

周期性正弦凸起凹凸板等效刚度的研究*

冯 岩, 杜国君, 沈振兴, 王宓晓

(燕山大学 河北省重型装备与大型结构力学可靠性重点实验室, 河北 秦皇岛 066004)

摘要: 针对构造正交各向异性周期性正弦凸起结构凹凸板的等效刚度问题, 根据经典弹性薄板理论, 基于对单胞结构力学特性分析和单胞结构在板宏观结构上周期性均匀化分布的特点, 推导了正弦凸起凹凸板的等效刚度解析公式, 以四边简支周期性正弦凸起结构凹凸板为例, 将该文计算结果与有限元模拟结果进行对比, 验证了该文等效刚度的合理性和精确性. 最后, 分析了正弦凸起凹凸板几何参数对等效刚度特性的影响, 给出了结构几何参数与等效刚度之间的关系. 结果表明: 应用该文方法可以有效计算周期性正弦凸起凹凸板的等效刚度; 由于凹凸板在构造上的几何结构变化, 与基础平板相比其弯曲刚度和抗扭刚度都有明显的提升. 该研究结果对凹凸板静力学和动力学的进一步研究以及实际工程应用具有指导意义.

关键词: 周期性正弦凸起凹凸板; 构造正交各向异性; 单胞结构; 等效刚度; 有限元
中图分类号: O34 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.390160

引 言

周期性凸起凹凸板是一种新型的板型构件, 它通过对普通的基础薄板用滚压或冲压工艺加工使其具有特定的周期性凹凸结构的板材. 凹凸板从形貌上具有单胞凸起结构周期性排列的特征, 根据凸起结构的不同, 包括有正弦凸起、三角形、梯形和圆台形等各种凸起类型的周期性凸起凹凸板. 研究表明: 凹凸板重量较轻, 同时具有较高的抗弯能力以及较强的可靠性, 其整体的强度和承载能力相比普通的基础薄板有了明显的提高^[1-2]; 同时具有优秀的平面压缩和能量吸收性能, 以及优秀的高温稳定性和可设计性^[3-7]. 凹凸板凭借这些优良的性能, 在汽车船舶、航空航天等领域得到大量的应用, 是近年来新兴的热门研究方向.

针对周期性正弦凸起凹凸板的力学性能, 许多学者对其以及相似类型的板壳结构进行了研究, 使用了多种方法来对它们进行力学分析. 文献[8]通过给正弦凹凸板表面施加载荷作用, 观察其结构压缩破坏过程, 应用塑性铰理论分析了其压缩过程, 描述了在不同载荷情况下的失效形式. 渐进均匀化方法可以用来求解周期性板壳结构, 在该理论基础分析了一系列具有周期性单胞板壳结构的等效性质^[9-11], 但是其数值实现至今仍是个困难的问题^[12]. 文献[13-15]应用有限元方法研究了周期性正弦凸起凹凸板的拉伸性能、弯曲性能和在不同边界条件下的吸能能力, 研究结果表明各种几何参数的凹凸板均展现出优异的性能. 拟板法通过将具有复杂

* 收稿日期: 2018-06-13; 修订日期: 2018-09-18

基金项目: 国家自然科学基金(11702241)

作者简介: 冯岩(1991—), 男, 博士生(E-mail: yiyang6369@sina.com);

杜国君(1961—), 男, 教授, 博士生导师(通讯作者. E-mail: dugj2002@ysu.edu.cn).

结构形式的构造正交各向异性板简化为理想的正交各向异性板,通过弹性力学分析得到该简化板在各方向的刚度,进而得到等效的材料参数^[16],文献[17-18]采用拟板法计算带有肋板的构造正交各向异性板。

周期性正弦凸起凹凸板具有鲜明的结构特征,板材的宏观结构是由具有典型单元形貌特征的单胞结构平移阵列组成,由于单胞尺寸比板的宏观尺寸小很多,在宏观尺寸上可以看作是周期性均匀化分布,因此通过对单胞结构进行力学特性分析可以得到结构的宏观力学特性^[19-20]。本文选取一个典型单元形貌特征的单胞结构进行分析,依据截面的连续线性变化将其等效为均质的薄板,推导了单胞的三个主向刚度,此三个主向刚度即为宏观上板的三个主向刚度,随后应用有限元模拟进行验证。最后基于本文等效刚度方法,分析了不同几何参数的周期性正弦凸起凹凸板的刚度特性,获得其结构几何参数与刚度特性之间的关系,可用于实现面向使用需求的板材形貌设计。该研究结果对周期性凸起凹凸板的研究和工程应用具有指导意义。

