

# 柔性圆柱形微管道内的电动流动及传热研究\*

许丽娜, 菅永军

(内蒙古大学 数学科学学院, 呼和浩特 010021)

**摘要:** 研究了在纯压力驱动下, 流体通过壁面带有某种电荷的聚电解质层(PEL)的微管道, 即柔性微管道的电动流动和热传输特性。基于先前得到的电势和速度的解析解以及流向势的数值解, 在热充分发展的情况下, 假设壁面热流恒定, 利用有限差分法求解了包括黏性耗散和 Joule(焦耳)热影响下的能量方程, 获得了无量纲温度数值解。通过数值计算, 给出了相关的无量纲参数对速度、温度以及 Nusselt(努赛尔)数的影响。研究表明, 当其他参数固定时, 无量纲速度和温度随着无量纲聚电解质层厚度  $d$  的增大而减小, 随着聚电解质层中等效双电层厚度与双电层厚度之比  $K_\lambda$  的增大而增大; Nusselt 数随着 Joule 热系数  $S$  的增大而减小, 随无量纲聚电解质层厚度  $d$  的增大而减小, 随着  $K_\lambda$  的增大而增大。

**关键词:** 柔性圆柱形微管道; 热传输; 流向势; Nusselt 数

**中图分类号:** O357.1

**文献标志码:** A

**DOI:** 10.21656/1000-0887.390155

## 引言

随着微芯片技术的不断发展, 人们对微纳流控系统中流体的驱动与控制技术广泛关注, 并且, 微纳米设备已经应用于热交换器、化学分离装置、微泵、实验室芯片系统、生物和医学诊断等诸多领域<sup>[1-2]</sup>。在实际应用中, 流体流动通常是由压力梯度、电场、磁场进行有效地驱动<sup>[3-6]</sup>。在微管道中, 当带电表面与电解质溶液接触时, 电解质反离子有向带电表面移动的倾向, 会形成具有高浓度反离子的双电层(EDL)<sup>[3]</sup>。在压力梯度的影响下, 双电层中会形成流向电流, 流向电流方向与流体流动的方向相同<sup>[7]</sup>。由于电解质溶液流动会使管道下游聚集大量净电荷, 导致管道下游电势高于管道上游电势。因此, 管道内会产生电势差, 形成诱导电场, 该电场也被称为流动电位或流向势。诱导电场会使溶液中的离子受到与流动方向相反的电场力, 从而在溶液中形成电导流<sup>[8]</sup>, 它的流动方向与流体的流动方向相反。管道中的电动流动会产生 Joule 热, 使电能转化为热能。

在最近的研究中, 电动传输受到人们的广泛关注, 电渗是一种基本的电动力学现象。电渗主要是由双电层和外加电场等界面效应引起的, 一旦受到外加电场影响双电层内的离子就会移动, 并通过黏性效应产生流体流动, 这就是电渗流(EOF)。许多学者在微管道内研究了电渗驱动的流体流动和热传递现象。Maynes 和 Webb<sup>[9]</sup>对圆柱形微管道内的压力和电场联合驱动

\* 收稿日期: 2018-05-29; 修订日期: 2018-08-29

**基金项目:** 国家自然科学基金(11772162; 11472140); 内蒙古自治区自然科学基金(2016MS0106); 内蒙古自治区“草原英才”工程(12000-12102013)

**作者简介:** 许丽娜(1993—), 女, 硕士生(E-mail: 1070461254@qq.com);

菅永军(1974—), 男, 教授, 博士生导师(通讯作者, E-mail: jianyj@imu.edu.cn).

的电渗流动进行了热分析,考虑了黏性耗散的影响,结果表明黏性耗散效应在大多数实际的电渗流应用中是可以忽略不计的.Horiuchi 和 Dutta<sup>[10]</sup>在热完全发展的情形下,研究了电渗流通过微管道的温度分布和 Nusselt 数的解析解.Ngomu 和 Erchiqui<sup>[11]</sup>在微管道中研究了电渗流的热传输特性和滑移效应.Dey 等<sup>[12]</sup>研究了在厚的双电层情况下,微管道中的热传输特性.Su 和 Jian 等<sup>[3]</sup>在矩形微管道中研究了热完全发展情形下电渗流的速度和温度分布.微管道中的另一种电动现象称为流向势.它与电渗流不同,在没有外加电场的情况下,是由压力梯度驱动流体流动引起的.当溶液中的净离子电流为零时,流体保持恒定流动<sup>[13-14]</sup>.在此过程中,所产生的电导流会使电解质溶液的流动速度减小,总净流量的下降可以用黏度的增强来描述,这种现象被称为电黏效应<sup>[15-16]</sup>.

