文章编号:1000-0887(2019)02-0167-14

基于非凸优化模型的块稀疏信号恢复条件*

周　珺，　黄　尉

(合肥工业大学 数学学院，合肥 230009)

摘要： 压缩感知(compressed sensing,CS)是一种全新的信息采集与处理理论,它表明稀疏信号能够在远低于 Shannon-Nyquist 采样率的条件下被精确重构.现从压缩感知理论出发,对块稀疏信号重构算法进行研究,通过混合 $l_2/l_q(0 < q \leqslant 1)$ 极小化方法,利用块-限制等距性质建立一类改进的精确恢复条件(无噪声情形),并给出有噪声情形下的误差分析结果.

关 键 词： 压缩感知； 块-限制等距性质； 块稀疏信号； 混合 l_2/l_q 最小化

中图分类号： O174.2　　**文献标志码：** A　　DOI：10.21656/1000-0887.390154

引　　言

压缩感知主要研究从欠定的线性测量系统中恢复未知信号的问题,最近引起了越来越多研究者的兴趣[1-7],其在现实生活中有很多实际应用,如:医学成像[8]、光学成像[9]、雷达探测[10]、无线通信[11]等.具体地,在压缩感知中,令待恢复信号为 $\boldsymbol{x} \in R^n$,$\boldsymbol{A} \in R^{m\times n}$ 为测量矩阵，$m \ll n$, 需要从下面的欠定系统中恢复信号 $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{y} \in R^m$ 为观测向量 ,$\boldsymbol{z} \in R^m$ 为一个未知的噪声.特别地,当 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ 时,式(1)自然退化为无噪声情形,即

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$$

显然此问题的可行解并不是唯一的,但是若假设信号 $\boldsymbol{x}$ 是稀疏的,考虑采用 l_0 最小化从可行解中找到最稀疏的一个解,

$$\min_{\boldsymbol{x}\in R^n} \|\boldsymbol{x}\|_0, \qquad \text{s.t.} \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \tag{2}$$

此处 $\|\boldsymbol{x}\|_0$ 代表信号 $\boldsymbol{x}$ 中非零元的个数.然而,此问题是非凸且 NP-hard 的,因此一个较为自然和有效的方法就是用 l_1 范数取代 l_0 范数对信号的稀疏度进行约束,

$$\min_{\boldsymbol{x}\in R^n} \|\boldsymbol{x}\|_1, \qquad \text{s.t.} \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \tag{3}$$

此处 $\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, 文献[3]中基于限制等距条件(RIP)已证得问题(2)和问题(3)是等价的.令 k 是一个正整数且满足 $1 \leqslant k \leqslant n$, 定义矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶 RIP 常数 δ_k 是对所有 k- 稀疏

* **收稿日期：** 2018-05-25；**修订日期：** 2018-12-04

基金项目： 国家自然科学基金重大研究计划(91538112)；国家自然科学基金青年科学基金(11201450)

作者简介： 周珺(1994—),女,硕士生(E-mail：1812253174@qq.com)；
黄尉(1977—),男,教授,博士,硕士生导师(通讯作者. E-mail：whuang@hfut.edu.cn).

信号 $\boldsymbol{x} \in R^n$, 使得

$$(1-\delta_k)\|\boldsymbol{x}\|_2^2 \leqslant \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2^2 \leqslant (1+\delta_k)\|\boldsymbol{x}\|_2^2$$

成立的最小非负数.此处称信号 $\boldsymbol{x} \in R^n$ 是 k- 稀疏的,即 $\|\boldsymbol{x}\|_0 \leqslant k$.

传统压缩感知中假设信号 $\boldsymbol{x}$ 仅有 k 个非零元且能出现在信号的任意位置,然而在一些实际应用中,未知信号可能不只是稀疏的,同时还可能具有一些结构特点.文献[12]中提出一种典型稀疏信号——块稀疏信号,此类信号的特点表现为信号中的非零元仅在很少的一些块中出现,此种信号有很多应用,如:多波段信号(multi-band signal)[13]、DNA 阵列(DNA microarray)[14]、雷达脉冲信号(radar pulse signal)[15]以及多测量向量问题(multiple measurement vector problem, MMV)[16]等.

为定义块稀疏性,假设信号 $\boldsymbol{x} \in R^n$ 被分成 l 块: $\boldsymbol{x}[1], \boldsymbol{x}[2], \cdots, \boldsymbol{x}[l]$, 每块对应长度为 $d_1, d_2, \cdots, d_l, n = \sum_{i=1}^{l} d_i$,

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = [\underbrace{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{d_1}}_{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}[1]}, \underbrace{\boldsymbol{x}_{d_1+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_{d_1+d_2}}_{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}[2]}, \cdots, \underbrace{\boldsymbol{x}_{n-d_l+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_n}_{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}[l]}],$$

此时,信号 $\boldsymbol{x}$ 被称为是 k- 块稀疏的,当且仅当信号按分块指标集 $\mathcal{I} = \{d_1, d_2, \cdots, d_l\}$ 分块,至多只有 k 个块 $\boldsymbol{x}[i]$ 非零.注意到对每个 i 有 $d_i = 1$, 则块稀疏性退化为传统的稀疏性定义.假设信号 $\boldsymbol{x}$ 按分块指标集 $\mathcal{I}$ 分块且 $|\mathcal{I}| \leqslant l$, 取 $\|\boldsymbol{x}\|_{2,0} = \sum_{i=1}^{l} I(\|\boldsymbol{x}[i]\|_2 > 0)$, $I(\cdot)$ 为指标函数,则一个块稀疏信号可表示为 $\|\boldsymbol{x}\|_{2,0} \leqslant k$, 现利用混合 l_2/l_0 最小化从满足 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}$ 的可行解中找到块稀疏的唯一解,

$$\min_{\boldsymbol{x} \in R^n} \|\boldsymbol{x}\|_{2,0}, \qquad \text{s.t.} \quad \boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \in \mathcal{B}, \tag{4}$$

此处 $\mathcal{B}$ 为有界噪声.与标准 l_0 最小化问题类似,此问题是 NP-hard 的且在有限时间内很难有效地解决,一个经常使用的策略是用凸松弛的方法,利用 l_2/l_1 范数代替 l_2/l_0 范数对信号的块稀疏性进行约束,

$$\min_{\boldsymbol{x} \in R^n} \|\boldsymbol{x}\|_{2,1}, \qquad \text{s.t.} \quad \boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \in \mathcal{B}, \tag{5}$$

其中 $\|\boldsymbol{x}\|_{2,1} = \sum_{i=1}^{l} \|\boldsymbol{x}[i]\|_2$.随着在非凸压缩感知领域越来越深入的研究,人们发现利用 $l_q(0 < q < 1)$ 拟范数代替凸 l_1 范数能有效减少准确重建信号的线性测量数.因此,自然地将非凸压缩感知推广至块稀疏领域,相应得到

$$\min_{\boldsymbol{x} \in R^n} \|\boldsymbol{x}\|_{2,q}, \qquad \text{s.t.} \quad \boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \in \mathcal{B}, \tag{6}$$

其中 $\|\boldsymbol{x}\|_{2,q} = (\sum_{i=1}^{l} \|\boldsymbol{x}[i]\|_2^q)^{1/q}, 0 < q \leqslant 1$.式(6)是本文主要研究模型,现在引入块-限制等距性质(b-RIP)的定义.

定义 1(b-RIP[12]) 给定矩阵 $\boldsymbol{A} \in R^{m\times n}(m \ll n)$ 且按分块指标集 $\mathcal{I}$ 分块,若存在一个常数 $\delta_{k|\mathcal{I}}$, 使得对任意按 $\mathcal{I}$ 分块的 k- 块稀疏信号 $\boldsymbol{x} \in R^n$ 满足

$$(1-\delta_{k|\mathcal{I}})\|\boldsymbol{x}\|_2^2 \leqslant \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2^2 \leqslant (1+\delta_{k|\mathcal{I}})\|\boldsymbol{x}\|_2^2, \tag{7}$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 以参数 $\delta_{k|\mathcal{I}}$ 满足 b-RIP .b-RIP 常数 $\delta_{k|\mathcal{I}}$ 定义为对所有 k- 块稀疏信号 $\boldsymbol{x} \in R^n$, 使得式(7)成立的最小正数.