1 周期性正弦凸起凹凸板刚度等效

1.1 波纹截面惯性矩推导

对于周期性凸起凹凸板这种构造正交各向异性板,其抗弯刚度比平板大的主要原因来自于它的构造。几何参数的变化使其面积矩和惯性矩产生变化,而惯性矩是确定抗弯刚度的主要因素。参照基础平板的抗弯刚度公式^[21]:

$$D = \frac{t^3 \cdot 1}{12} \cdot \frac{E}{1 - \mu^2}, \quad (1)$$

式中 E 为板材料的弹性模量; t 为板的厚度; μ 为 Poisson 比。第一分式可视为单位宽度板的惯性矩,第二分式是材料的弹性常数。研究周期性凸起凹凸板的刚度问题可以从讨论其惯性矩着手。

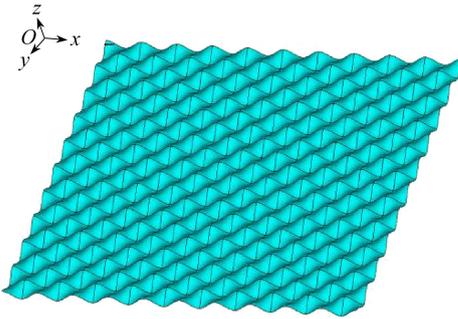


图 1 周期性正弦凸起凹凸板

Fig. 1 The sinusoidal periodic dimpled plate

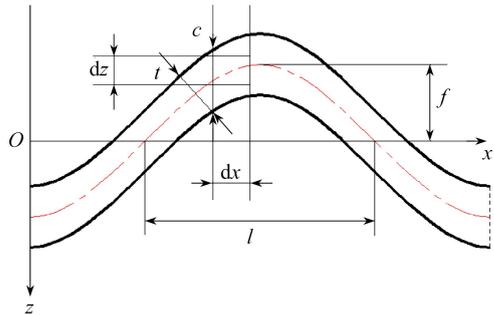


图 2 一个波长正弦波纹板截面

Fig. 2 A sine wavelength sine of the dimpled plate section

图 1 所示为周期性正弦凸起凹凸板形貌,可以看出其边缘截面由波纹正弦曲线构成,为了研究其惯性矩,首先要研究波纹截面惯性矩的推导。

图 2 所示为一个波长的正弦波纹板截面,其中 f 为半波幅, l 为半波长, t 为板厚,根据图示建立坐标系,在截面上取一微面积元 dA ,该微元的面积为 $dA = dx dz$ 。该微元对 x 轴的惯性矩为 $dI_x = z^2 dA$,沿 x 对一个波长积分,可得该截面对 x 轴的惯性矩为^[22]

$$I_x = \iint_A z^2 dA = \int_0^{2l} dx \int_{z-c/2}^{z+c/2} z^2 dz, \quad (2)$$

式中 z 为 x 处截面中线的 z 坐标, c 为 x 处波纹板的高度, 由截面的几何关系可得

$$c = t \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = t \sqrt{1 + \left(\frac{f\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l}\right)^2}. \quad (3)$$

将式(3)代入式(2)可得

$$I_x = \iint_A z^2 dA = \int_0^{2l} dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} z^2 dz, \quad (4)$$

式中

$$f_1(x) = f \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{t}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\pi f}{l} \cos \frac{\pi x}{l}\right)^2},$$

$$f_2(x) = f \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{t}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\pi f}{l} \cos \frac{\pi x}{l}\right)^2}.$$

将式(3)化简后得到

$$I_x = \int_0^{2l} f^2 \sin^2 \left(\frac{\pi x}{l} t\right) \sqrt{1 + \left(\frac{f\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l}\right)^2} dx + \frac{1}{12} \int_0^{2l} \left[t \sqrt{1 + \left(\frac{f\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l}\right)^2} \right]^3 dx. \quad (5)$$

1.2 单胞等效刚度推导

周期性正弦凸起凹凸板选取单胞如图 3(a)、(b) 所示, 宏观板结构可视为由多个单胞结构平移阵列组成, 其主要几何参数包括凹凸板相对厚度 $2f$, 单胞结构的周期间距 $2l$, 基础平板的厚度 t . 本文中的周期性正弦凸起凹凸板在 x, y 两个方向具有相同的周期间距及形貌.

