(y),\lambda),E(y)+\\&\quad\beta_1\eta(E(x),E(y),\lambda)+(\beta_2-\beta_1)\eta(E(x),E(y),\lambda),\lambda)=\\&\quad E(y)+\beta_2\eta(E(x),E(y),\lambda)+\\&\quad\alpha\eta\left(E(y)+\beta_1\eta(E(x),E(y),\lambda),E(y)+\beta_1\eta(E(x),E(y),\lambda)+\right.\\&\quad\left.\frac{\beta_2-\beta_1}{1-\beta_1}\eta(E(x),E(y)+\beta_1\eta(E(x),E(y),\lambda),\lambda),\lambda\right)=\\&\quad E(y)+\beta_2\eta(E(x),E(y),\lambda)-\end{aligned}$$

$$\alpha\frac{\beta_2-\beta_1}{1-\beta_1}\eta(E(x),E(y)+\beta_1\eta(E(x),E(y),\lambda),\lambda)=$$
$$E(y)+\left(\beta_2-\alpha\frac{\beta_2-\beta_1}{1-\beta_1}\right)\eta(E(x),E(y),\lambda)=$$
$$E(y)+\beta\eta(E(x),E(y),\lambda),$$

即

$$E(\bar{y})+\alpha\eta(E(\bar{x}),E(\bar{y}),\lambda)=E(y)+\beta\eta(E(x),E(y),\lambda).$$

由式(16)及 $E:K\to K$ 为满射,可得

$$f(E(y)+\beta\eta(E(x),E(y),\lambda))\in f(E(\bar{x}))-\operatorname{int}D, \tag{19a}$$

或

$$f(E(y)+\beta\eta(E(x),E(y),\lambda))\in f(E(\bar{y}))-\operatorname{int}D. \tag{19b}$$

由式(18)、(19)及 $D+\operatorname{int}D\subset\operatorname{int}D$, 可得

$$f(E(y)+\alpha\eta(E(x),E(y),\lambda))\in f(E(x))-\operatorname{int}D, \tag{20a}$$

或

$$f(E(y)+\alpha\eta(E(x),E(y),\lambda))\in f(E(y))-\operatorname{int}D. \tag{20b}$$

则式(20)与式(17)相矛盾.所以 $f:K\to Y$ 关于 η 是 D-η-E- 严格半预不变真拟凸映射.

定理 4 设 $E:K\to K$ 满射,若

① $\forall x,y\in K$, $f(E(y)+\eta(E(x),E(y),\lambda))\in f(E(x))-D$;

② $f:K\to Y$ 关于 η 是 D-η-E- 半严格半预不变真拟凸映射;

③ $\exists\alpha\in[0,1]$, 对 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$, s.t.

$$f(E(y)+\alpha\eta(E(x),E(y),\lambda))\in$$
$$f(E(x))-Df(E(y)+\alpha\eta(E(x),E(y),\lambda))\in f(E(y))-D, \tag{21}$$

且

$$f(E(y)+(1-\alpha)\eta(E(x),E(y),\lambda))\in f(E(x))-D, \tag{22a}$$

或

$$f(E(y)+(1-\alpha)\eta(E(x),E(y),\lambda))\in f(E(y))-D, \tag{22b}$$

那么, $f:K\to Y$ 关于 η 是 D-η-E- 半预不变真拟凸映射.

证明 由假设条件, $\forall x,y\in K$, 有

$$f(E(y)+\eta(E(x),E(y),\lambda))\in f(E(x))-D \text{ 且 } f(E(y))\in f(E(y))-D,$$

则 $\beta=0,1$ 时,结果成立.下面证明 $\beta\in(0,1)$ 时也成立.

(反证法) 设 $f:K\to Y$ 关于 η 不是 D-η-E- 半预不变真拟凸映射,则 $\exists x,y\in K$ 及 $\beta\in(0,1)$, s.t.

$$f(E(y)+\beta\eta(E(x),E(y),\lambda))\notin f(E(x))-D, \tag{23a}$$

或

$$f(E(y)+\beta\eta(E(x),E(y),\lambda))\notin f(E(y))-D. \tag{23b}$$

因为 $E:K\to K$ 是满射,则 $\exists z\in K$, s.t. $E(z)=E(y)+\beta\eta(E(x),E(y),\lambda)$.