将带某种电荷的聚电解质层添加在微管道壁面处,这样的微管道被称为柔性微管道.由带有某种离子的固定大分子构成的聚电解质层会对电解质溶液内的静电势分布产生影响.另外,当电解质溶液在聚电解质层流动时,流体会受到额外的阻力.Donath 和 Voigt<sup>[17]</sup>首先对柔性管道的电动理论进行了分析,但是他们忽略了管道中电渗传输的影响.Ohshima 和 Kondo<sup>[18]</sup>研究了具有离子渗透表面的柔性管道中的电渗流动,完善了 Donath 和 Voigt<sup>[17]</sup>的模型.Keh 和 Liu<sup>[19]</sup>在柔性管道中研究了流向势问题.最近,Chanda 等<sup>[20]</sup>研究了柔性管道中的流体在压力驱动影响下的电黏性效应.通过对柔性管道和刚性管道的比较,研究了电解质溶液在两种管道中的流向势和电黏性效应.结果表明,柔性管道中的流向势和电黏性效应与刚性管道相比有显著差异.大多数文献中,用 Debye-Hückel 近似求解 Poisson-Boltzmann (PB) 方程,这种近似在 EDL 中 zeta 势很小时成立.Chen 和 Das<sup>[21]</sup>在高 zeta 势情况下,通过数值求解 PB 方程和 NS 方程,研究了柔性纳米管道内的流向势和电黏性效应.利用速度滑移边界条件,Matin 和 Ohshima<sup>[22]</sup>在柔性纳米管道中研究了电渗和压力驱动流动.随后,Matin 和 Ohshima<sup>[23]</sup>进一步研究了电渗和压力驱动流动的热传输特性.

大多数文献对热传输特性的研究主要集中在刚性微管道中,而在柔性微管道中流体的流动和传热比刚性微管道更具复杂性,尤其是圆柱形微管道.目前,研究有关在柔性微管道中流向势传热问题的相对较少.本文的目的是研究在柔性微管道中压力驱动产生流向势影响下的电动流动和热传输问题.

## 1 数学模型

本文研究的对象为 Newton(牛顿)流体,物理模型的原理图如图 1 所示.

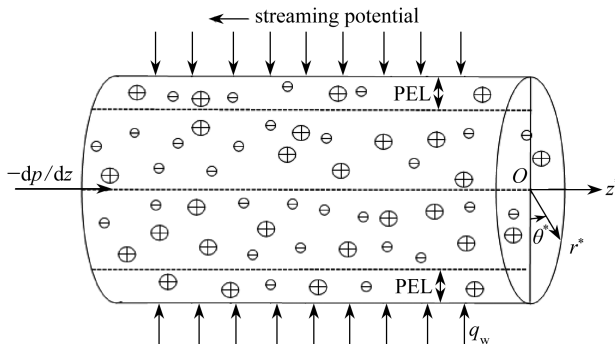


图 1 圆柱形柔性微管道示意图

Fig. 1 Schematic of the cylindrical nanotube

图 1 中圆柱坐标系  $(r^*, \theta^*, z^*)$  建立在圆柱形柔性微管道中心, 其中  $r^*$ ,  $\theta^*$  和  $z^*$  分别是径向坐标、角坐标和轴向坐标. 圆柱形柔性微管道的半径为  $R$ , 在圆柱形微管道的内壁面处添加了厚度为  $d^*$  且带有正电荷的聚电解质层, 管道中的电解质溶液会受到管道轴向方向的压力梯度  $-dp/dz$  驱动而产生流体流动. 虽然没有沿流体流动方向的电场, 但有一个诱导电场  $E_s^*$ , 也称为流向势, 流向势的方向与流体运动方向相反. 此外, 沿管道壁面处有一个均匀和恒定的壁面热流量  $q_w$ , 其中  $q_w$  取正常数. 由于聚电解质层的存在, 电动流动及传热研究中的温度分布需划分为两个不同的层次来进行研究, 也就是聚电解质层和电解质层以外的电解质溶液层.

## 2 温度分布

首先通过求解电势满足的 PB 方程和速度满足的 NS 方程, 得到电势和速度的解析解 (其中速度在壁面处满足无滑移条件), 以及流向势的数值解. 为了简化, 这些结果具体不详细列出, 可以参照文献 [24]. 由得到的速度和流向势的解, 进一步求解能量方程, 得出柔性微管道中的温度分布. 由于聚电解质层的存在, 能量方程需求解聚电解质层  $R - d^* < r^* < R$  和电解质层以外的电解质溶液层  $0 < r^* < R - d^*$  来进行研究. 柔性圆柱形微管道内轴向传导的热能传输控制方程可表示为

$$\rho c_p u^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = k \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} \right] + \mu \left( \frac{du^*}{dr^*} \right)^2 + \sigma_e E_s^{*2}, \quad 0 < r^* < R - d^*, \quad (1a)$$

$$\rho c_p u^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = k \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} \right] + \mu \left( \frac{du^*}{dr^*} \right)^2 + \sigma_e E_s^{*2} + \mu_c u^{*2}, \quad R - d^* < r^* < R, \quad (1b)$$

其中  $c_p$  是液体在恒压下的定压比热容,  $T^*$  为电解质溶液的局部温度,  $k$  是热传导系数,  $\mu_c$  是柔性层内离子的阻力系数. 方程 (1) 右边的第二项和第三项分别表示由黏性耗散生成的体积能和 Joule 热. 进一步地, 考虑热完全发展, 有

$$\frac{\partial}{\partial z^*} \left( \frac{T_w^*(z^*) - T^*(r^*, z^*)}{T_w^*(z^*) - T_m^*(z^*)} \right) = 0, \quad (2)$$