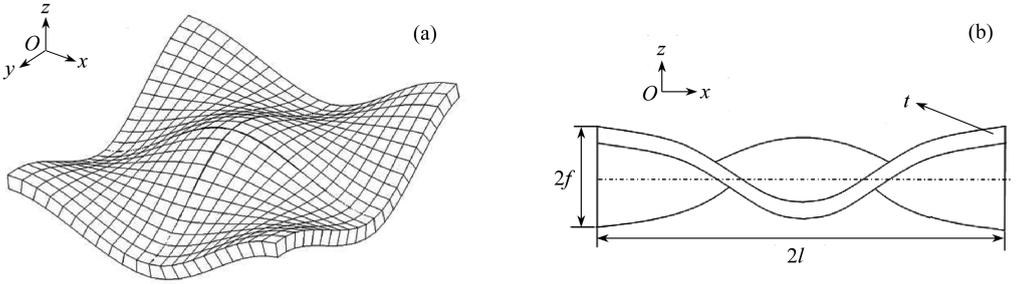


图 3 单胞结构参数

Fig. 3 The structural parameters of a unit cell

由图 3(a)、(b) 可知单胞结构其外缘截面正弦曲线函数为

$$f(y) = f \cos \frac{\pi y}{l}. \quad (6)$$

从图 3(b) 可以看出, 单胞的几何结构以波长 $2l$ 为一个周期, 且其几何结构成对称性, 对称长度为半波长 l , 故只需求出半波长 l 范围内的等效刚度, 即为单胞的等效刚度. 在半波长 l 范围内, 将式(6)代入式(5)有

$$I_x = \int_0^{2l} \left(f \cos \frac{\pi y}{l} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\pi x}{l} t \right) \sqrt{1 + \left(\frac{f\pi}{l} \cos \frac{\pi y}{l} \cos \frac{\pi x}{l} \right)^2} dx + \frac{1}{12} \int_0^{2l} \left[t \sqrt{1 + \left(\frac{f\pi}{l} \cos \frac{\pi y}{l} \cos \frac{\pi x}{l} \right)^2} \right]^3 dx. \quad (7)$$

根据微积分的定义, 将单胞截面惯性矩在 y 方向沿半波长 l 长度内进行积分, 可以得到其

半波长 l 长度内平均截面惯性矩 \bar{I}_x 为

$$\begin{aligned}\bar{I}_x &= \frac{1}{l} \int_0^l I_x \left(f \cos \frac{\pi y}{l} \right) d \left(f \cos \frac{\pi y}{l} \right) = \\ &= \frac{1}{l} \int_0^l I_x \left(f \cos \frac{\pi y}{l} \right) \cdot f \frac{\pi}{l} \sin \frac{\pi y}{l} dy.\end{aligned}\quad (8)$$

由于双向正弦凸起凹凸板为正交各向异性板, x 和 y 两个方向的形貌相同, 故 $D_x = D_y$. 因此有

$$D_x = D_y = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot \frac{\bar{I}_x}{2l}.\quad (9)$$

关于构造正交各向异性板的综合抗扭刚度 H 的计算, 胡肇滋和钱寅泉^[17] 给出了一个综合公式:

$$H = D_0 + \frac{GJ_{T_x}}{2b_1} + \frac{GJ_{T_y}}{2a_1},\quad (10)$$

式中 D_0 由式(1) 给出, 即平板对自身形心轴的刚度; G 为切变模量; $J_{T_x}, b_1 (J_{T_y}, a_1)$ 为纵肋(横肋) 的抗扭惯性矩和构造间距或翼缘宽度. 则本文综合抗扭刚度 H 为

$$H = D_0 + \frac{G\bar{I}_x}{2 \cdot 2l} + \frac{G\bar{I}_y}{2 \cdot 2l} = D_0 + \frac{G\bar{I}_x}{2l}.\quad (11)$$

2 刚度等效结果验证

为验证本文等效刚度计算结果的正确性, 建立三维有限元模型, 并和本文等效刚度计算结果进行对比. 本文计算分为两块不同几何尺寸的正弦凸起凹凸板情况, 单胞几何尺寸分别为: 模型 1 ($l = 0.014 \text{ m}, f = 0.003 \text{ m}, t = 0.001 \text{ m}$) 和模型 2 ($l = 0.02 \text{ m}, f = 0.005 \text{ m}, t = 0.002 \text{ m}$). 这两种几何尺寸下的正弦凸起凹凸板各主刚度都会发生变化并对结果产生影响, 用其对等效刚度进行验证.