(i) 当 $f(E(x))\neq f(E(y))$ 时,因为 f 关于 η 是 D-η-E- 半严格半预不变真拟凸映射,则

$$f(E(z))\in f(E(x))-\operatorname{int}D \text{ 或 } f(E(z))\in f(E(y))-\operatorname{int}D,$$

与式(23)相矛盾.

(ii) 当 $f(E(x)) = f(E(y))$ 时,由式(23),有

$$f(E(z)) \notin f(E(x)) - D = f(E(y)) - D. \tag{24}$$

(a) 当 $0 < \beta < \alpha < 1$ 时,因为 $E:K \to K$ 是满射,则 $\exists z_1 \in K$, s.t.

$$E(z_1) = E(y) + \frac{\beta}{\alpha}\eta(E(x), E(y), \lambda),$$

由条件 H,得

$$\begin{aligned}
&E(z_1) + (1-\alpha)\eta(E(y), E(z_1), \lambda) = \\
&\quad E(y) + \frac{\beta}{\alpha}\eta(E(x), E(y), \lambda) + \\
&\quad (1-\alpha)\eta\left(E(x), E(y) + \frac{\beta}{\alpha}\eta(E(x), E(y), \lambda), \lambda\right) = \\
&\quad E(y) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}(1-\alpha)\right)\eta(E(x), E(y), \lambda) = \\
&\quad E(y) + \beta\eta(E(x), E(y), \lambda) = E(z).
\end{aligned}$$

由式(22),得 $f(E(z)) \in f(E(y)) - D$, 或 $f(E(z)) \in f(E(z_1)) - D$.由式(24),得

$$f(E(z)) \in f(E(z_1)) - D. \tag{25}$$

令 $b = \dfrac{\beta(1-\alpha)}{\alpha(1-\beta)}$, 则 $b \in (0,1)$.由条件 H,则

$$\begin{aligned}
&E(z) + \frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha(1-\beta)}\eta(E(x), E(z), \lambda) = \\
&\quad E(y) + \beta\eta(E(x), E(y), \lambda) + b\eta(E(x), E(y) + \beta\eta(E(x), E(y), \lambda), \lambda) = \\
&\quad E(y) + (\beta + b(1-\beta))\eta(E(x), E(y), \lambda) = \\
&\quad E(y) + \frac{\beta}{\alpha}\eta(E(x), E(y), \lambda) = \\
&\quad E(z_1).
\end{aligned}$$

由 f 的 D-η-E- 半严格半预不变真拟凸性,则

$$f(E(z_1)) \in f(E(z)) - \operatorname{int} D,$$

或

$$f(E(z_1)) \in f(E(x)) - \operatorname{int} D.$$

由式(24),得 $f(E(z_1)) \in f(E(z)) - \operatorname{int} D$, 与式(25)相矛盾.

(b) 当 $0 < \alpha < \beta < 1$ 时,若 $\dfrac{\beta - \alpha}{1 - \alpha} \in (0,1)$,因为 $E:K \to K$ 是满射,则 $\exists z_2 \in K$, s.t.

$$E(z_2) = E(y) + \frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha}\eta(E(x), E(y), \lambda),$$

由条件 H,则

$$\begin{aligned}
&E(z_2) + \alpha\eta(E(x), E(z_2), \lambda) = \\
&\quad E(y) + \frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha}\eta(E(x), E(y), \lambda) +
\end{aligned}$$

$$\alpha\eta\left(E(x),E(y)+\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\eta(E(x),E(y),\lambda),\lambda\right)=$$

$$E(y)+\left(\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}+\alpha\left(1-\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\right)\right)\eta(E(x),E(y),\lambda)=$$