基于 b-RIP 框架,已有很多文献研究并给出利用混合 l_2/l_1 最小化及混合 $l_2/l_q(0 < q \leqslant 1)$ 最小化准确重建 k- 块稀疏信号的 b-RIP 条件.更具体地,Elder 和 Mishali[12]证得若测量矩阵满足 $\delta_{2k} < 0.414$, 式(5)能准确恢复块稀疏信号;Lin 和 Li[17]提升条件至 $\delta_{2k} < 0.4931$; Chen 和

Li[18]给出 b-RIP 条件 $\delta_{tk} < \sqrt{(t-1)/t}, \forall t \geq 1$ 等.本文主要基于 b-RIP 框架,研究经混合 $l_2/l_q(0 < q \leq 1)$ 最小化准确重建块稀疏信号时,测量矩阵 $\boldsymbol{A} \in R^{m\times n}$ 需满足的 b-RIP 条件.

文章结构安排如下:第 1 节给出几个重要的引理;关于 $g(q,k)(t-1)+k$ 阶 b-RIP 条件和证明在第 2 节给出;第 3 节对全文进行总结.

1 符号和关键引理

假设信号 $\boldsymbol{x} \in R^n$ 按分块指标集 $\mathcal{I} = \{d_1, d_2, \cdots, d_l\}$ 进行分块,利用混合 l_2/l_0 范数去衡量信号 $\boldsymbol{x}$ 中 l_2 范数不为 0 的块的个数.若一个信号至多只有 k 个非零块,称该信号是 k- 块稀疏的,即 $\|\boldsymbol{x}\|_{2,0} \leq k$, 此处 $\|\boldsymbol{x}\|_{2,0} = \sum_{i=1}^{l} I(\|\boldsymbol{x}[i]\|_2 > 0)$,$I$ 为指标函数,当 $x > 0$ 时, $I(x) = 1$, 否则, $I(x) = 0$.同时定义 $\|\boldsymbol{x}\|_{\infty} := \max_i\{x_i\}$, $\|\boldsymbol{x}\|_{-\infty} := \min_i\{x_i\}$.

假设信号按同一分块指标集 $\mathcal{I}$ 进行分块,令

$$\boldsymbol{\Sigma}_k^n := \{\boldsymbol{x} \in R^n : \|\boldsymbol{x}\|_{2,0} \leq k\},$$

用 $\boldsymbol{x}_k$ 代表信号 $\boldsymbol{x}$ 的最佳 k- 块稀疏近似,这表示矢量是由信号 $\boldsymbol{x} \in R^n$ 按分块指标集 $\mathcal{I}$ 分块后 , l_2 范数最大的 k 块构成,具体地 ,$\boldsymbol{x}_k$ 可定义为

$$\boldsymbol{x}_k := \arg\min_{\boldsymbol{v} \in \Sigma_k^n} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}\|_{2,1}.$$

同时,令 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{A})$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱范数,定义如下:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{A}) = \sqrt{\max_{\lambda_i}(\mathrm{eig}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \times \boldsymbol{A}))},$$

其中 $\mathrm{eig}(\boldsymbol{X})$ 表示为计算方阵 $\boldsymbol{X}$ 特征值的函数,它返回向量 $[\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_n]^{\mathrm{T}}$, 其中 λ_i 表示第 i 个特征值.

假设 T 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个子集,用 T^{C} 表示 T 的补集, $|T|$ 表示集合 T 的基数,取 $\boldsymbol{A}_T := [a_j, j \in T]^*$ 表示由 T 中指标所指向 $\boldsymbol{A}$ 的行构成的子矩阵, $\mathcal{N}(\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零空间.

下面给出几个重要的引理,这些引理对后面的分析有重要作用.

引理 1(块-限制正交常数 b-ROC[17]) 令 $\mathcal{I}$ 是一个分块指标集, $|\mathcal{I}| = l$, 给定矩阵 $\boldsymbol{A} \in R^{m\times n}$, 有

$$|\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 \rangle| \leq \theta_{k_1,k_2} \|\boldsymbol{x}_1\|_2 \|\boldsymbol{x}_2\|_2, \tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 均为块稀疏信号且有不同块支撑 $T_1, T_2 \subset \{1,2,\cdots,l\}$, $|T_1| \leq k_1$, $|T_2| \leq k_2$, 按 $\mathcal{I}$ 分块 k_1, k_2 阶块限制正交常数 θ_{k_1,k_2} 是满足式(8)的最小常数.

引理 2 令 $\mathcal{I}$ 是一个分块指标集,信号 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in R^n$ 按 $\mathcal{I}$ 分块且有不同块支撑,其中 $\boldsymbol{x}_1$ 是 k_1- 块稀疏信号, $\boldsymbol{x}_2$ 是一般稀疏信号,但是满足 $\|\boldsymbol{x}_2\|_{2,1} \leq \lambda k_2$, $\|\boldsymbol{x}_2\|_{\infty,\mathcal{I}} \leq \lambda$, 则

$$|\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 \rangle| \leq \theta_{k_1,k_2} \|\boldsymbol{x}_1\|_2 \lambda \sqrt{k_2}. \tag{9}$$

证明 此引理证明与文献[5]中引理 5.1 证明相似,但应注意到文献[5]中针对稀疏信号,这里主要针对块稀疏信号,因此需要作一些改变,具体证明如下.

假设信号 $\boldsymbol{x}_2$ 是 l- 块稀疏信号,当 $l \leq k_2$, 由 θ_{k_1,k_2} 定义:

$$\begin{aligned} |\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 \rangle| &\leq \theta_{k_1,k_2} \|\boldsymbol{x}_1\|_2 \|\boldsymbol{x}_2\|_2 \leq \\ &\theta_{k_1,k_2} \|\boldsymbol{x}_1\|_2 \sqrt{\|\boldsymbol{x}_2\|_{2,1} \|\boldsymbol{x}_2\|_{\infty,\mathcal{I}}} \leq \theta_{k_1,k_2} \|\boldsymbol{x}_1\|_2 \lambda \sqrt{k_2}. \end{aligned}$$

因此,式(9)对 $l \leq k_2$ 时成立.

现在考虑 $l > k_2$, 利用归纳的方法证明.

假设式(9)对 $l-1$ 成立,则对 l, 假设信号 $\boldsymbol{x}_2$ 可表示为 $\boldsymbol{x}_2=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{d_i}a_{ij}\boldsymbol{e}_{ij}$, $\boldsymbol{e}_{ij}\in R^n$ 为指标向量,其中 i 代表第 i 块, j 代表对应块上第 j 项,每块长度为 d_i, $\forall i=1,2,\cdots,l$, 取

$$\boldsymbol{a}_i=(0,\cdots,0,a_{i1},\cdots,a_{id_i},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}\in R^n,\qquad \forall i=1,2,\cdots,l.$$

假设 $\|\boldsymbol{a}_1\|_2\geqslant\|\boldsymbol{a}_2\|_2\geqslant\cdots\geqslant\|\boldsymbol{a}_l\|_2>0$, 因 $\sum_{i=1}^{l}\|\boldsymbol{a}_i\|_2\leqslant\lambda k_2\leqslant(l-1)\lambda$, 所以

$$1\in D\triangleq\{1\leqslant r\leqslant l-1:\|\boldsymbol{a}_r\|_2+\|\boldsymbol{a}_{r+1}\|_2+\cdots+\|\boldsymbol{a}_l\|_2\leqslant(l-r)\lambda\}.$$

这意味着 D 必为非空,现取 D 中最大的元 $r\in D$, 这表明

$$\begin{cases}\|\boldsymbol{a}_r\|_2+\|\boldsymbol{a}_{r+1}\|_2+\cdots+\|\boldsymbol{a}_l\|_2\leqslant(l-r)\lambda,\\ \|\boldsymbol{a}_{r+1}\|_2+\|\boldsymbol{a}_{r+2}\|_2+\cdots+\|\boldsymbol{a}_l\|_2>(l-r-1)\lambda.\end{cases}\tag{10}$$

注意到,即使 D 中最大的元素是 $r-1$, 式(10)仍成立.现令

$$b_\omega=\frac{\sum_{i=r}^{l}\|\boldsymbol{a}_i\|_2}{l-r}-\|\boldsymbol{a}_\omega\|_2,\qquad r\leqslant\omega\leqslant l,\tag{11}$$

且

$$\boldsymbol{\gamma}_\omega=\frac{b_\omega}{\sum_{i=r}^{l}b_i}\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j=1}^{d_i}a_{ij}\boldsymbol{e}_{ij}+b_\omega\sum_{i=r,i\neq\omega}^{l}\sum_{j=1}^{d_i}\frac{a_{ij}}{\|\boldsymbol{a}_i\|_2}\boldsymbol{e}_{ij}\in R^n,\qquad r\leqslant\omega\leqslant l.\tag{12}$$