其中  $T_w^*(z^*)$  是壁面温度,  $T_m^*(z^*)$  是平均温度, 在恒定热流边界条件下 (见图 1), 有

$$\frac{dT_w^*}{dz^*} = \frac{dT_m^*}{dz^*} = \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = \text{const}, \quad \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} = 0. \quad (3)$$

将方程 (3) 代入到方程 (1) 中, 得到

$$\rho c_p u^* \frac{dT_m^*}{dz^*} = k \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) \right] + \mu \left( \frac{du^*}{dr^*} \right)^2 + \sigma_e E_s^{*2}, \quad 0 < r^* < R - d^*, \quad (4a)$$

$$\rho c_p u^* \frac{dT_m^*}{dz^*} = k \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) \right] + \mu \left( \frac{du^*}{dr^*} \right)^2 + \sigma_e E_s^{*2} + \mu_c u^{*2}, \quad R - d^* < r^* < R. \quad (4b)$$

对应的边界条件为

$$\left. \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=0} = 0, \quad (T^*) \Big|_{r^*=(R-d^*)^+} = (T^*) \Big|_{r^*=(R-d^*)^-}, \quad (5a)$$

$$\left(\frac{\partial T^*}{\partial r^*}\right) \Big|_{r^*=(R-d^*)^+} = \left(\frac{\partial T^*}{\partial r^*}\right) \Big|_{r^*=(R-d^*)^-}, q_w \Big|_{r^*=R} = k \frac{dT^*}{dr^*} \Big|_{r^*=R}, \text{or } T^* = T_w^*, \quad (5b)$$

其中  $q_w = h(T_w^* - T_m^*)$ ,  $h$  为对流换热系数. 此外, 在基本控制体积上由于总能量平衡, 得到

$$\frac{dT_m^*}{dz^*} = \frac{2Rq_w + \sigma_e E_s^{*2} R^2 + 2 \left[ \int_0^{R-d^*} \mu \left(\frac{du^*}{dr^*}\right)^2 r^* dr^* + \int_{R-d^*}^R \left( \mu \left(\frac{du^*}{dr^*}\right)^2 + \mu_c u^{*2} \right) r^* dr^* \right]}{\rho c_p (R-d^*)^2 (u_{m1}^* - u_{m2}^*) + \rho c_p R^2 u_{m2}^*}, \quad (6)$$

其中  $u_{m1}^*$  和  $u_{m2}^*$  是轴向平均速度, 它们可以用  $u^*$  从微管道中心到聚电解质层以及从聚电解质层再到壁面的积分来表示:

$$u_{m1}^* = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{R-d^*} u^* r^* dr^* d\theta}{\pi (R-d^*)^2} = 2u_{p,0} \beta_{11}, \quad u_{m2}^* = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{R-d^*}^R u^* r^* dr^* d\theta}{\pi [R^2 - (R-d^*)^2]} = 2u_{p,0} \beta_{12}. \quad (7)$$

引入以下无量纲温度:

$$\theta = \frac{T^* - T_w^*}{q_w R/k}. \quad (8)$$

其他的无量纲参数, 如速度  $u$ 、管道半径  $r$ 、聚电解质层的厚度  $d$  和阻力参数  $\alpha$  见文献[24], 则无量纲能量方程可以描述为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) = \frac{\left( 1 + \frac{1}{2} S + Br(\beta_{21} + \beta_{22}) + \alpha^2 Br \beta_{23} \right) u}{(1-d)^2 (\beta_{11} - \beta_{12}) + \beta_{12}} - Br \left( \frac{du}{dr} \right)^2 - S, \quad 0 < r < 1-d, \quad (9a)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) = \frac{\left( 1 + \frac{1}{2} S + Br(\beta_{21} + \beta_{22}) + \alpha^2 Br \beta_{23} \right) u}{(1-d)^2 (\beta_{11} - \beta_{12}) + \beta_{12}} - Br \left( \frac{du}{dr} \right)^2 - S - \alpha^2 u^2 Br, \quad 1-d < r < 1, \quad (9b)$$

边界条件为

$$\frac{d\theta}{dr} \Big|_{r=0} = 0, \quad (\theta) \Big|_{r=(1-d)^+} = (\theta) \Big|_{r=(1-d)^-}, \quad (10a)$$

$$\left( \frac{d\theta}{dr} \right) \Big|_{r=(1-d)^+} = \left( \frac{d\theta}{dr} \right) \Big|_{r=(1-d)^-}, \quad \frac{d\theta}{dr} \Big|_{r=1} = 1, \text{or } \theta \Big|_{r=1} = 0, \quad (10b)$$