$$E(y)+\beta\eta(E(x),E(y),\lambda)=E(z).$$

由式(21),则

$$f(E(z))\in f(E(x))-D,$$

或

$$f(E(z))\in f(E(z_2))-D.$$

由式(24),则

$$f(E(z))\in f(E(z_2))-D, \tag{26}$$

令 $\mu=\dfrac{\beta-\alpha}{(1-\alpha)\beta}$, 则 $\mu\in(0,1)$, 且

$$E(z)+(1-\mu)\eta(E(y),E(z),\lambda)=$$

$$E(y)+\beta\eta(E(x),E(y),\lambda)+$$

$$(1-\mu)\eta(E(y),E(y)+\beta\eta(E(x),E(y),\lambda),\lambda)=$$

$$E(y)+\beta\mu\eta(E(x),E(y),\lambda)=$$

$$E(y)+\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\eta(E(x),E(y),\lambda)=$$

$$E(z_2).$$

由 f 的 D-η-E- 半严格半预不变真拟凸性,有

$$f(E(z_2))\in f(E(z))-\operatorname{int}D,$$

或

$$f(E(z_2))\in f(E(y))-\operatorname{int}D.$$

由式(24),有 $f(E(z_2))\in f(E(z))-\operatorname{int}D$, 与式(26)矛盾.

(c) 当 $0<\alpha=\beta<1$ 时,式(21)与式(23)明显矛盾.

所以 $f:K\to Y$ 关于 η 是 D-η-E- 半预不变真拟凸映射.

4 D-η-E- 半严格半预不变真拟凸映射在优化中的应用

考虑优化问题(VP_0): $\min_{x\in K}f(x)$.

定义 6[15] 令 $f(E(K))=\cup_{x\in K}f(E(x))$, $E(\cdot):K\to K$.

(i) 若 $(f(E(\bar{x}))-D\backslash\{0_Y\})\cap f(E(K))=\varnothing$,称 $\bar{x}\in K$ 是(VP_0)的 E- 全局有效解;若 $\exists x$ 的邻域 U,s.t.$(f(E(\bar{x}))-D\backslash\{0_Y\})\cap f(E(K\cap U))=\varnothing$,称 $\bar{x}\in K$ 是(VP_0)的 E- 局部有效解;

(ii) 若 $(f(E(\bar{x}))-\operatorname{int}D)\cap f(E(K))=\varnothing$, 称 $\bar{x}\in K$ 是(VP_0)的 E- 全局弱有效解;若 $\exists x$ 的邻域 U, s.t.$(f(E(\bar{x}))-\operatorname{int}D)\cap f(E(K\cap U))=\varnothing$,称 $\bar{x}\in K$ 是(VP_0)的 E- 局部弱有效解.

下面给出 D-η-E- 半严格半预不变真拟凸映射在向量优化中的一个应用.

定理 5 设 $\eta:K\times K\to K$, $E(\cdot):K\to K$, $K\subset X$ 关于 η 是 E- 半预不变凸集, $f:K\to Y$ 关于 η 是 D-η-E- 半严格半预不变真拟凸映射,则

① (VP_0)的任意 E- 局部弱有效解是(VP_0)的 E- 全局弱有效解;

② (VP_0)的任意 E- 局部有效解是(VP_0)的 E- 全局有效解.

证明 只需证明第①条.设 $\bar{x}$ 是(VP_0)的 E- 全局弱有效解,则 $\exists \bar{x}$ 的邻域 U,

$$\text{s.t. } (f(E(\bar{x})) - \operatorname{int} D) \cap f(E(K \cap U)) = \varnothing. \tag{27}$$

假设 $\bar{x}$ 不是(VP_0)的 E- 全局弱有效解,则 $(f(E(\bar{x})) - \operatorname{int} D) \cap f(E(K)) \neq \varnothing$.即

$$\exists x_0 \in K, \text{ s.t.}$$

$$f(E(x_0)) \in f(E(\bar{x})) - \operatorname{int} D.$$

因为 K 关于 η 是 E- 半预不变凸集,$f: K \to Y$ 关于 η 是 D-η-E- 半严格半预不变真拟凸映射.则 $\forall \alpha \in (0,1)$, 有 $E(\bar{x}) + \alpha\eta(E(\bar{x}),E(x_0),\lambda) \in K$, 且

$$f(E(\bar{x}) + \alpha\eta(E(\bar{x}),E(x_0),\lambda)) \in f(E(x_0)) - \operatorname{int} D,$$