很容易得到 $\sum_{\omega=r}^{l}\boldsymbol{\gamma}_\omega=\boldsymbol{x}_2$, 且

$$\sum_{i=r}^{l}\|\boldsymbol{a}_i\|_2=(l-r)\sum_{i=r}^{l}b_i,$$

由式(10),对所有 $r\leqslant\omega\leqslant l$, 有

$$b_\omega\geqslant b_r=\frac{\sum_{i=r+1}^{l}\|\boldsymbol{a}_i\|_2}{l-r}-\frac{l-r-1}{l-r}\|\boldsymbol{a}_r\|_2\geqslant\frac{\sum_{i=r+1}^{l}\|\boldsymbol{a}_i\|_2-(l-r-1)\lambda}{l-r}>0.$$

又有

$$\|\boldsymbol{\gamma}_\omega\|_{2,1}\leqslant\frac{b_\omega}{\sum_{i=r}^{l}b_i}\left(\sum_{i=1}^{r-1}\|\boldsymbol{a}_i\|_2+(l-r)\sum_{i=r}^{l}b_i\right)\leqslant$$

$$\frac{b_\omega}{\sum_{i=r}^{l}b_i}\left(\sum_{i=1}^{r-1}\|\boldsymbol{a}_i\|_2+\sum_{i=r}^{l}\|\boldsymbol{a}_i\|_2\right)=\frac{b_\omega}{\sum_{i=r}^{l}b_i}\|\boldsymbol{x}_2\|_{2,1}\leqslant\frac{b_\omega}{\sum_{i=r}^{l}b_i}\lambda k_2,$$

且

$$\|\boldsymbol{\gamma}_\omega\|_{\infty,\mathcal{I}}=\max\left\{\frac{b_\omega}{\sum_{i=r}^{l}b_i}\|\boldsymbol{a}_1\|_2,\cdots,\frac{b_\omega}{\sum_{i=r}^{l}b_i}\|\boldsymbol{a}_{r-1}\|_2,\frac{b_\omega}{\sum_{i=r}^{l}b_i}\frac{\sum_{i=r}^{l}\|\boldsymbol{a}_i\|_2}{l-r}\right\}\leqslant\frac{b_\omega}{\sum_{i=r}^{l}b_i}\lambda.$$

最后一个不等关系是由式(10)中第一个不等式得到的,又因 $\boldsymbol{\gamma}_\omega$ 是一个 $(l-1)$- 块稀疏信号,利用归纳假设可得

$$|\langle\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2\rangle|=\sum_{\omega=r}^{l}|\langle\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_\omega\rangle|\leqslant$$

$$\theta_{k_1,k_2}\|\boldsymbol{x}_1\|_2\sum_{\omega=r}^{l}\frac{b_\omega}{\sum_{i=r}^{l}b_i}\lambda\sqrt{k_2}=\theta_{k_1,k_2}\|\boldsymbol{x}_1\|_2\lambda\sqrt{k_2}.$$

因此可知:对 l, 式(9)成立.引理 2 得证.

引理 2 通过 b-ROC 提供一种当仅一个分量为块稀疏时,估计内积的方式,可将其看作标准 b-ROC 定义的一般块稀疏推广.

引理 3(多面体块稀疏表示[18]) 令 $\mho$ 是一个分块指标集,对一个正数 α 和一个正整数 s, 定义凸包 $T(\alpha,s)\subset R^p$,

$$T(\alpha,s)=\{\boldsymbol{v}\in R^p:\|\boldsymbol{v}\|_{\infty,\mho}\leqslant\alpha,\|\boldsymbol{v}\|_{2,1}\leqslant s\alpha\}.$$

对任意 $\boldsymbol{v}\in R^p$, 定义一个稀疏矢量集 $U(\alpha,s,\boldsymbol{v})\subset R^p$,

$$U(\alpha,s,\boldsymbol{v})=\{\boldsymbol{u}\in R^p:\mathrm{supp}(\boldsymbol{u})\subseteq\mathrm{supp}(\boldsymbol{v}),$$
$$\|\boldsymbol{u}\|_{0,\mho}\leqslant s,\ \|\boldsymbol{u}\|_{2,1}=\|\boldsymbol{v}\|_{2,1},\ \|\boldsymbol{u}\|_{\infty,\mho}\leqslant\alpha\}.$$

则 $\boldsymbol{v}\in T(\alpha,s)$ 当且仅当 $\boldsymbol{v}$ 在 $U(\alpha,s,\boldsymbol{v})$ 的凸包里,特别地,任意 $\boldsymbol{v}\in T(\alpha,s)$ 能被表示为

$$\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\boldsymbol{u}_i,\qquad 0\leqslant\lambda_i\leqslant 1,\ \sum_{i=1}^{l}\lambda_i=1,\ \boldsymbol{u}_i\in U(\alpha,s,\boldsymbol{v}).$$

引理 4[19] 对 $q\in(0,1]$ 及 $\boldsymbol{x}\in R^n$, 有

$$\|\boldsymbol{x}\|_1\leqslant\frac{\|\boldsymbol{x}\|_q}{n^{1/q-1}}+p_q n(\|\boldsymbol{x}\|_\infty-\|\boldsymbol{x}\|_{-\infty}).\tag{13}$$

此处 $p_q:=q^{q/(1-q)}-q^{1/(1-q)}$, 其中 p_q 对 $q\in(0,1]$ 为非增凸函数且

$$p_0:=\lim_{q\to0^+}p_q=1,\ p_1:=\lim_{q\to1^+}p_q=0.$$

注 1 事实上,可用 $\|\boldsymbol{x}\|_0$ 代替式(13)中 n.因此,自然有

$$\|\boldsymbol{x}\|_1\leqslant\frac{\|\boldsymbol{x}\|_q}{\|\boldsymbol{x}\|_0^{1/q-1}}+p_q\|\boldsymbol{x}\|_0(\|\boldsymbol{x}\|_\infty-\|\boldsymbol{x}\|_{-\infty}).$$

引理 5 令 $\mho$ 是一个分块指标集, $\boldsymbol{A}\in R^{m\times n}$, 则有

$$\theta_{k,k}^{\boldsymbol{A}}\leqslant\begin{cases}2\delta_{k|\mho}^{\boldsymbol{A}}, & k\geqslant2,\ k=2n,\ n\in\mathbf{N},\\ \dfrac{2k}{\sqrt{k^2-1}}\delta_{k|\mho}^{\boldsymbol{A}}, & k\geqslant3,\ k=2n+1,\ n\in\mathbf{N}.\end{cases}$$

证明 证明主要分为 3 步.

step 1 证明 $\theta_{k_1,k_2}\leqslant\delta_{(k_1+k_2)|\mho}$.

若要证得 $\theta_{k_1,k_2}\leqslant\delta_{(k_1+k_2)|\mho}$, 只需证明

$$|\langle\boldsymbol{Ax}_1,\boldsymbol{Ax}_2\rangle|\leqslant\delta_{(k_1+k_2)|\mho}.$$

此处 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 按分块指标集 $\mho$ 分块且分别为 k_1-,k_2- 块稀疏信号,具有不同的块支撑, $\|\boldsymbol{x}_1\|_2=1$, $\|\boldsymbol{x}_2\|_2=1$.由式(7)有

$$2(1-\delta_{(k_1+k_2)|\mho})\leqslant\|\boldsymbol{Ax}_1+\boldsymbol{Ax}_2\|_2^2=\|\boldsymbol{Ax}_1\|_2^2+\|\boldsymbol{Ax}_2\|_2^2\leqslant2(1+\delta_{(k_1+k_2)|\mho}),$$

且

$$2(1-\delta_{(k_1+k_2)|\mho})\leqslant\|\boldsymbol{Ax}_1-\boldsymbol{Ax}_2\|_2^2=\|\boldsymbol{Ax}_1\|_2^2+\|\boldsymbol{Ax}_2\|_2^2\leqslant2(1+\delta_{(k_1+k_2)|\mho}).$$

又由平行四边形恒等式

$$\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\rangle=\frac{\|\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}\|_2^2+\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}\|_2^2}{4},$$

可得 $|\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2\rangle| \leqslant \delta_{(k_1+k_2)|\mathcal{I}}$.则自然地,有 $\theta_{k_1,k_2} \leqslant \delta_{(k_1+k_2)|\mathcal{I}}$.

step 2 证明 $\theta_{k_1,ak_2} \leqslant \sqrt{a}\theta_{k_1,k_2}$.