有限元模型如图 4 所示, 单胞结构在 x 和 y 两个方向各有 10 个单胞, 则板的大小为 $a = b = 10 \times 2l$. 板模型的边界条件为简支边, 集中载荷 $F = 10 \sim 100 \text{ N}$ 施加在板的中心, 即板 $a/2$ 和 $b/2$ 处, 因此最大挠度也在此处. 不同载荷情况下本文计算和有限元模拟的最大挠度结果如图 5 (a)、(b) 所示.

图 5(a)、(b) 分别为模型 1 和模型 2 验证结果. 可以看出, 本文等效计算结果与有限元模拟结果具有较好的一致性, 验证了该方法的正确性. 经对比可发现, 图 5(b) 较图 5(a) 误差大, 主要原因是模型 2 的半波高 f 比模型 1 大, 即正弦凸起更高, 此时凹凸板的薄板特性就不明显, 故误差随着凸起高度的增加呈增大趋势, 原因是没有考虑剪切效应.

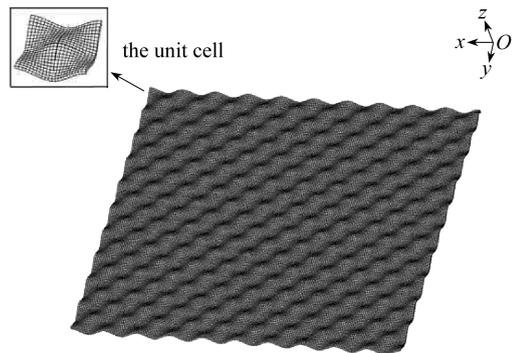
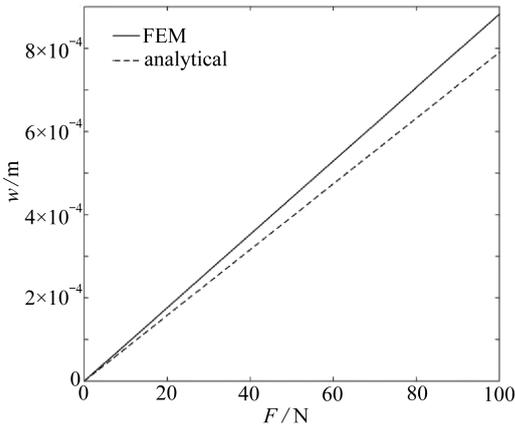
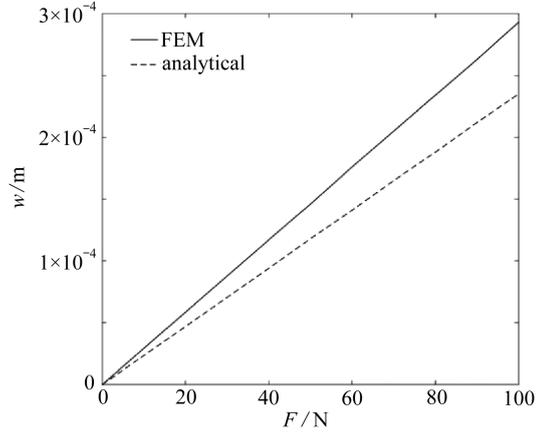


图 4 有限元网格划分

Fig. 4 Meshing of the dimpled plate



(a) 模型 1
(a) Model 1



(b) 模型 2
(b) Model 2

图 5 本文结果的验证

Fig. 5 Verification of the results of this paper

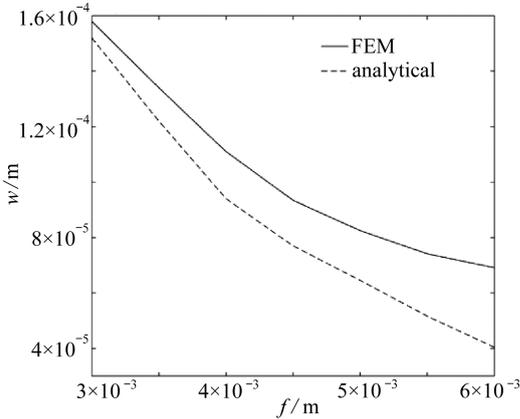


图 6 相对厚度 f 对本文等效刚度的影响
Fig. 6 The effect of relative depth f
on the equivalent stiffness