或

$$f(E(\bar{x}) + \alpha\eta(E(\bar{x}),E(x_0),\lambda)) \in f(E(\bar{x})) - \operatorname{int} D.$$

若 $f(E(\bar{x}) + \alpha\eta(E(\bar{x}),E(x_0),\lambda)) \in f(E(x_0)) - \operatorname{int} D$, 则

$$f(E(\bar{x}) + \alpha\eta(E(\bar{x}),E(x_0),\lambda)) \in f(E(x_0)) - \operatorname{int} D \subset$$
$$f(E(x_0)) - \operatorname{int} D - \operatorname{int} D \subset f(E(\bar{x})) - \operatorname{int} D.$$

故 $\forall \alpha \in (0,1)$, 有

$$f(E(\bar{x}) + \alpha\eta(E(\bar{x}),E(x_0),\lambda)) \in f(E(\bar{x})) - \operatorname{int} D. \tag{28}$$

当 α 充分小时, $E(\bar{x}) + \alpha\eta(E(\bar{x}),E(x_0),\lambda) \in E(K \cap U)$, 有

$$f(E(\bar{x}) + \alpha\eta(E(\bar{x}),E(x_0),\lambda)) \in f(E(K \cap U)).$$

则式(28)与式(27)矛盾,故 $\bar{x}$ 是(VP_0)的 E- 全局弱有效解.同理可以证明第②条亦成立.

5 结 论

本文对 D-η-E- 半预不变凸映射和 D-η-E- 半预不变真拟凸映射的一些性质进行了研究.讨论了 D-η-E- 半预不变凸与 D-η-E- 半严格半预不变真拟凸、D-η-E- 严格半预不变真拟凸和 D-η-E- 半预不变真拟凸之间的关系,以及 D-η-E- 半预不变真拟凸与 D-η-E- 半严格半预不变真拟凸和 D-η-E- 严格半预不变真拟凸之间的关系,分别得到了 D-η-E- 半预不变凸映射和 D-η-E- 半预不变真拟凸映射的一些等价刻画.所得结果推广了文献[4,6-7,15]中的相关结果.那么如何建立 D-η-E- 半预不变凸集值映射的择一性定理,并通过择一性定理研究 D-η-E- 半预不变凸集值映射向量优化问题的最优性条件、鞍点定理以及对偶定理,这将是有待研究的后续课题.

参考文献(References):

[1] KAZMI K R. Some remarks on vector optimization problems[J]. *Journal of Optimization Theory & Applications*, 1998, **96**(1): 133-138.

[2] PENG J W, ZHU D L. On D-preinvex type functions[J]. *Journal of Inequalities and Applications*, 2006, **2006**: 1-14.

[3] LONG X J, PENG Z Y, ZENG B. Remark on cone semistrictly preinvex functions[J]. *Optimi-*

zation Letters, 2009, **3**(3): 337-345.

[4] 彭再云, 李科科, 唐平, 等. 向量值 D-半预不变真拟凸映射的判定与性质[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2014, **31**(5): 18-25.(PENG Zaiyun, LI Keke, TANG Ping, et al. Characterizations and criterions of D-semiprequasi-invex mappings[J]. *Journal of Chongqing Normal University*(*Natural Science*), 2014, **31**(5): 18-25.(in Chinese))

[5] 黄应全. 关于向量值 D-半预不变真拟凸映射的刻画[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(3): 364-370.(HUANG Yingquan. Characterizations of D-properly semi-prequasi-invex mappings[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(3): 364-370.(in Chinese))

[6] 唐莉萍, 杨新民. 关于 D-半预不变凸性的某些新性质[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(3): 325-331.(TANG Liping, YANG Xinmin. A note on some new characteristics of D-semi-preinvexity [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(3): 325-331.(in Chinese))

[7] 彭建文. 向量值映射 D-η-半预不变真拟凸的性质[J]. 系统科学与数学, 2003, **23**(3): 306-314. (PENG Jianwen. Properties of D-η-properly prequasi invex function[J]. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2003, **23**(3): 306-314.(in Chinese))