若要证得 $\theta_{k_1,ak_2} \leqslant \sqrt{a}\theta_{k_1,k_2}$, 只需证明

$$|\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2\rangle| \leqslant \sqrt{a}\theta_{k_1,k_2},$$

此处 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 按分块指标集 $\mathcal{I}$ 分块且分别为 k_1-,ak_2- 块稀疏信号,具有不同的块支撑, $\|\boldsymbol{x}_1\|_2 = 1$, $\|\boldsymbol{x}_2\|_2 = 1$.不考虑一般损失情形下,假设 $\boldsymbol{x}_2$ 的块支撑为 $\{1,2,\cdots,ak_2\}$, 对 $i=1,2,\cdots,ak_2$, 令 $\boldsymbol{c}_i \in R^n$ 是保留 $\boldsymbol{x}_2$ 中第 $i,(i+1),\cdots,(i+k_2-1)$ 个非零块,其他块取 0 的矢量,

$$|\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2\rangle| \leqslant \left|\left\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{k_2}\sum_{i=1}^{ak_2}\boldsymbol{c}_i\right)\right\rangle\right| \leqslant \frac{1}{k_2}\sum_{i=1}^{ak_2}|\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}_i\rangle| \leqslant$$

$$\frac{1}{k_2}\theta_{k_1,k_2}\|\boldsymbol{x}_1\|_2\sum_{i=1}^{ak_2}\|\boldsymbol{c}_i\|_2 \leqslant \frac{1}{k_2}\theta_{k_1,k_2}\|\boldsymbol{x}_1\|_2\sqrt{ak_2\sum_{i=1}^{ak_2}\|\boldsymbol{c}_i\|_2^2} =$$

$$\sqrt{a}\theta_{k_1,k_2}\|\boldsymbol{x}_1\|_2\|\boldsymbol{x}_2\|_2 = \sqrt{a}\theta_{k_1,k_2},$$

则有 $\theta_{k_1,ak_2} \leqslant \sqrt{a}\theta_{k_1,k_2}$ 成立.

step 3 b-RIP 常数 $\delta_{k|\mathcal{I}}$ 和 b-ROC $\theta_{k,k}$ 之间有不等关系:

$$\theta_{k,k} = \theta_{(k/\lceil k/2\rceil)\lceil k/2\rceil,(k/\lfloor k/2\rfloor)\lfloor k/2\rfloor} \leqslant \sqrt{\frac{k}{\lceil k/2\rceil}\frac{k}{\lfloor k/2\rfloor}}\theta_{\lceil k/2\rceil,\lfloor k/2\rfloor} \leqslant$$

$$\frac{k}{\sqrt{\lceil k/2\rceil\lfloor k/2\rfloor}}\delta_{k|\mathcal{I}} = \begin{cases} 2\delta_{k|\mathcal{I}}, & k \geqslant 2,\ k = 2n,\ n \in \mathbf{N}, \\ \dfrac{2k}{\sqrt{k^2-1}}\delta_{k|\mathcal{I}}, & k \geqslant 3,\ k = 2n+1,\ n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

综上,引理得证.

2 主要结论

基于文献[19],首先给出如下定义.

定义一个实值函数 $g(q,k):(0,1)\times\{1,2,3,\cdots\}\to\mathbf{R}, q\in(0,1), k\in\{1,2,3,\cdots\}$,

$$g(q,k) := \lceil q^{q/(q-1)}k\rceil^{1-1/q}k^{1/q} + p_q\lceil q^{q/(q-1)}k\rceil,$$

其中 $p_q := q^{q/(1-q)} - q^{1/(1-q)}$, 且当 $q^{q/(q-1)}k$ 是一个整数时, $g(q,k) = k$, 否则 $g(q,k) \leqslant k + p_q$.

其次对 $t > 1,\theta \geqslant 0,\rho \geqslant 0$, 定义

$$\mu(t,\theta) := \frac{\sqrt{(t+\theta-1)(t-1)}+1-t}{\theta},$$

$$\gamma(\rho,\theta) := \frac{\rho-\rho^2}{1/2-\rho+\rho^2(1+\theta/(2(t-1)))}.$$

应注意到:当固定 t 时,对于 θ, 函数 $\gamma(\mu(t,\theta),\theta)$ 是非增的;当固定 θ 时,对于 t, 函数 $\gamma(\mu(t,\theta),\theta)$ 是非减的.

2.1 重建块稀疏信号的 $g(q,k)(t-1)+k$ 阶 b-RIP 条件

现在给出利用混合 l_2/l_q 最小化准确重建块稀疏信号的 $g(q,k)(t-1)+k$ 阶 b-RIP 条件,其中 $0 < q \leqslant 1$.

定理 1(无噪情形) 假设 $\boldsymbol{x} \in R^n$ 按分块指标集 $\mathcal{I}$ 分块是一个块稀疏信号, $|\mathcal{I}| = l$, $\boldsymbol{y} \in$

$R^m, \boldsymbol{A} \in R^{m\times n}$, 若测量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $g(q,k)(t-1)+k$ 阶 b-RIP 且

$$\delta_{g(q,k)(t-1)+k} < \gamma\left(\mu\left(t, \frac{g(q,k)}{k}\right), \frac{g(q,k)}{k}\right), \tag{14}$$

则 $\boldsymbol{x}$ 是式(6)的唯一解,即信号能被准确重建.

对于有噪声情形,考虑两种类型的噪声设置:

(i) $\mathcal{B}(\varepsilon) = \{\boldsymbol{z}: \|\boldsymbol{z}\|_2 \leqslant \varepsilon\}$;

(ii) $\mathcal{B}(\varepsilon) = \{\boldsymbol{z}: \|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}\|_{\infty,\mathcal{I}} \leqslant \varepsilon\}$.

对应两种噪声设置下的结果分别在定理 2 和定理 3 中给出.

定理 2 假设 $\boldsymbol{x} \in R^n$ 按分块指标集 $\mathcal{I}$ 分块是一个近似 k- 块稀疏信号, $|\mathcal{I}| = l, \boldsymbol{y} \in R^m, \boldsymbol{A} \in R^{m\times n}$ 且 $\|\boldsymbol{z}\|_2 \leqslant \varepsilon, \mathcal{B}(\eta) = \{\boldsymbol{z}: \|\boldsymbol{z}\|_2 \leqslant \eta\}$, 其中 $\eta \geqslant \varepsilon + \sigma(\boldsymbol{A})\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k\|_2$, 若测量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $g(q,k)(t-1)+k$ 阶 b-RIP 且

$$\delta_{g(q,k)(t-1)+k} < \gamma\left(\mu\left(t, \frac{g(q,k)}{k}\right), \frac{g(q,k)}{k}\right),$$

则式(6)能稳定恢复信号 $\boldsymbol{x}$, $\delta := \delta_{g(q,k)(t-1)+k} \in (0,1)$,

$$\|\hat{\boldsymbol{x}}^{l_2} - \boldsymbol{x}\|_2 \leqslant \frac{\sqrt{2(1-\delta)}\mu(1-\mu)(\varepsilon+\eta)}{\mu^2 - \mu + \delta\left(\frac{1}{2} - \mu + \left(1 + \frac{g(q,k)}{2k(t-1)}\right)\mu^2\right)} + \left[\frac{\sqrt{2(1-\delta)}\mu(1-\mu)\sigma(\boldsymbol{A})}{\mu^2 - \mu + \delta\left(\frac{1}{2} - \mu + \left(1 + \frac{g(q,k)}{2k(t-1)}\right)\mu^2\right)} + 1\right]\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k\|_2. \tag{15}$$

定理 3 假设 $\boldsymbol{x} \in R^n$ 按分块指标集 $\mathcal{I}$ 分块是一个近似 k- 块稀疏信号, $|\mathcal{I}| = l, \boldsymbol{y} \in R^m, \boldsymbol{A} \in R^{m\times n}$ 且 $\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}\|_{\infty,\mathcal{I}} \leqslant \varepsilon, \mathcal{B}(\eta) = \{\boldsymbol{z}: \|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}\|_{\infty,\mathcal{I}} \leqslant \eta\}$, 其中 $\eta \geqslant \varepsilon + \sigma^2(\boldsymbol{A})\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k\|_2$, 若测量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $g(q,k)(t-1)+k$ 阶 b-RIP 且

$$\delta_{g(q,k)(t-1)+k} < \gamma\left(\mu\left(t, \frac{g(q,k)}{k}\right), \frac{g(q,k)}{k}\right),$$

则式(6)能稳定恢复信号 $\boldsymbol{x}$, $\delta := \delta_{g(q,k)(t-1)+k} \in (0,1)$,

$$\|\hat{\boldsymbol{x}}^{DS} - \boldsymbol{x}\|_2 \leqslant \frac{\sqrt{2(g(q,k)(t-1)+k)}\mu(1-\mu)(\varepsilon+\eta)}{\mu^2 - \mu + \delta\left(\frac{1}{2} - \mu + \left(1 + \frac{g(q,k)}{2k(t-1)}\right)\mu^2\right)} + \left[\frac{\sqrt{2(g(q,k)(t-1)+k)}\mu(1-\mu)\sigma^2(\boldsymbol{A})}{\mu^2 - \mu + \delta\left(\frac{1}{2} - \mu + \left(1 + \frac{g(q,k)}{2k(t-1)}\right)\mu^2\right)} + 1\right]\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k\|_2. \tag{16}$$

2.2 主要结果的证明

下面给出定理 1~3 的证明.

