

基于虚拟完整约束的欠驱动起重机控制方法*

赵 晨¹, 戈新生²

(1. 北京信息科技大学 自动化学院, 北京 100192;
2. 北京信息科技大学 机电工程学院, 北京 100192)

摘要: 欠驱动系统的控制是非线性控制的一个重要领域, 欠驱动系统指系统控制输入个数小于自由度个数的非线性系统. 目前, 欠驱动非线性系统动力学和控制研究的主要方法包括线性二次型最优控制方法和部分反馈线性化方法等, 如何使系统持续的稳定在平衡位置一直是研究的难点. 虚拟约束方法是指通过选择一个周期循环变化的变量作为自变量来设计系统的周期运动. 该文以典型的欠驱动模型起重机为例, 采用虚拟约束方法, 使系统能够在平衡位置稳定或周期振荡运动. 首先, 通过建立虚拟约束, 减少系统自由度变量; 然后, 通过部分反馈线性化理论推导出系统的状态方程; 最后, 通过线性二次调节器设计反馈控制器. 仿真结果表明, 重物在反馈控制下可以在竖直位置的附近达到稳定状态, 反映了虚拟约束方法对欠驱动系统的有效性.

关键词: 欠驱动; 虚拟约束; 部分反馈线性化

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.21656/1000-0887.390163

引 言

欠驱动非线性系统控制问题一直是控制领域的研究热点之一. 在实际工程中, 欠驱动系统也是典型的非线性系统, 如何用少于自由度的控制输入数来控制系统是具有实际意义的. 目前, 欠驱动系统在工程实践中的应用有很多^[1-3], 欠驱动系统动力学和控制研究的主要方法包括线性二次型最优控制方法和部分反馈线性化方法等^[4-5]. 但是在反馈控制的过程中, 系统很难持续的稳定在平衡位置. 对此, 文章使用虚拟约束方法来得到系统稳定的周期解, 进而达到使系统稳定于平衡位置的目的.

针对如何设计反馈控制来使欠驱动系统稳定的问题, 已有学者进行了广泛研究, Grizzle 等以双足机器人为模型证明了欠驱动系统可以得到稳定的周期解^[6]; Canudas 等论证了在欠驱动系统中计算出运动周期解的可行性^[7]; 随后以 Shiriaev 为首的学者们提出了虚拟完整约束的理论, 并通过实验证明了理论的可行性和有效性^[8-11]. 在此基础上, Consolini 和 Maggiore 将虚拟约束方法的理论做了进一步延伸, 并应用到欠驱动自行车模型中^[12-13]. 关于虚拟约束方法国内还鲜有研究, 笔者期望通过本文的研究对欠驱动系统的控制问题起到帮助作用.

本文以起重机为研究对象, 该系统为典型的欠驱动系统. 利用虚拟约束设计反馈控制器以控制重物可以在稳定的平衡位置或以期望的周期轨道运动. 该方法首先通过 Lagrange (拉格朗

* 收稿日期: 2018-06-14; 修订日期: 2018-08-17

基金项目: 国家自然科学基金(11472058; 11732005)

作者简介: 赵晨(1992—), 男, 硕士生(E-mail: 18811122609@163.com);

戈新生(1957—), 男, 教授, 博士(通讯作者. E-mail: gebim@vip.sina.com).

日)动力学方程导出系统动力学模型,根据被控制物体的几何约束关系构建虚拟约束;然后定义误差变量,并根据误差变量所表示的关系式得出系统状态方程;最后设计反馈控制器.仿真结果表明,设计的控制器对任意初始值的欠驱动模型都可以稳定到平衡位置或预期轨道.通过研究欠驱动系统,在虚拟约束下通过反馈控制器实现轨道周期稳定的控制,为探索解决欠驱动非线性系统研究探索新的途径和方法.

1 起重机动力学建模

设起重机模型是由小车和重物组成,简化模型如图 1 所示,期望通过控制小车运动的同时控制重物的运动,显然该系统只有一个输入(施加在小车上的控制力),有两个输出状态量(小车的位移和重物与垂直方向形成的夹角),因此是一典型的欠驱动系统.