[8] 彭建文. 广义凸性及其在最优化问题中的应用[D]. 博士学位论文. 呼和浩特: 内蒙古大学, 2005.(PENG Jianwen. Generalized convexity with application optimization problems[D]. PhD Thesis. Hohhot: Inner Mongolia University, 2005.(in Chinese))

[9] 龙宪军, 毛小红. 关于向量值映射 D-η-预不变真拟凸的注记[J]. 云南民族大学学报(自然科学版), 2005, **14**(3): 213-215.(LONG Xianjun, MAO Xiaohong. Note on properties of D-η-properly prequasi-invex function[J]. *Journal of Yunnan Nationalities University*(*Natural Sciences Edition*), 2005, **14**(3): 213-215.(in Chinese))

[10] LUO Hezhi, WU Huixian, ZHU Yihua. New methods for characterizing D-η-properly prequasi-invex functions[J]. *Applied Mathematics: A Journal of Chinese Universities*, 2006, **21**(1): 107-112.

[11] 朱见广. 几类广义凸向量值映射的性质及其在最优化理论中的应用[D]. 硕士学位论文. 重庆: 重庆师范大学, 2008.(ZHU Jianguang. Properties of several kinds of generalized convexity functions with applications in optimization theory[D]. Master Thesis. Chongqing: Chongqing Normal University, 2008.(in Chinese))

[12] ZHOU Mi, WANG Yong, LIU Xiaolan, et al. Properties of D-η-properly prequasi-invex functions[J]. *Journal of Hainan Normal University*(*Natural Science*), 2009, **22**(4): 365-370, 407.

[13] LI Taiyong, HUANG Min. On the characterizations of D-preinvex functions[J]. *Journal of Inequalities and Applications*, 2012, **2012**: 240. DOI: 10.1186/1029-242X-2012-240.

[14] 彭再云, 王堃颖, 赵勇, 等. D-η-半预不变凸映射的性质及其应用[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(2): 202-211.(PENG Zaiyun, WANG Kunying, ZHAO Yong, et al. Characterizations and applications of D-η-semipreinvex mappings[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(2): 202-211.(in Chinese))

[15] 彭再云, 李科科, 张石生. 向量 D-η-E-半预不变凸映射与向量优化[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(9): 1020-1032.(PENG Zaiyun, LI Keke, ZHANG Shisheng. D-η-E-semipreinvex vector mappings and vector optimization[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(9): 1020-1032.(in Chinese))

D-η-E-Semi-Preinvex Mapping and D-η-E-Properly Semi-Prequasi-Invex Mapping

WANG Haiying,　FU Zufeng
(*School of Mathematics and Physics*, *Anshun University*,
Anshun, *Guizhou* 561000, *P.R.China*)

Abstract: Some properties of the D-η-E-semi-preinvex mapping and the D-η-E-properly semi-prequasi-invex mapping were studied. Firstly, relationships among the D-η-E-semi-preinvex mapping, the semistrictly semi-preinvex mapping, the strictly D-η-E-semi-preinvex mapping and the D-η-E-properly semi-prequasi-invex mapping were discussed. Three important theorems of properties were obtained based on the middle point D-η-E-semi-preinvex and some suitable conditions. Secondly, relationships among the D-η-E-properly semi-prequasi-invex mapping, the semistrictly D-η-E-properly semi-prequasi-invex mapping and the strictly D-η-E-properly semi-prequasi-invex mapping also were addressed. Finally, an important application in terms of the D-η-E-properly semi-prequasi-invex mapping was demonstrated in optimization.

Key words: D-η-E-semi-preinvex; D-η-E-properly semi-prequasi-invex; semistrictly D-η-E-properly semi-prequasi-invex; optimization

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(61304146)

引用本文/Cite this paper:

王海英, 符祖峰. D-η-E-半预不变凸映射和 D-η-E-半预不变真拟凸映射[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(3): 343-354.

WANG Haiying, FU Zufeng. D-η-E-semi-preinvex mapping and D-η-E-properly semi-prequasi-invex mapping[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(3): 343-354.