首先考虑 $g(q,k)(t-1)$ 是一个整数,假设 $\boldsymbol{x}$ 是近似 k- 块稀疏信号,令 $\boldsymbol{x}_k$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的最佳 k- 块稀疏近似, $T = \mathrm{supp}(\boldsymbol{x}_k)$, 注意此支撑为块支撑.令 $\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{z}$, 可有 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{z}'$.现假设 $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k \in \mathcal{B}, \hat{\boldsymbol{x}}$ 为式(6)最小化解,取 $\boldsymbol{h} = \hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}_k$, 则

$$\|\boldsymbol{x}_k\|_{2,q}^q \geqslant \|\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{h}\|_{2,q}^q = \|\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{h}_T\|_{2,q}^q + \|\boldsymbol{h}_{T^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q \geqslant \|\boldsymbol{x}_k\|_{2,q}^q - \|\boldsymbol{h}_T\|_{2,q}^q + \|\boldsymbol{h}_{T^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q,$$

自然地,有 $\|\boldsymbol{h}_{-\max(k)}\|_{2,q}^q \leqslant \|\boldsymbol{h}_{T^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q \leqslant \|\boldsymbol{h}_T\|_{2,q}^q \leqslant \|\boldsymbol{h}_{\max(k)}\|_{2,q}^q$, 其中 $\boldsymbol{h}_{\max(k)}$ 为保留 $\boldsymbol{h}$ 中 l_2

范数最大的 k 个块的矢量, $\boldsymbol{h}_{-\max(k)}=\boldsymbol{h}-\boldsymbol{h}_{\max(k)}$.现令 $\alpha=k^{-1/q}\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}\|_{2,q}$, 并且将 $\boldsymbol{h}_{-\max(k)}$ 划分为矢量 $\boldsymbol{h}_{T_1},\boldsymbol{h}_{T_2},\cdots$ 的和,其中 T_1 是由 $\boldsymbol{h}_{-\max(k)}$ 中 l_2 范数最大的 $\lceil q^{q/(q-1)}k\rceil$ 个块的块指标构成的指标集,而 T_2 是由 $\boldsymbol{h}_{-\max(k)T_1^C}$ 中 l_2 范数最大的 $\lceil q^{q/(q-1)}k\rceil$ 个块的块指标构成的指标集,依次进行,有 $\boldsymbol{h}_{-\max(k)}=\boldsymbol{h}_{T_1}+\boldsymbol{h}_{T_2}+\cdots$, 此处 $\boldsymbol{h}_{T_j}(j\geqslant 1)$ 的块稀疏度至多是 $\lceil q^{q/(q-1)}k\rceil$. 显然, $k\|\boldsymbol{h}_{-\max(k)}\|_{\infty,\mathcal{I}}^{q}\leqslant\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}\|_{2,q}^{q}=k\alpha^q$, 则 $\|\boldsymbol{h}_{-\max(k)}\|_{\infty,\mathcal{I}}\leqslant\alpha$, 假设

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{h}_{T_1}[1]\|_2\geqslant\cdots\geqslant\|\boldsymbol{h}_{T_1}[\lceil q^{q/(q-1)}k\rceil]\|_2\geqslant\cdots\geqslant\\&\quad\|\boldsymbol{h}_{T_j}[1]\|_2\geqslant\cdots\geqslant\|\boldsymbol{h}_{T_j}[\lceil q^{q/(q-1)}k\rceil]\|_2\geqslant\\&\quad\|\boldsymbol{h}_{T_{j+1}}[1]\|_2\geqslant\cdots\geqslant\|\boldsymbol{h}_{T_{j+1}}[\lceil q^{q/(q-1)}k\rceil]\|_2\geqslant\cdots,\qquad\forall j\geqslant 1.\end{aligned}\tag{17}$$

令

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}_j=(&0,\cdots,0,\|\boldsymbol{h}_{T_j}[1]\|_2,\|\boldsymbol{h}_{T_j}[2]\|_2,\cdots,\\&\|\boldsymbol{h}_{T_j}[\lceil q^{q/(q-1)}k\rceil]\|_2,0,\cdots,0)\in R^l,\qquad\forall j\geqslant 1.\end{aligned}$$

由引理 4 有 $\forall j\geqslant 1$,

$$\|\boldsymbol{d}_j\|_1\leqslant\lceil q^{q/(q-1)}k\rceil^{1-1/q}\|\boldsymbol{d}_j\|_q+p_q\lceil q^{q/(q-1)}k\rceil(\|\boldsymbol{d}_j\|_\infty-\|\boldsymbol{d}_j\|_{-\infty}),$$

又由 $\|\boldsymbol{d}_j\|_2=\|\boldsymbol{h}_{T_j}\|_2$, $\|\boldsymbol{d}_j\|_q=\|\boldsymbol{h}_{T_j}\|_{2,q}$ 且

$$\|\boldsymbol{d}_j\|_1=\sum_{i=1}^{\lceil q^{q/(q-1)}k\rceil}\|\boldsymbol{h}_{T_j}[i]\|_2=\|\boldsymbol{h}_{T_j}\|_{2,1},$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant\lceil q^{q/(q-1)}k\rceil}|\boldsymbol{d}_j(i)|=\|\boldsymbol{d}_j\|_\infty=\|\boldsymbol{h}_{T_j}\|_{\infty,\mathcal{I}}=\|\boldsymbol{h}_{T_j}[1]\|_2,$$

$$\min_{1\leqslant i\leqslant\lceil q^{q/(q-1)}k\rceil}|\boldsymbol{d}_j(i)|=\|\boldsymbol{d}_j\|_{-\infty}=\min_{1\leqslant i\leqslant\lceil q^{q/(q-1)}k\rceil}\|\boldsymbol{h}_{T_j}[i]\|_2=\|\boldsymbol{h}_{T_j}[\lceil q^{q/(q-1)}k\rceil]\|_2,$$

则有

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{h}_{T_j}\|_{2,1}\leqslant\lceil q^{q/(q-1)}k\rceil^{1-1/q}\|\boldsymbol{h}_{T_j}\|_{2,q}+\\&\quad p_q\lceil q^{q/(q-1)}k\rceil(\|\boldsymbol{h}_{T_j}[1]\|_2-\|\boldsymbol{h}_{T_j}[\lceil q^{q/(q-1)}k\rceil]\|_2).\end{aligned}\tag{18}$$

因此,根据 $g(q,k)$ 定义,对任意 $j\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{h}_{-\max(k)}\|_{2,1}=\sum_{j\geqslant 1}\|\boldsymbol{h}_{T_j}\|_{2,1}\leqslant\\&\quad\lceil q^{q/(q-1)}k\rceil^{1-1/q}\sum_{j\geqslant 1}\|\boldsymbol{h}_{T_j}\|_{2,q}+p_q\lceil q^{q/(q-1)}k\rceil\|\boldsymbol{h}_{T_1}[1]\|_2\leqslant\\&\quad\lceil q^{q/(q-1)}k\rceil^{1-1/q}\left(\sum_{j\geqslant 1}\|\boldsymbol{h}_{T_j}\|_{2,q}^q\right)^{1/q}+p_q\lceil q^{q/(q-1)}k\rceil\|\boldsymbol{h}_{T_1}[1]\|_2\leqslant\\&\quad\lceil q^{q/(q-1)}k\rceil^{1-1/q}k^{1/q}\alpha+p_q\lceil q^{q/(q-1)}k\rceil\alpha\leqslant g(q,k)\alpha.\end{aligned}\tag{19}$$