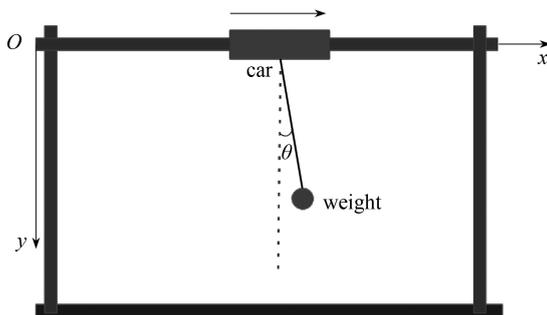


图 1 起重机系统的运动模型

Fig. 1 The motion model for the crane system

在图 1 模型中,设小车质量为 M , 连接杆长度为 l , 重物质量为 m , θ 为连接杆与竖直方向的夹角.选择图中给定的坐标系,用广义坐标 (x 和 θ) 表示小车质心位置和重物位形,计算系统动能和势能,利用 Lagrange 方法建立系统的动力学方程:

$$M(\varphi)\ddot{\varphi} + C(\varphi, \dot{\varphi})\dot{\varphi} + G(\varphi) = B(\varphi)f, \quad (1)$$

式中 f 为施加在小车上的水平控制力, $\varphi = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}$ 为广义坐标,

$$M(\varphi) = \begin{bmatrix} m + M & ml\cos\theta \\ ml\cos\theta & ml^2 \end{bmatrix}, \quad C(\varphi, \dot{\varphi}) = \begin{bmatrix} 0 & -ml\sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 \\ mg\sin\theta \end{bmatrix}, \quad B(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

将式(1)展开可得起重机系统动力学方程:

$$\begin{cases} (m + M)\ddot{x} + ml\cos\theta \cdot \ddot{\theta} - ml\sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 = f, \\ ml^2\ddot{\theta} + ml\cos\theta \cdot \ddot{x} + mg\sin\theta = 0. \end{cases} \quad (2)$$

2 虚拟完整约束

虚拟约束是指通过选择一个随时间周期函数变化的约束关系作为自变量来设计系统的周期运动.根据欠驱动系统控制量比自由度少的特点,可以建立广义坐标的约束关系,将约束关系代入系统动力学方程可使系统广义坐标缩减,等同于在小车与摆动杆之间添加了虚拟约束关系.由于约束方程不显含速度,因此称为虚拟完整约束.起重机模型的虚拟约束可写为

$$x + a \sin \theta = b, \quad (3)$$

式中 a 和 b 为给定的常数,式(3)表示系统维持于稳定位置时 x 和 θ 的关系.可以看出,当重物垂直朝下时, $x = b$.实际上,给定任意欠驱动系统均可以建立起虚拟约束.将式(3)代入到广义坐标 φ 中可得

$$\varphi = \delta(\theta, c) = \begin{bmatrix} b - a \sin \theta \\ \theta \end{bmatrix}. \quad (4)$$

为简化计算,令式(2)中 m, M, l 为单位量 1,则式(2)可简化为

$$\begin{cases} 2\ddot{x} + \cos \theta \cdot \ddot{\theta} - \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2 = f, \\ \ddot{\theta} + \cos \theta \cdot \ddot{x} + g \sin \theta = 0. \end{cases} \quad (5)$$

假设存在一个动态的反馈控制力,可以确保式(3)表示的几何位置不变,将虚拟约束求二阶导数代入到动力学方程(2)中的第二式可得到新的系统方程:

$$(1 - a \cos^2 \theta) \ddot{\theta} + a \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2 + g \sin \theta = 0. \quad (6)$$

3 反馈控制器设计

根据系统方程及虚拟约束定义 3 个误差变量,利用线性二次最优控制器将误差变量逼近于 0,误差变量是依据系统预期周期解设计的,因此当误差都为 0 的时候,系统就会稳定在预期轨道上.

3.1 部分反馈线性化

通过状态的非线性变换和非线性状态反馈将原非线性系统转换成状态方程及输出方程均为线性的可控可观系统.然而,由于欠驱动系统自身的控制输入数目小于自由度,不能实现完全反馈线性化,因此利用部分反馈线性化.

由于虚拟约束方法将轨道选择的问题完全转换为求微分方程周期解的问题,因此预期轨道幅值和周期的大小完全依赖于常数 c 的选择.理论上只要常数 c 在值域内取值,存在无数条周期稳定轨道, c 的值域选择可以参考文献[9],将周期解的 θ 设为 θ_* ,轨道周期为 T ,存在 t 使得

$$\theta_*(t) = \theta_*(t + T). \quad (7)$$

给定虚拟约束条件和周期解 θ_* 后,开始引入另一个概念:误差变量.因为最终要利用 LQR 线性二次调节器来设计控制器,因此可以将状态方程的左侧设计为由误差变量构成的向量.由于重物在未达到稳定状态前, x 与虚拟约束(3)是有偏差的,利用这一特点,定义向量 $\eta =$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ 即有}$$

$$\eta = \varphi - \delta(\theta, c), \quad (8)$$

其中 x 偏差量由 ε 来表示,求出以变量 ε 表示的广义坐标 φ 的一、二阶导数:

$$\dot{\varphi} = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon} - a \cos \theta \cdot \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\ddot{\varphi} = \begin{bmatrix} \ddot{\varepsilon} - a \cos \theta \cdot \ddot{\theta} + a \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