其中

$$\begin{cases} S = \frac{\sigma_e E_s^{*2} R}{q_w}, \quad Br = \frac{\mu u_{p,0}^2}{q_w R}, \quad \beta_{11} = (1-d)^{-2} \int_0^{1-d} u r dr, \\ \beta_{12} = [1 - (1-d)^2]^{-1} \int_{1-d}^1 u r dr, \end{cases} \quad (11a)$$

$$\beta_{21} = \int_0^{1-d} \left( \frac{du}{dr} \right)^2 r dr, \quad \beta_{22} = \int_{1-d}^1 \left( \frac{du}{dr} \right)^2 r dr, \quad \beta_{23} = \int_{1-d}^1 r u^2 dr, \quad (11b)$$

参数  $S$  通常称为无量纲 Joule 热参数, 表示 Joule 加热与壁面热流的比值; 参数  $Br$  通常称为 Brinkman (布林克曼) 数, 表示黏性耗散与壁面热流的比值. 因为很难得到  $\beta_{22}$  和  $\beta_{23}$  的解析形式, 故利用有限差分的方法来计算温度分布. 则式 (9) 重新改写为

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} = f(r), \quad 0 < r < 1 - d, \quad (12a)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} = g(r), \quad 1 - d < r < 1, \quad (12b)$$

$$f(r) = \frac{\left(1 + \frac{1}{2} S + Br(\beta_{21} + \beta_{22}) + \alpha^2 Br \beta_{23}\right) u}{(1-d)^2(\beta_{11} - \beta_{12}) + \beta_{12}} - Br \left(\frac{du}{dr}\right)^2 - S, \quad (13a)$$

$$g(r) = \frac{\left(1 + \frac{1}{2} S + Br(\beta_{21} + \beta_{22}) + \alpha^2 Br \beta_{23}\right) u}{(1-d)^2(\beta_{11} - \beta_{12}) + \beta_{12}} - Br \left(\frac{du}{dr}\right)^2 - S - \alpha^2 u^2 Br. \quad (13b)$$

为了保证方程 (9) 的精度, 采用中心差分格式对温度的一阶和二阶导数进行近似:

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\Delta r}, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} = \frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{\Delta r^2}, \quad (14)$$

其中  $\Delta r$  是径向的网格间距. 能量方程 (9) 的差分形式可以表示为

$$\left(\frac{r_i}{\Delta r^2} + \frac{1}{2\Delta r}\right) \theta_{i+1} - \frac{2r_i}{\Delta r^2} \theta_i + \left(\frac{r_i}{\Delta r^2} - \frac{1}{2\Delta r}\right) \theta_{i-1} = r_i f(r_i), \quad i = 2, 3, \dots, N-1, \quad (15a)$$

$$\left(\frac{r_i}{\Delta r^2} + \frac{1}{2\Delta r}\right) \theta_{i+1} - \frac{2r_i}{\Delta r^2} \theta_i + \left(\frac{r_i}{\Delta r^2} - \frac{1}{2\Delta r}\right) \theta_{i-1} = r_i g(r_i), \quad i = N+1, \dots, n. \quad (15b)$$

相应的边界条件 (10) 的差分形式可以表示为

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{\Delta r} = 0, \quad i = 1, \quad (16a)$$

$$\theta_N = \theta_n, \quad \frac{\theta_{N+1} - \theta_N}{\Delta r} = \frac{\theta_N - \theta_{N-1}}{\Delta r}, \quad i = N, \quad (16b)$$

$$\frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{\Delta r} = 0, \text{ or } \theta_n = 0, \quad i = n, \quad (16c)$$

其中  $f(r_i)$  和  $g(r_i)$  表示为

$$f(r_i) = \frac{\left(1 + \frac{1}{2} S + Br(\beta_{21} + \beta_{22}) + \alpha^2 Br \beta_{23}\right) u}{(1-d)^2(\beta_{11} - \beta_{12}) + \beta_{12}} \Big|_{r=r_i} - Br \left(\frac{du}{dr}\right)^2 \Big|_{r=r_i} - S, \quad i = 2, 3, \dots, N-1, \quad (17a)$$

$$g(r_i) = \frac{\left(1 + \frac{1}{2} S + Br(\beta_{21} + \beta_{22}) + \alpha^2 Br \beta_{23}\right) u}{(1-d)^2(\beta_{11} - \beta_{12}) + \beta_{12}} \Big|_{r=r_i} - Br \left(\frac{du}{dr}\right)^2 \Big|_{r=r_i} - S - \alpha^2 u^2 Br \Big|_{r=r_i}, \quad i = N+1, \dots, n. \quad (17b)$$

将离散能量方程 (15) 转化为线性三对角矩阵和无量纲温度, 结合适当的离散边界条件

(16), 可利用三对角矩阵的 Thomas 算法对方程(15)进行数值计算. 根据得到的速度和温度分布, 无量纲平均温度的表达式可以写为

$$\theta_m = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^1 u \theta r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^1 u r dr d\theta} = k \frac{T_m^* - T_w^*}{q_w R}. \quad (18)$$