现将 $\boldsymbol{h}_{-\max(k)}$ 划分为两个部分: $\boldsymbol{h}_{-\max(k)}=\boldsymbol{h}^{(1)}+\boldsymbol{h}^{(2)}$, 此处

$$\boldsymbol{h}^{(1)}:=\boldsymbol{h}_{-\max(k)}\cdot 1_{\{i:\|\boldsymbol{h}_{-\max(k)}[i]\|_2>\alpha/(t-1)\}},$$

$$\boldsymbol{h}^{(2)}:=\boldsymbol{h}_{-\max(k)}\cdot 1_{\{i:\|\boldsymbol{h}_{-\max(k)}[i]\|_2\leqslant\alpha/(t-1)\}}.$$

因 $\|\boldsymbol{h}^{(1)}\|_{2,1}\leqslant\|\boldsymbol{h}_{-\max(k)}\|_{2,1}\leqslant g(q,k)\alpha$, 并且 $\boldsymbol{h}^{(1)}$ 中非零块的 l_2 范数均大于 $\alpha/(t-1)$, 因此, $\boldsymbol{h}^{(1)}$ 是 $[g(q,k)(t-1)]$- 块稀疏矢量,现令 $\|\boldsymbol{h}^{(1)}\|_{2,0}=m$, 则

$$\begin{cases}\|\boldsymbol{h}^{(2)}\|_{2,1}=\|\boldsymbol{h}_{-\max(k)}\|_{2,1}-\|\boldsymbol{h}^{(1)}\|_{2,1}\leqslant[g(q,k)(t-1)-m]\dfrac{\alpha}{t-1},\\\|\boldsymbol{h}^{(2)}\|_{\infty,\mathcal{I}}=\max\limits_i\|\boldsymbol{h}^{(2)}[i]\|_2\leqslant\dfrac{\alpha}{t-1}.\end{cases}\tag{20}$$

由引理 3 知 $\boldsymbol{h}^{(2)}=\sum_{i=1}^N\lambda_i\boldsymbol{u}_i$, 其中 $\boldsymbol{u}_i\in R^n$ 是 s- 块稀疏矢量, $s=g(q,k)(t-1)-m$, $\|\boldsymbol{u}_i\|_{2,1}$

$=\|\boldsymbol{h}^{(2)}\|_{2,1}$，$\|\boldsymbol{u}_i\|_{\infty,\mathcal{I}}\leqslant\alpha/(t-1)$.因此

$$\|\boldsymbol{u}_i\|_2\leqslant\sqrt{\|\boldsymbol{u}_i\|_{\infty,\mathcal{I}}\|\boldsymbol{u}_i\|_{2,1}}\leqslant$$
$$\sqrt{[g(q,k)(t-1)-m]\frac{\alpha}{t-1}\cdot\frac{\alpha}{t-1}}\leqslant\sqrt{\frac{g(q,k)}{t-1}}\alpha.$$

因 $\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}\|_2^2\geqslant k^{1-2/q}\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}\|_{2,q}^2=k^{1-2/q}(k\alpha^q)^{2/q}=k\alpha^2$，自然地，有

$$\|\boldsymbol{u}_i\|_2\leqslant\sqrt{\frac{g(q,k)}{t-1}}\alpha\leqslant\sqrt{\frac{g(q,k)}{k}}\frac{\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}\|_2}{\sqrt{t-1}}\leqslant\sqrt{\frac{g(q,k)}{k}}\frac{\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)}\|_2}{\sqrt{t-1}}.$$

又 $\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)}\|_{2,0}\leqslant k+m\leqslant g(q,k)(t-1)+k$，假设存在某个 $\rho\geqslant0$，使

$$\langle\boldsymbol{A}(\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)}),\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}\rangle\leqslant\rho\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)}\|_2. \tag{21}$$

对任意 $\mu\geqslant0$，令 $\boldsymbol{\eta}_i=\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)}+\mu\boldsymbol{u}_i$，有

$$\sum_{j=1}^N\lambda_j\boldsymbol{\eta}_j-\frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}_i=\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)}+\mu\boldsymbol{h}^{(2)}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}_i=$$
$$\left(\frac{1}{2}-\mu\right)(\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)})-\frac{1}{2}\mu\boldsymbol{u}_i+\mu\boldsymbol{h}, \tag{22}$$

此处 $\boldsymbol{\eta}_i$，$\sum_{j=1}^N\lambda_j\boldsymbol{\eta}_j-\frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}_i-\mu\boldsymbol{h}$ 均是 $[g(q,k)(t-1)+k]$-块稀疏矢量，则很容易检验如下等式：

$$\sum_{i=1}^N\lambda_i\left\|\boldsymbol{A}\left(\sum_{j=1}^N\lambda_j\boldsymbol{\eta}_j-\frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}_i\right)\right\|_2^2=\sum_{i=1}^N\frac{\lambda_i}{4}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_i\|_2^2.$$

令 $\mu=\mu(t,g(q,k)/k)>0,\delta:=\delta_{g(q,k)(t-1)+k}\in(0,1)$，则

$$0=\sum_{i=1}^N\lambda_i\left\|\boldsymbol{A}\left[(\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)}+\mu\boldsymbol{h}^{(2)})-\frac{1}{2}(\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)}+\mu\boldsymbol{u}_i)\right]\right\|_2^2-$$
$$\sum_{i=1}^N\frac{\lambda_i}{4}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_i\|_2^2=$$
$$\sum_{i=1}^N\lambda_i\left\|\boldsymbol{A}\left[\left(\frac{1}{2}-\mu\right)(\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)})-\frac{\mu}{2}\boldsymbol{u}_i+\mu\boldsymbol{h}\right]\right\|_2^2-\sum_{i=1}^N\frac{\lambda_i}{4}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_i\|_2^2=$$
$$\sum_{i=1}^N\lambda_i\left\|\boldsymbol{A}\left[\left(\frac{1}{2}-\mu\right)(\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)})-\frac{\mu}{2}\boldsymbol{u}_i\right]\right\|_2^2+$$
$$2\left\langle\boldsymbol{A}\left[\left(\frac{1}{2}-\mu\right)(\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)})-\frac{\mu}{2}\boldsymbol{h}^{(2)}\right],\mu\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}\right\rangle+$$
$$\mu^2\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}\|_2^2-\sum_{i=1}^N\frac{\lambda_i}{4}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_i\|_2^2=$$
$$\sum_{i=1}^N\lambda_i\left\|\boldsymbol{A}\left[\left(\frac{1}{2}-\mu\right)(\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)})-\frac{\mu}{2}\boldsymbol{u}_i\right]\right\|_2^2+$$
$$\mu(1-\mu)\langle\boldsymbol{A}(\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)}),\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}\rangle-\sum_{i=1}^N\frac{\lambda_i}{4}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_i\|_2^2\leqslant$$
$$\sum_{i=1}^N\lambda_i\left[(1+\delta)\left(\frac{1}{2}-\mu\right)^2\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)}\|_2^2+\frac{\mu^2}{4}\|\boldsymbol{u}_i\|_2^2\right]+$$
$$\mu(1-\mu)\rho\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)}\|_2-$$

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda_i}{4}(\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)}\|_2^2+\mu^2\|\boldsymbol{u}_i\|_2^2)=$$
$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\left[\left((1+\delta)\left(\frac{1}{2}-\mu\right)^2-\frac{1-\delta}{4}\right)\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)}\|_2^2+\frac{1}{2}\delta\mu^2\|\boldsymbol{u}_i\|_2^2\right]+$$
$$\mu(1-\mu)\rho\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)}\|_2=$$
$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\left[\left((1+\delta)\left(\frac{1}{2}-\mu\right)^2-\frac{1-\delta}{4}\right)X^2+\delta\mu^2\frac{g(q,k)}{2k(t-1)}X^2\right]+\mu(1-\mu)\rho X\leqslant$$
$$\left[\mu^2-\mu+\delta\left(\frac{1}{2}-\mu+\left(1+\frac{g(q,k)}{2k(t-1)}\right)\mu^2\right)\right]X^2+\mu(1-\mu)\rho X, \tag{23}$$

其中 $X:=\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)}\|_2$ 是式(23)的独立变量.若想要关于 $\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)}\|_2$ 的解有上界,则不等式(23)的二次项系数应小于零,即

$$\mu^2-\mu+\delta\left(1+\frac{g(q,k)}{2k(t-1)}\mu^2\right)=$$
$$\left(\frac{1}{2}-\mu+\left(1+\frac{g(q,k)}{2k(t-1)}\right)\mu^2\right)\left[\delta-\gamma\left(\mu\left(t,\frac{g(q,k)}{k}\right),\frac{g(q,k)}{k}\right)\right]<0.$$