为进一步验证所推导公式的正确性,检验其对正弦凹凸板几何形状改变的依赖程度,本文采用两周期间距相同、基础平板厚度相同和集中载荷大小相同,但相对厚度不同的板进行比较.取正弦凹凸板尺寸 $l = 0.016$ m, $f = 0.003 \sim 0.006$ m, $t = 0.001$ m,单胞结构在 x 和 y 两个方向各有 8 个,集中载荷 $F = 20$ N 施加板中心处,最大挠度结果如图 6 所示.

由图 6 可知,随着相对厚度 f 的增大,误差呈增大趋势.分析可知,其仍是凹凸板的薄板特性随着相对厚度的增加愈发不明显,故误差会增大.

在上述模型中,实体有限元模型共划分了 6 万个网格单元,计算时间为 100 s,加上建模所需的时间,计算一个模型需要较多时间.而应用本文等效刚度公式通过 MATLAB 科学计算软件计算时间仅为 1 s,极大地提高了计算效率,从而可以实现各种尺寸的正弦凸起凹凸板等效刚度及位移响应的高效率计算.

3 不同几何参数的正弦凸起凹凸板等效刚度特性分析

在分析讨论前,首先对正弦凸起凹凸板的几何参数和等效刚度进行无量纲化,视本文等效刚度特性与基础平板刚度特性的比值为变量,自变量以基础平板的厚度 t 为基准,讨论不同几何参数下正弦凸起凹凸板 l/t 和 f/t 对等效刚度的影响.几何参数的变化使正弦凸起凹凸板的形貌特征产生了不同, l/t 的变化在形貌上可视为凹凸板波纹周期长度的变化, f/t 的变化在形貌上可视为凹凸板相对厚度的变化.

图 7 为 $f/t = 4$ 时正弦凸起凹凸板的等效刚度随 l/t 的变化规律.可以看出,当 l/t 由小变大

时,即正弦凸起凹凸板的波纹周期变长,弯曲刚度 D_x, D_y 和抗扭刚度 H 降低.分析这一规律可知,当 f/t 固定时,随着 l/t 的增大使得单胞凸起结构的形貌更趋近于基础平板,其等效刚度也逐渐趋近于基础平板,实际结果与理论结果相符.

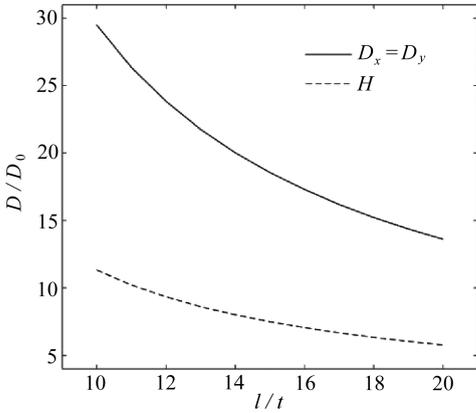


图7 l/t 对等效刚度的影响

Fig. 7 The effect of l/t on the equivalent stiffness

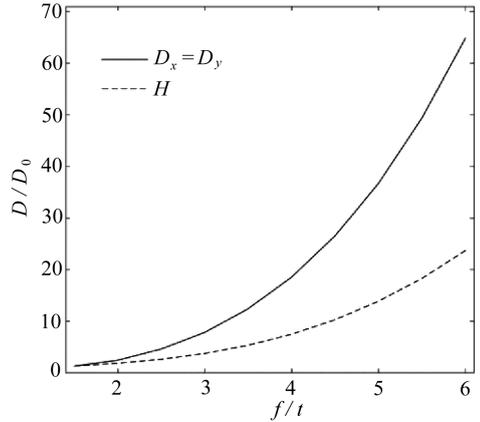


图8 f/t 对等效刚度的影响

Fig. 8 The effect of f/t on the equivalent stiffness

图8为 $l/t = 15$ 时正弦凸起凹凸板等效刚度随 f/t 的变化规律.可以看出,随着 f/t 的增大,弯曲刚度 D_x, D_y 和抗扭刚度 H 不断提升,且弯曲刚度比抗扭刚度提高更大.分析可知,当 l/t 固定时,随着 f/t 增大,正弦凸起凹凸板的半波高即凸起高度不断增大,板的构造异性越发明显,从而使弯曲刚度和抗扭刚度增大.不过需要注意的是,随着 f/t 增大,凹凸板的薄板特性越不明显,此时误差也会呈增大趋势,需要考虑剪切效应的影响.