表征对流换热强度的无量纲 Nusselt 数  $Nu$  可以表示为

$$Nu = \frac{2Rq_w}{k(T_w^* - T_m^*)}. \quad (19)$$

结合方程(18)和方程(19),  $Nu$  最终可表示为

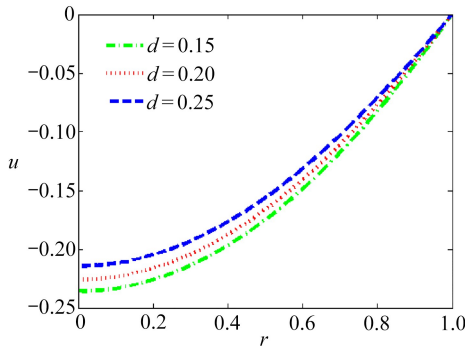
$$Nu = -\frac{2}{\theta_m}. \quad (20)$$

基于上述速度和温度分布的解,  $Nu$  可以数值计算.

### 3 讨论与结果

本文计算结果中, 无量纲参数的取值需要满足线性化近似条件. 正如在文献[20]中所证明的, 当  $K_\lambda \leq 1$  时, Debye-Hückel 线性化近似将不能精确地预测柔性微管道内的静电势分布, 因此本文中要求  $K_\lambda \geq 1$  ( $K_\lambda$  为聚电解质层中的等效双电层厚度与双电层厚度之比, 其中等效双电层厚度为聚电解质层内静电势(指聚电解质层和电解质溶液界面处的电势)被屏蔽的距离). 同时, 为了防止由于局部带电粒子重新排列造成的电势不连续性,  $d$  的取值范围应满足  $d \leq \lambda^{[20]}$ . 为了满足连续介质的假设, 设定微管道的直径为  $2R = 20 \sim 500 \mu\text{m}$ . 一些典型的参数取值如下: 溶液的动态黏性系数  $\mu = 10^{-3} \sim 1.5 \times 10^{-3} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$ , 电导率  $\sigma_e = 2.2 \times 10^{-4} \sim 4 \times 10^3 \text{ S}/\text{m}$ ,  $k_B$  为  $1.381 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $u_{p,0} = 5 \times 10^{-3} \text{ S}/\text{m}$ , Brinkman 数  $Br$  由 0 变化到 0.1, Joule 热参数  $S$  由 0 变化到 10. 图中的参数  $\lambda$  表示双电层的厚度,  $u_r$  表示纯电渗速度与纯压力驱动的速度之比,  $K$  表示 Péclet (沛克莱) 数.

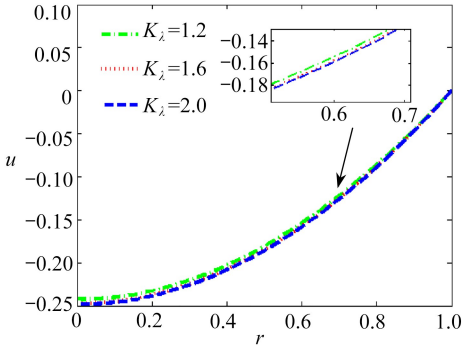
图 2(a)、图 2(b) 和图 2(c) 分别描述了当无量纲厚度  $d$ 、聚电解质层中的等效双电层厚度与双电层厚度之比  $K_\lambda$  和无量纲阻力系数  $\alpha$  取不同值时, 圆柱形微管道中电解质溶液的无量纲速度分布.



( $\lambda = 0.25, K = 1, \alpha = 1, u_r = 0.1, K_\lambda = 1$ )

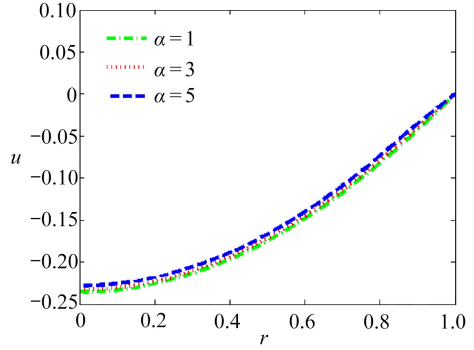
图 2(a) 速度随  $d$  的变化曲线

Fig. 2(a) Variations of the dimensionless velocity with  $d$



( $\lambda = 0.25, K = 1, \alpha = 1, u_r = 0.1, d = 0.15$ )

图 2(b) 速度随  $K_\lambda$  的变化曲线

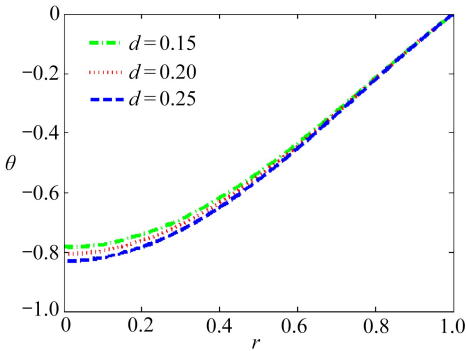


( $\lambda = 0.25, K = 1, u_r = 0.1, K_\lambda = 1, d = 0.15$ )

图 2(c) 速度随  $\alpha$  的变化曲线

Fig. 2(b) Variations of the dimensionless velocity with  $K_\lambda$  Fig. 2(c) Variations of the dimensionless velocity with  $\alpha$