因此有

$$\delta_{g(q,k)(t-1)+k}<\gamma\left(\mu\left(t,\frac{g(q,k)}{k}\right),\frac{g(q,k)}{k}\right),$$

且

$$\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)}\|_2\leqslant\frac{\mu(\mu-1)\rho}{\mu^2-\mu+\delta\left(\frac{1}{2}-\mu+\left(1+\frac{g(q,k)}{2k(t-1)}\right)\mu^2\right)}. \tag{24}$$

若 $g(q,k)(t-1)$ 不是一个整数,则令 $t'=\lceil g(q,k)(t-1)\rceil/g(q,k)+1$,有 $t'>t$ 且 $g(q,k)(t'-1)$ 是一个整数,从以上推导,可知:若

$$\delta=\delta_{g(q,k)(t-1)+k}=\delta_{g(q,k)(t'-1)+k}<\gamma\left(\mu\left(t',\frac{g(q,k)}{k}\right),\frac{g(q,k)}{k}\right),$$

则式(24)成立.现利用函数 $\gamma(\mu(t,\theta),\theta)$ 对固定 θ,在 $t\geqslant0$ 上的非递减性,得到

$$\delta_{g(q,k)(t'-1)+k}=\delta_{g(q,k)(t-1)+k}<\gamma\left(\mu\left(t,\frac{g(q,k)}{k}\right),\frac{g(q,k)}{k}\right)<$$
$$\gamma\left(\mu\left(t',\frac{g(q,k)}{k}\right),\frac{g(q,k)}{k}\right).$$

则条件

$$\delta_{g(q,k)(t-1)+k}<\gamma\left(\mu\left(t,\frac{g(q,k)}{k}\right),\frac{g(q,k)}{k}\right)$$

仍能保证式(23)关于 $\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)}\|_2$ 的解有上界,又因 $\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}\|_{2,q}\geqslant\|\boldsymbol{h}_{-\max(k)}\|_{2,q}$,可有 $\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}\|_2\geqslant\|\boldsymbol{h}_{-\max(k)}\|_2$,

$$\|\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}_k\|_2=\|\boldsymbol{h}\|_2=\sqrt{\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}\|_2^2+\|\boldsymbol{h}_{-\max(k)}\|_2^2}\leqslant$$
$$\sqrt{2}\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}\|_2\leqslant\sqrt{2}\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)}\|_2,$$

然后

$$\|\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}\|_2\leqslant\|\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}_k\|_2+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_k\|_2\leqslant$$

$$\sqrt{2}\,\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)}\|_2+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_k\|_2\leqslant \frac{\sqrt{2}\mu(\mu-1)\rho}{\mu^2-\mu+\delta\left(\frac{1}{2}-\mu+\left(1+\frac{g(q,k)}{2k(t-1)}\right)\mu^2\right)}+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_k\|_2. \tag{25}$$

下面分别讨论无噪及两种有噪情形:

(i) 无噪情形

若 $\boldsymbol{x}$ 是 k- 块稀疏信号,则 $\boldsymbol{Ah}=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{Ax}_k=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$, 因此,在式(21)中,令 $\rho=0$, 则由式(25)有 $\|\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}\|_2=0$, 这表示块稀疏信号 $\boldsymbol{x}$ 被准确恢复,证明成立.

(ii) 有噪情形 $\mathcal{B}(\eta)=\{z:\|z\|_2\leqslant\eta\}$

若 $\boldsymbol{x}$ 是近似 k- 块稀疏信号, $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Ax}\|_2\leqslant\varepsilon$, $\sigma(\boldsymbol{A})$ 代表 $\boldsymbol{A}$ 的谱范数,则

$$\begin{aligned}&\langle\boldsymbol{A}(\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)}),\boldsymbol{Ah}\rangle\leqslant\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)})\|_2\|\boldsymbol{Ah}\|_2\leqslant\\&\quad\sqrt{1+\delta}\,\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)}\|_2(\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}\|_2+\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Ax}\|_2+\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_k)\|_2)\leqslant\\&\quad\sqrt{1+\delta}(\varepsilon+\eta+\sigma(\boldsymbol{A})\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_k\|_2)\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)}\|_2.\end{aligned}$$

此时,若 $\eta\geqslant\varepsilon+\sigma(\boldsymbol{A})\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_k\|_2$, 则假设 $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Ax}_k\in\mathcal{B}$ 成立.在式(21)中,令 $\rho=\sqrt{1+\delta}(\varepsilon+\eta+\sigma(\boldsymbol{A})\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_k\|_2)$, 有

$$\|\hat{\boldsymbol{x}}^{l_2}-\boldsymbol{x}\|_2\leqslant \frac{\sqrt{2(1-\delta)}\mu(1-\mu)(\varepsilon+\eta+\sigma(\boldsymbol{A})\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_k\|_2)}{\mu^2-\mu+\delta\left(\frac{1}{2}-\mu+\left(1+\frac{g(q,k)}{2k(t-1)}\right)\mu^2\right)}+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_k\|_2. \tag{26}$$

(iii) 有噪情形 $\mathcal{B}(\eta)=\{z:\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}z\|_{\infty,\mathcal{I}}\leqslant\eta\}$

若 $\boldsymbol{x}$ 是近似 k- 块稀疏信号, $\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Ax})\|_{\infty,\mathcal{I}}\leqslant\varepsilon$, $\sigma(\boldsymbol{A})$ 代表 $\boldsymbol{A}$ 的谱范数,则

$$\begin{aligned}&\langle\boldsymbol{A}(\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)}),\boldsymbol{Ah}\rangle\leqslant\\&\quad\langle\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ah}\rangle\leqslant\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)}\|_{2,1}\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ah}\|_{\infty,\mathcal{I}}\leqslant\\&\quad\sqrt{g(q,k)(t-1)+k}\,\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)}\|_2\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ah}\|_{\infty,\mathcal{I}}\leqslant\\&\quad\sqrt{g(q,k)(t-1)+k}\,\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)}\|_2(\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}})\|_{\infty,\mathcal{I}}+\\&\quad\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Ax})\|_{\infty,\mathcal{I}}+\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{Ax}_k)\|_{\infty,\mathcal{I}})\leqslant\\&\quad\sqrt{g(q,k)(t-1)+k}\,\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)}\|_2(\varepsilon+\eta+\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_k)\|_{\infty,\mathcal{I}})\leqslant\\&\quad\sqrt{g(q,k)(t-1)+k}\,\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}+\boldsymbol{h}^{(1)}\|_2(\varepsilon+\eta+\sigma^2(\boldsymbol{A})\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_k\|_2).\end{aligned}$$

此时,若 $\eta\geqslant\varepsilon+\sigma^2(\boldsymbol{A})\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_k\|_2$, 则假设 $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Ax}_k\in\mathcal{B}$ 成立.在式(21)中,令 $\rho=\sqrt{g(q,k)(t-1)+k}(\varepsilon+\eta+\sigma^2(\boldsymbol{A})\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_k\|_2)$, 有

$$\|\hat{\boldsymbol{x}}^{DS}-\boldsymbol{x}\|_2\leqslant \frac{\sqrt{2(g(q,k)(t-1)+k)}\mu(1-\mu)(\varepsilon+\eta+\sigma^2(\boldsymbol{A})\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_k\|_2)}{\mu^2-\mu+\delta\left(\frac{1}{2}-\mu+\left(1+\frac{g(q,k)}{2k(t-1)}\right)\mu^2\right)}+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_k\|_2. \tag{27}$$

综上,定理得证.

2.3 重建块稀疏信号的 k 阶 b-RIP 条件

本小节给出对任意 $q\in(0,1]$, 混合 $l_2/l_q(0<q\leqslant1)$ 最小化准确重建块稀疏信号的 k 阶

b-RIP 条件.

定理 4　将信号按分块指标集 $\mathcal{I}$ 进行分块,对任意 $q\in(0,1]$, 若测量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\delta_{k|\mathcal{I}}+\theta_{k,k}(\lceil g(q,k)\rceil/k)<1$, 则利用混合 l_2/l_q 最小化能准确恢复块稀疏信号.特别地,当 $q=1$ 或 $q^{(q/(q-1))k}$ 为整数时,有 $\delta_{k|\mathcal{I}}+\theta_{k,k}<1$.