4 结 论

1) 本文基于弹性薄板的基本假设,通过对单胞结构的力学特性分析,并利用单胞结构在板结构的宏观周期性均匀化分布的特点,得到了周期性正弦凸起凹凸板三个主方向的等效刚度,并应用有限元模拟验证了本文等效刚度的正确性.基于该等效刚度,可以应用弹性薄板理论计算凹凸板的弯曲问题,实现周期性正弦凸起凹凸板作为复杂构件位移响应的高效计算.

2) 对不同几何参数的正弦凸起凹凸板等效刚度特性分析表明,构造上几何结构的复杂变化相对于基础平板比较其弯曲刚度和抗扭刚度都有明显的提升,正弦波纹周期的增大会导致其等效刚度减小,凹凸板相对厚度的增加会增大等效刚度,且弯曲刚度比抗扭刚度变化更大.本文给出了其结构几何参数与刚度特性之间的关系,可用于实现面向使用需求的板材形貌设计.

本文的结果为进一步研究构造正交各向异性凹凸板的力学性能奠定了一定的基础,进一步可对其压缩吸能、承载能力和隔声隔热等性能开展研究,为凹凸板在各个领域的实际应用提供了一定的理论依据.

参考文献 (References):

- [1] TOKURA S, HAGIWARA I. A study for the influence of work hardening on bending stiffness of truss core panel[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2010, 77(3): 448-452.
- [2] NGUYEN V B, WANG C J, MYNORS D, et al. Mechanical properties and structural behaviour of cold-roll formed dimpled steel[C]//*The 10th International Conference on Technology of*

- Plasticity, ICTP*. Aachen, Germany, 2011: 1072-1077.
- [3] XIA Z Z, ZHAO X L, HAGIWARA I. A simulation approach to improve forming limitation of truss core panel[J]. *Applied Mechanics & Materials*, 2011, **121/126**: 2471-2475.
- [4] TOKURA S, HAGIWARA I. Forming process simulation of truss core panel[J]. *Journal of Computational Science and Technology*, 2010, **4**(1): 25-35.
- [5] YOO S H, CHANG S H, SUTCLIFFE M P F. Compressive characteristics of foam-filled composite egg-box sandwich panels as energy absorbing structures[J]. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2010, **41**(3): 427-434.
- [6] HALDAR A K, ZHOU J, GUAN Z. Energy absorbing characteristics of the composite contoured-core sandwich panels[J]. *Materials Today Communications*, 2016, **8**: 156-164.
- [7] 赵伟东, 高士武, 马宏伟. 扁球壳在热-机械荷载作用下的稳定性分析[J]. *应用数学和力学*, 2017, **38**(10): 1146-1154. (ZHAO Weidong, GAO Shiwu, MA Hongwei. Thermomechanical stability analysis of shallow spherical shells[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(10): 1146-1154. (in Chinese))
- [8] DESHPANDE V S, FLECK N A. Energy absorption of an egg-box material[J]. *Journal of the Mechanics & Physics of Solids*, 2003, **51**(1): 187-208.
- [9] KALAMKAROV A L, SAHA G C, GEORGIADES A V. General micromechanical modeling of smart composite shells with application to smart honeycomb sandwich structures[J]. *Composite Structures*, 2007, **79**(1): 18-33.
- [10] KALAMKAROV A L, GEORGIADES A V, ROKKAM S K, et al. Analytical and numerical techniques to predict carbon nanotubes properties[J]. *International Journal of Solids & Structures*, 2006, **43**(22/23): 6832-6854.
- [11] CHALLAGULLA K S, GEORGIADES A V, KALAMKAROV A L. Asymptotic homogenization modeling of smart composite generally orthotropic grid-reinforced shells, part I: theory[J]. *European Journal of Mechanics: A/Solids*, 2010, **29**(4): 530-540.
- [12] LEE C Y, YU W. Homogenization and dimensional reduction of composite plates with in-plane heterogeneity[J]. *International Journal of Solids & Structures*, 2011, **48**(10): 1474-1484.
- [13] NGUYEN V B, WANG C J, MYNORS D J, et al. Finite element simulation on mechanical and structural properties of cold-formed dimpled steel[J]. *Thin-Walled Structures*, 2013, **64**: 13-22.
- [14] NGUYEN V B, WANG C J, MYNORS D J, et al. Dimpling process in cold roll metal forming by finite element modelling and experimental validation[J]. *Journal of Manufacturing Processes*, 2014, **16**(3): 363-372.
- [15] SASHIKUMAR S, CHIRWA E C, MYLER P, et al. Numerical investigation into the collapse behaviour of an aluminium egg-box under quasi-static loading[J]. *International Journal of Crashworthiness*, 2012, **17**(6): 582-590.
- [16] MARCUZZI A, MORASSI A. Dynamic identification of a concrete bridge with orthotropic plate-type deck[J]. *Journal of Structural Engineering*, 2010, **136**(5): 586-602.
- [17] 胡肇滋, 钱寅泉. 正交构造异性板刚度计算的探讨[J]. *土木工程学报*, 1987, **20**(4): 49-61. (HU Zhaozi, QIAN Yinquan. Research on the calculation of structurally orthotropic plate rigidity[J]. *China Civil Engineering Journal*, 1987, **20**(4): 49-61. (in Chinese))
- [18] 程远兵, 程文灏, 党纪. 均布荷载下四边简支蜂窝式空心板的解析解[J]. *工程力学*, 2009, **26**(8): 34-38. (CHENG Yuanbing, CHENG Wenrang, DANG Ji. Analytical solution of cellular hollow plates simply supported subjected to uniformly distributed loads[J]. *Engineering Me-*