根据反馈线性化理论^[8],将输入 f 转化为关于 ε 的线性化形式.首先,定义 $\ddot{\varepsilon} = u$,用 u 替换式(10)中的 $\ddot{\varepsilon}$:

$$\ddot{\varphi} = \begin{bmatrix} u - a \cos \theta \cdot \ddot{\theta} + a \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

系统动力学方程(1)移项可得

$$\ddot{\varphi} = \mathbf{M}^{-1}(\varphi) [\mathbf{B}(\varphi)f - \mathbf{C}(\varphi, \dot{\varphi})\dot{\varphi} - \mathbf{G}(\varphi)]. \quad (12)$$

由式(5)可写出矩阵

$$\mathbf{M}(\varphi) = \begin{bmatrix} 2 & \cos \theta \\ \cos \theta & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}(\varphi, \dot{\varphi}) = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \theta \cdot \dot{\theta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 \\ g \sin \theta \end{bmatrix}.$$

将上述矩阵和式(11)代入到式(12)中后,可将控制量 f 转化为关于 u, θ 和 $\dot{\theta}$ 的方程,由于 θ 和 $\dot{\theta}$ 每一时刻的值都可以测得,因此相当于将 f 转化为关于 u 的线性方程

$$f = \frac{1 + \sin^2 \theta}{1 - a \cos^2 \theta} \left[u - \frac{\sin \theta (\dot{\theta}^2 - g \cos \theta) + a \cos \theta (2g \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2)}{1 + \sin^2 \theta} - a \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2 \right]. \quad (13)$$

由于系统方程(6)表示的是系统完全在轨道上运动的状态,但初始位置未必处于轨道上,因此式(6)右侧的值并不为0.为求得当前的状态方程,将参数矩阵 $\mathbf{M}(\varphi), \mathbf{C}(\varphi, \dot{\varphi}), \mathbf{G}(\varphi), \mathbf{B}(\varphi)$ 以及式(11)代入式(12),可解出起重机模型达到稳定状态前的系统方程:

$$\alpha(\theta)\ddot{\theta} + \beta(\theta)\dot{\theta}^2 + \gamma(\theta) = -\cos \theta \cdot u, \quad (14)$$

式中 $\alpha(\theta) = 1 - a \cos^2 \theta, \beta(\theta) = a \sin \theta \cdot \cos \theta, \gamma(\theta) = g \sin \theta$.

3.2 系统状态方程

设系统初始值为 $\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$,设计误差变量 κ .定义函数 σ :

$$\sigma = \dot{\theta}^2. \quad (15)$$

式(15)两边对 θ 求导,可得 $d\sigma$ 与 $\ddot{\theta}$ 间的关系:

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{2} \frac{d\sigma}{d\theta}. \quad (16)$$

将式(15)和(16)代入到系统方程(12)中,以 σ 替换 $\dot{\theta}$ 和 $\ddot{\theta}$ 可得

$$\alpha(\theta) \frac{1}{2} \frac{d\sigma}{d\theta} + \beta(\theta)\sigma + \gamma(\theta) = 0. \quad (17)$$

式(17)可以视为 σ 关于角度 θ 的一阶线性非齐次微分方程,其通解形式为

$$\sigma = \Phi(\theta_0, \theta) \sigma_0 - \Phi(\theta_0, \theta) \int_{\theta_0}^{\theta} \Phi(x, \theta_0) \frac{2\gamma(x)}{\alpha(x)} dx, \quad (18)$$

式中 θ_0 为 θ 的初始值,

$$\sigma_0 = \dot{\theta}_0^2, \quad \Phi(\theta_0, \theta_1) = \exp\left(-2 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\beta(y)}{\alpha(y)} dy\right),$$