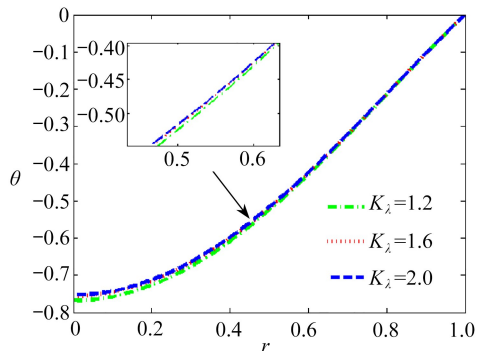
图 2(a) 表明当其他参数固定时,随着无量纲厚度  $d$  的增加,柔性微管道中无量纲速度在减小.原因是当无量纲厚度  $d$  增加会导致电解质溶液的流向势增加,流向势的方向与流体流动的方向相反,进而导致无量纲速度减小.图 2(b) 表明当其他参数固定时,随着  $K_\lambda$  的增加,柔性微管道中的无量纲速度增加.从物理上来说,一个更大的聚电解质层中的等效双电层厚度与双电层厚度之比对应管道中一个较低的电势,从电势的解析解中也可以看出,电解质溶液的流向势减小,进而无量纲速度增加.从图 2(c) 中可以看出,当其他参数固定时,随着  $\alpha$  的增加,柔性微管道中的无量纲速度减小,因为对于给定的圆柱半径  $R$ ,黏性系数  $\mu$  为常数,较高的阻力参数意味着通过管道的对流传输有更高的阻力.换句话说,聚电解质层中离子运动具有较低的渗透性,从而导致无量纲速度减小.



( $\lambda = 0.25, K = 1, \alpha = 1, u_r = 0.1, S = 5, K_\lambda = 1, Br = 0.01$ )

图 3(a) 温度随  $d$  的变化曲线

Fig. 3(a) Variations of the dimensionless temperature with  $d$



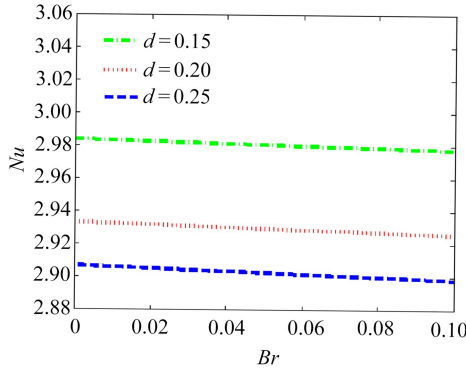
( $\lambda = 0.25, K = 1, \alpha = 1, u_r = 0.1, S = 5, Br = 0.01, d = 0.15$ )

图 3(b) 温度随  $K_\lambda$  的变化曲线

Fig. 3(b) Variations of the dimensionless temperature with  $K_\lambda$

图 3(a)、图 3(b) 分别描述了当无量纲厚度  $d$  和聚电解质层中的等效双电层厚度与双电层厚度之比  $K_\lambda$  取不同值时,圆柱形微管道中的电解质溶液无量纲温度分布.图 3(a) 表示当其他参数固定时,无量纲厚度  $d$  增加,会导致无量纲温度减小.正如图 2(a) 的分析,增加的无量纲厚度  $d$  引起无量纲速度减小,会导致壁面向流体的热量传递减小,从而使壁面与流体之间的温差  $T^* - T_w^*$  增大,也就是无量纲温度的绝对值增大.从图 3(b) 中可以看出,当其他参数固

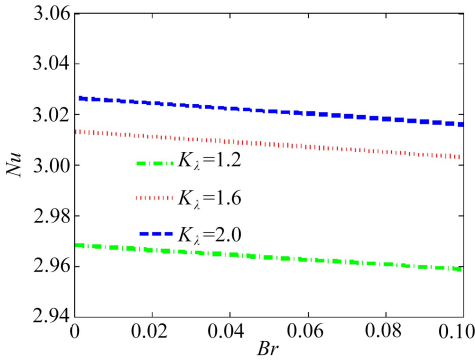
定时,圆柱形柔性微管道中的无量纲温度随  $K_\lambda$  的增加而增加.同理,正如图 2(b) 的分析,增加的聚电解质层中的等效双电层厚度与双电层厚度之比  $K_\lambda$  使无量纲速度增大,则会导致壁面向流体的热量传递增加,从而使壁面与流体之间的温差  $T^* - T_w^*$  减小,即无量纲温度的绝对值减小.