证明　显然混合 $l_2/l_q(0<q\leqslant 1)$ 最小化准确恢复块稀疏信号仅需验证

$$\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}\|_{2,q}^{q}<\|\boldsymbol{h}_{-\max(k)}\|_{2,q}^{q},\qquad \forall\boldsymbol{h}\in\mathcal{N}(\boldsymbol{A})\setminus\{0\}.$$

令 $\alpha=\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}\|_{2,q}/k^{1/q}$, 由引理 2, $\|\boldsymbol{h}_{-\max(k)}\|_{2,1}\leqslant g(q,k)\alpha\leqslant\lceil g(q,k)\rceil\alpha$ 且 $\|\boldsymbol{h}_{-\max(k)}\|_{\infty,\mathcal{I}}\leqslant\alpha$, 则

$$\begin{aligned}
|\langle\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_{\max(k)},\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_{-\max(k)}\rangle| &\leqslant \theta_{k,\lceil g(q,k)\rceil}\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}\|_2\sqrt{\lceil g(q,k)\rceil}\alpha\leqslant\\
&\theta_{k,k}\sqrt{\frac{\lceil g(q,k)\rceil}{k}}\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}\|_2\sqrt{\lceil g(q,k)\rceil}\alpha\leqslant\\
&\theta_{k,k}\frac{\lceil g(q,k)\rceil}{k}\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}\|_2^2.
\end{aligned}$$

无噪情形,即当 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}=\boldsymbol{0}$ 时,可有

$$\begin{aligned}
0=|\langle\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_{\max(k)},\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}\rangle| &\geqslant|\langle\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_{\max(k)},\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_{\max(k)}\rangle|-|\langle\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_{\max(k)},\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_{-\max(k)}\rangle|\geqslant\\
&\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_{\max(k)}\|_2^2-\theta_{k,k}\frac{\lceil g(q,k)\rceil}{k}\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}\|_2^2\geqslant\\
&\left(1-\delta_{k|\mathcal{I}}-\theta_{k,k}\frac{\lceil g(q,k)\rceil}{k}\right)\|\boldsymbol{h}_{\max(k)}\|_2^2>0.
\end{aligned}$$

因此,若测量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\delta_{k|\mathcal{I}}+\theta_{k,k}(\lceil g(q,k)\rceil/k)<1$, 利用混合 l_2/l_q 最小化能准确恢复块稀疏信号.又由引理 5 有:

当 $k\geqslant 2$ 且为偶数时,

$$\delta_{k|\mathcal{I}}+\frac{g(q,k)}{k}\theta_{k,k}<\left(1+\frac{2\lceil g(q,k)\rceil}{k}\right)\delta_{k|\mathcal{I}}<1\Rightarrow\delta_{k|\mathcal{I}}<1\Big/\left(1+\frac{2\lceil g(q,k)\rceil}{k}\right);$$

当 $k\geqslant 3$ 且为奇数时,

$$\delta_{k|\mathcal{I}}+\frac{g(q,k)}{k}\theta_{k,k}<\left(1+\frac{2\lceil g(q,k)\rceil}{\sqrt{k^2-1}}\right)\delta_{k|\mathcal{I}}<1\Rightarrow\delta_{k|\mathcal{I}}<1\Big/\left(1+\frac{2\lceil g(q,k)\rceil}{\sqrt{k^2-1}}\right).$$

3　总　　结

本文主要考虑从欠定的线性测量系统中恢复块稀疏信号.基于 b-RIP 框架,得到新的充分条件:

$$\delta_{g(q,k)(t-1)+k}<\gamma\left(\mu\left(t,\frac{g(q,k)}{k}\right),\frac{g(q,k)}{k}\right),$$

并且表明在此条件下,可用混合 $l_2/l_q(0<q\leqslant 1)$ 最小化准确重建所有 k- 块稀疏信号.根据文献[19]中的分析可知:此结果并不是最优的,虽然对某些特殊的 $(q,k)s$ 取值,如 $q=1/2,\forall k\geqslant 1$; $(0.202\,5,2)$; $(2/3,4)$ 等, $\delta_{g(q,k)(t-1)+k}<\gamma\left(\mu\left(t,\frac{g(q,k)}{k}\right),\frac{g(q,k)}{k}\right)$ 为紧性 b-RIP 条件,但是对更多的 $(q,k)s$, 此条件仅是充分的,甚至是非常不好的.因此,当取这些 $(q,k)s$ 时,如何提升相应的 b-RIP 条件仍是一个值得深入研究与探讨的问题.

参考文献(References):

[1] DONOHO D. Compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**(4): 1289-1306.

[2] CANDES E J, ROMBERG J, TAO T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements[J]. *Communications Pure and Applied Mathematics*, 2006, **59**(8): 1207-1223.

[3] CANDES E J. The restrictedisometry property and its implications for compressed sensing[J]. *Comptes Rendus Mathematique*, 2008, **346**(9/10): 589-592.

[4] CAI T, WANG L, XU G W. New bounds for restricted isometry constants[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, **56**(9): 4388-4394.

[5] CAI T, ZHANG A R. Compressed sensing and affine rank minimization under restricted isometry[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, **61**(13): 3279-3290.

[6] FOUCART S. A note on guaranteed sparse recovery via l_1-minimization[J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2010, **29**(1): 97-103.

[7] DAVIES M, GRIBONVAL R. Restricted isometry constants where l_p sparse recovery can fail for $0 < p \leqslant 1$[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, **55**(5): 2203-2214.

[8] LUSTIG M, DONOHO D L, PAULY J M. Rapid MR imaging with compressed sensing and randomly under-sampled 3DFT trajectories[C]//*Proceeding of the 14th Annual Meeting of ISMRM.* Seattle, USA, 2006.

[9] DUARTE M, DAVENPORT M, TAKBAR D, et al. Single-pixel imaging via compressive sampling[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, **25**(2): 83-91.

[10] BARANIUK R, STEEGHS P. Compressive radar imaging[C]//*Proceeding of the IEEE Radar Conference.* Washington DC, USA, 2007.

[11] BAJWA W, HAUPT J, SAYEED A, et al. Joint source-channel communication for distributed estimation in sensor networks[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, **53**(10): 3629-3653.

[12] ELDER Y, MISHALI M. Robust recovery of signals from a structured union of subspaces[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, **55**(11): 5302-5316.

[13] MISHALI M, ELDAR Y. Blind multiband signalreconstruction: compressed sensing for analog signals[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, **57**(3): 993-1009.

[14] DAI W, SHEIKH M A, MILENKOVIC O, et al. Compressed sensing DNA microarrays[J]. *EURASIP Journal on Bioinformatics and Systerms Biology*, 2009, **2009**(1): 162824.

[15] ENDER J. On compressive sensing applied to radar[J]. *Signal Processing*, 2010, **90**(5): 1402-1414.

[16] YANG Z, XIE L. Continuous compressed sensing with a single or multiple measurement vectors[C]//*2014 IEEE Workshop on Statistical Signal Processing*(*SSP*), 2014: 308-311. DOI: 10.1109/SSP.2014.6884632.

[17] LIN J H, LI S. Block sparse recovery via mixed l_2/l_1 minimization[J]. *Acta Mathematica Sinica*, 2013, **29**(7): 1401-1412.

[18] CHEN W, LI Y. The high order block RIP condition for signal recovery[J]. *Journal of Computational Mathematics*, 2016, **37**(1): 61-75.

[19] ZHOU Shenglong, KONG Lingchen, LUO Ziyan, et al. New RIC bounds via l_q-minimization with $0 < q \leqslant 1$ in compressed sensing[R/OL]. [2018-05-25]. https://arxiv.org/pdf/1308.0455.pdf.

Improved Conditions for Block-Sparse Signal Recovery via the Non-Convex Optimization Model

ZHOU Jun, HUANG Wei
(*School of Mathematics*, *Hefei University of Technology*,
Hefei 230009, *P.R.China*)

Abstract: Compressed sensing (CS) is a newly developed theoretical framework for information acquisition and processing, which shows that sparse signals can be recovered exactly from far less samples than those required by the classical Shannon-Nyquist theorem. The block-sparse signal recovery algorithm under the compressed sensing framework was mainly studied, and a class of improved exact recovery conditions based on the block restricted isometry property (RIP) were established in the noiseless cases via the mixed $l_2/l_q (0 < q \leqslant 1)$ norm minimization. Furthermore, the error analysis results were given in the noisy cases.

Key words: compressed sensing; block-RIP; block-sparse signal; mixed l_2/l_q norm minimization

Foundation item: The Major Research Plan of the National Natural Science Foundation of China(91538112); The National Science Fund for Young Scholars of China (11201450)

引用本文/Cite this paper:
周珺, 黄尉. 基于非凸优化模型的块稀疏信号恢复条件[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(2): 167-180.
ZHOU Jun, HUANG Wei. Improved conditions for block-sparse signal recovery via the non-convex optimization model[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(2): 167-180.