- chanics*, 2009, **26**(8): 34-38.(in Chinese))
- [19] SUQUET P. Elements of homogenization forinelastic solid mechanics[C]//*Homogenization Techniques for Composite Media*. Berlin, Germany, 1987.
- [20] SMIT R J M, BREKELMANS W A M, MEIJER H E H. Prediction of the mechanical behavior of nonlinear heterogeneous systems by multi-level finite element modeling[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, 1998, **155**(1/2): 181-192.
- [21] 张福范. 弹性薄板[M]. 北京: 科学出版社, 1984.(ZHANG Fufan. *Elastic Thin Plate*[M]. Beijing: Science Press, 1984.(in Chinese))
- [22] 常福清, 袁帅. 正弦波纹板第二主刚度的补正[J]. 机械强度, 2010, **32**(2): 152-155.(CHANG Fuqing, YUAN Shuai. Emendations of secondly main stiffen formula for the sine corrugated plate[J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2010, **32**(2): 152-155.(in Chinese))

Equivalent Stiffness of Sinusoidal Periodic Dimpled Plates

FENG Yan, DU Guojun, SHEN Zhenxing, WANG Mixiao
(Key Laboratory of Mechanics Reliability for Heavy Equipment and
Large Structure of Hebei Province, Yanshan University,
Qinhuangdao, Hebei 066004, P.R.China)

Abstract: The equivalent stiffness of sinusoidal periodic dimpled plates was derived according to the classical elastic thin plate theory, in view of the analysis of the mechanical properties of the unit cell structure and the homogeneous distribution of unit cells over the plate. The sinusoidal periodic dimpled plate with 4 sides simply supported under a concentrated load was taken as an example, the analytical results were compared with those of the finite element method (FEM), and the rationality and accuracy of the analytical equivalent stiffness were verified. Finally, the effects of some structural parameters on the equivalent stiffness of the dimpled plate were analyzed. The results show that, the presented method can effectively calculate the equivalent stiffness of the sinusoidal periodic dimpled plate. The bending stiffness and torsional stiffness of the dimpled plate are obviously higher than those of the basic plate, for the geometric change of the dimpled plate. The work has important meanings for the research on statics and dynamics of dimpled plates and the engineering application.

Key words: sinusoidal periodic dimpled plate; structure of orthogonal anisotropy; unit cell; equivalent stiffness; finite element

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11702241)

引用本文/Cite this paper:

冯岩, 杜国君, 沈振兴, 王宓晓. 周期性正弦凸起凹凸板等效刚度的研究[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(5): 490-497.

FENG Yan, DU Guojun, SHEN Zhenxing, WANG Mixiao. Equivalent stiffness of sinusoidal periodic dimpled plates[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(5): 490-497.