( $\lambda = 0.25, K = 1, \alpha = 1, u_r = 0.1, K_\lambda = 1, S = 5$ )

图 4 Nusselt 数随  $Br$  和  $d$  的变化曲线

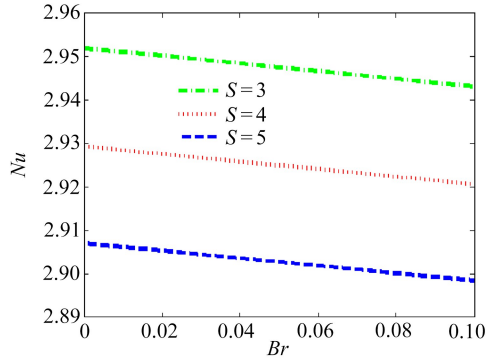
Fig. 4 Variations of the dimensionless Nusselt number with  $Br$  and  $d$



( $K = 1, \alpha = 1, u_r = 0.1, d = 0.15, S = 5, \lambda = 0.25$ )

图 5 Nusselt 数随  $Br$  和  $K_\lambda$  的变化曲线

Fig. 5 Variations of the dimensionless Nusselt number with  $Br$  and  $K_\lambda$



( $K = 1, \alpha = 1, u_r = 0.1, d = 0.15, K_\lambda = 1, \lambda = 0.25$ )

图 6 Nusselt 数随  $Br$  和  $S$  的变化曲线

Fig. 6 Variations of the dimensionless Nusselt number with  $Br$  and  $S$

从图 4 可以看出,当其他参数固定时,Nusselt 数随着无量纲厚度  $d$  的增加而减小.由图 3 (a) 的解释可知,  $d$  的增加会使壁面与流体之间的温差增加,即无量纲温度的绝对值增加,进而会导致平均温度  $\theta_m$  的绝对值增加,由式 (20) 进而能得出 Nusselt 数减小.此外,Nusselt 数随 Brinkman 数的增加而减小.其原因在于较大的黏性耗散,使壁面温度  $T_w^*$  增加,因而相对于系统平均温度  $T_m^*$  而言,  $T_w^* - T_m^*$  的变化将会增大,这样会使得表面对流换热系数  $h$  减小,进而导致 Nusselt 数减小.

从图 5 可以看出,当其他参数固定时,Nusselt 数随聚电解质层中的等效双电层厚度与双电层厚度之比的增加而增加.由图 3(b) 的解释可知,  $K_\lambda$  的增加会使壁面与流体之间的温差减小,即无量纲温度的绝对值减小,进而会导致平均温度  $\theta_m$  的绝对值减小,由式 (20) 进而能得出 Nusselt 数增加.



从图 6 可以看出,当其他参数固定时,随着 Joule 热系数  $S$  的增大, Nusselt 数减小. 由于 Joule 热参数是系统均匀受热效应的表征,  $S$  越大,说明系统的热量越大且分布得越均匀,于是造成了壁面处温度梯度的减小,进而引起了流体对流换热的减弱.

## 4 结 论

本文在线性化近似 Debye-Hückel 假设下研究了柔性圆柱形微管道内的电动流动和传热问题. 基于先前得出的电势和速度的解析解以及流向势的数值解,在热充分发展的情况下,利用有限差分法求解无量纲的能量方程. 进一步分析了不同参数对速度、温度以及描述流体传热性能 Nusselt 数的影响,主要结论如下:

随着无量纲厚度  $d$  的增加,流体的无量纲速度和无量纲温度减小. 随着聚电解质层中的等效双电层厚度与双电层厚度之比  $K_\lambda$  的增加,流体的无量纲速度和无量纲温度增大. Nusselt 数随着无量纲厚度  $d$  的增加而减小, Nusselt 数随聚电解质层中的等效双电层厚度与双电层厚度之比  $K_\lambda$  的增加而增加.

### 参考文献(References):

- [1] OHNO K, TACHIKAWA K, MANZ A. Microfluidics: applications for analytical purposes in chemistry and biochemistry[J]. *Electrophoresis*, 2008, **29**(22): 4443-4453.
- [2] NANDY K, CHAUDHURI S, GANGULY R. Analytical model for the magnetophoretic capture of magnetic microspheres in microfluidic devices[J]. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2008, **320**(7): 1398-1405.
- [3] SU J, JIAN Y J, CHANG L. Thermally fully developed electroosmotic flow through a rectangular microchannel[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2012, **55**(21): 6285-6290.
- [4] 杨大勇, 王阳. 微通道中电渗流及微混合的离子浓度效应[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(9): 981-989. (YANG Dayong, WANG Yang. Effects of ion concentration on electroosmotic flow and micromixing in microchannels[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(9): 981-989. (in Chinese))
- [5] ZHAO G P, JIAN Y J, CHANG L, et al. Magnetohydrodynamic flow of generalized Maxwell fluids in a rectangular micropump under an AC electric field[J]. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2015, **387**: 111-117.
- [6] JIAN Y J, LIU Q S, YANG L G. AC electroosmotic flow of generalized Maxwell fluids in a rectangular microchannel[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2011, **166**(21): 1304-1314.
- [7] DONATH E, VOIGT E. Steaming current and streaming potential on structured surfaces[J]. *Journal of Colloid and Interface Science*, 1986, **109**(1): 122-139.
- [8] STAROV V M, SOLOMENTSEV Y E. Influence of gel layers on electrokinetic phenomena 2: effect of ions interaction with the gel layer[J]. *Journal of Colloid and Interface Science*, 1993, **158**(1): 166-170.
- [9] MAYNES D, WEBB B W. Fully-developed thermal transport in combined pressure and electroosmotically driven flow in microchannels[J]. *Journal of Heat Transfer*, 2003, **125**(5): 889-895.
- [10] HORIUCHI K, DUTTA P. Joule heating effects in electroosmotically driven microchannel flows

- [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2004, **47**(14/16): 3085-3095.
- [11] NGOMA G D, ERCHIQUI F. Heat flux and slip effects on liquid flow in a microchannel[J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 2007, **46**(11): 1076-1083.
- [12] DEY R, CHAKRABORTY D, CHAKRABORTY S. Extended Graetz problem for combined electroosmotic and pressure-driven flows in narrow confinements with thick electric double layers [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2012, **55**(17/18): 4724-4733.
- [13] CHEN G, DAS S. Streaming potential and electroviscous effects in soft nanochannels beyond Debye-Hückel linearization[J]. *Journal of Colloid and Interface Science*, 2015, **445**: 357-363.
- [14] XIE Y, WANG L, JIN M, et al. Non-linear streaming conductance in a single nanopore by addition of surfactants[J]. *Applied Physics Letters*, 2014, **104**(3): 033108.
- [15] DAS S, CHAKRABORTY S. Effect of conductivity variations within the electric double layer on the streaming potential estimation in narrow fluidic confinements[J]. *Langmuir*, 2010, **26**(13): 11589-11596.
- [16] BANDOPADHYAY A, CHAKRABORTY S. Combined effects of interfacial permittivity variations and finite ionic sizes on streaming potentials in nanochannels[J]. *Langmuir*, 2012, **28**(50): 17552-17563.
- [17] DONATH E, VOIGT A. Streaming current and streaming potential on structured surfaces[J]. *Journal of Colloid and Interface Science*, 1986, **109**(1): 122-139.
- [18] OHSHIMA H, KONDO T. Electrokinetic flow between two parallel plates with surface charge layers: electro-osmosis and streaming potential[J]. *Journal of Colloid and Interface Science*, 1990, **135**(2): 443-448.
- [19] KEH H J, LIU Y C. Electrokinetic flow in a circular capillary with a surface charge layer[J]. *Journal of Colloid and Interface Science*, 1995, **172**(1): 222-229.
- [20] CHANDA S, SINHA S, DAS S. Streaming potential and electroviscous effects in soft nanochannels: towards designing more efficient nanofluidic electrochemomechanical energy converters [J]. *Soft Matter*, 2014, **10**(38): 7558-7568.
- [21] CHEN G, DAS S. Streaming potential and electroviscous effects in soft nanochannels beyond Debye-Hückel linearization[J]. *Journal of Colloid and Interface Science*, 2015, **445**: 357-363.
- [22] MATIN M H, OHSHIMA H. Combined electroosmotically and pressure driven flow in soft nanofluidics[J]. *Journal of Colloid and Interface Science*, 2015, **460**: 361-369.
- [23] MATIN M H, OHSHIMA H. Thermal transport characteristics of combined electroosmotic and pressure driven flow in soft nanofluidics[J]. *Journal of Colloid and Interface Science*, 2016, **476**: 167-176.
- [24] 刘勇波, 菅永军. 具有聚电解质层圆柱形纳米通道中的电动能量转换效率[J]. *物理学报*, 2016, **65**(8): 084704. (LIU Yongbo, JIAN Yongjun. Electrokinetic energy conversion efficiency in a polyelectrolyte-grafted nanotube [J]. *Acta Physica Sinica*, 2016, **65**(8): 084704. (in Chinese))

# Electrokinetic Flow and Heat Transfer in Soft Microtubes

XU Lina, JIAN Yongjun

(School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University,  
Hohhot 010021, P.R.China)

**Abstract:** The electrokinetic flow and heat transfer characteristics of fluid in soft microtubes, of which the walls were covered by polyelectrolyte materials as the fixed charge layer, were studied based on previously obtained analytical solutions of electrical potentials and velocities, and numerical solutions of streaming potentials. Under the assumption of a constant wall heat flow, the energy equations including the effects of viscous dissipation and Joule heat were solved with the finite difference method and numerical solutions of the dimensionless temperature were obtained. Numerical calculations also gave the influences of related dimensionless parameters on the velocity, the temperature and the Nusselt number. The study shows that, when other parameters are fixed, the dimensionless velocity and temperature decrease with thickness  $d$  of the polyelectrolyte layer but increase with equivalent electric double layer to electric double layer thickness ratio  $K_\lambda$ ; the Nusselt number decreases with Joule heat coefficient  $S$  and polyelectrolyte layer thickness  $d$ , but increases with  $K_\lambda$ .

**Key words:** soft microtube; heat transfer; streaming potential; Nusselt number

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(11772162;11472140)

---

引用本文/Cite this paper:

许丽娜, 菅永军. 柔性圆柱形微管道内的电动流动及传热研究[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(4): 408-418.

XU Lina, JIAN Yongjun. Electrokinetic flow and heat transfer in soft microtubes[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(4): 408-418.