将误差变量 κ 定义为

$$\kappa = \dot{\theta}^2 - \sigma. \quad (19)$$

由前面的推导不难看出,当 $\theta_0, \dot{\theta}_0$ 不在周期轨道上时, σ 与 $\dot{\theta}$ 是不相等的,误差函数 κ 值不为0.下面求 κ 对 t 的导数,因为 κ 是一个关于 $\dot{\theta}$ 和 θ 的函数,则有

$$\frac{d}{dt} \kappa = \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \kappa + \ddot{\theta} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \kappa, \quad (20)$$

$$\text{式中 } \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \kappa = 2\dot{\theta}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \kappa = \frac{2\gamma(\theta)}{\alpha(\theta)} - \frac{2\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} (\kappa - \dot{\theta}^2).$$

式(20)可写为

$$\frac{d}{dt} \kappa = \dot{\theta} \left(\frac{2}{\alpha(\theta)} u - \frac{2\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} \kappa \right). \quad (21)$$

通常情况下,状态向量由满足系统输入输出的常微分方程构成,这里设状态向量 ζ 由误差变量构成, $\zeta \in R^3$ 可以定义为

$$\zeta = [\kappa, \varepsilon, \dot{\varepsilon}]^T, \quad (22)$$

式中 $\kappa, \varepsilon, \dot{\varepsilon}$ 为误差变量. 联立误差变量的导数表达式,可以得到求周期解所需的状态方程:

$$\dot{\zeta} = \mathbf{A}(t)\zeta + \mathbf{B}(t)u, \quad (23)$$

式中 $\mathbf{A}(t) \in R^3, \mathbf{B}(t) \in R^3$, 其值为

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_1(t) & a_2(t) & a_3(t) \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$\mathbf{B}^T(t) = [b(t), 0, I], \quad (25)$$

式中 I 为单位 1, $a_i(t)$ 和 $b(t)$ 都是以 T 为周期的周期函数,因此 $a_i(t) = a_i(t+T), i = 1, 2, 3;$
 $b(t) = b(t+T)$, 具体可表示为

$$a_1(t) = \frac{-2a\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta}{1 - a\cos^2\theta}, \quad a_2(t) = 0, \quad a_3(t) = 0, \quad b(t) = \frac{-2\cos\theta \cdot \dot{\theta}}{1 - a\cos^2\theta}.$$

3.3 反馈控制器设计

假设线性系统(23)在 $[0, T]$ 内是完全可控的. 给定一个常数 $\Gamma = 1$ 和一个 3 阶的单位矩阵 $\mathbf{G} = \mathbf{G}^T > \mathbf{0}$, 存在一个 3 阶的矩阵函数 $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(t+T)$ 并且 $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}^T(t)$, 符合 Riccati 方程:

$$\dot{\mathbf{R}}(t) + \mathbf{A}^T(t)\mathbf{R}(t) + \mathbf{R}(t)\mathbf{A}(t) + \mathbf{G} = \mathbf{R}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}(t). \quad (26)$$

在 $[0, T]$ 内存在 $\mathbf{A}(t)$ 和 $\mathbf{B}(t)$, 可以解出反馈控制器 u 的表达式:

$$u = -\mathbf{B}^T(t)\mathbf{R}(t)\zeta. \quad (27)$$

一般来说,非线性系统模型无法通过反馈控制器直接稳定,但可以对反馈控制器稍加修改,结合上文对误差项的推导,设计出一个点对点的反馈控制器,即在任意时刻,系统的每个状态量都有对应的反馈控制量, u 可以表示为

$$u(t) = -\mathbf{B}^T(\theta, \dot{\theta}, \varepsilon, \dot{\varepsilon})\mathbf{R}(t)\zeta, \quad (28)$$

式中 $\mathbf{R}(t)$ 为 Riccati 方程的稳定解, $\mathbf{B}^T(\theta, \dot{\theta}, \varepsilon, \dot{\varepsilon})$ 为含误差项的状态方程矩阵(25).

4 仿真结果

第 2 节和第 3 节详细地展示了在虚拟约束下物体运动周期解的推导过程,接下来的仿真结果验证了虚拟约束方法能够实现起重机持续稳定的平衡状态,也同样要实现欠驱动系统的稳定周期运动. 在实验结果中,由于起重机模型只有一个稳定位置,即重物垂直朝下为中心摆动,设置多个初始值来验证预期周期解的存在性,设参数 $a = 0.2, \theta$ 与 $\dot{\theta}$ 分别取 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 作为初始值,起重机周期摆动如图 2 所示,其中选取 $\theta = 0.4, \dot{\theta} = 0.4$ 为预期摆动轨道.

为了证明系统的稳定性,选择用相位图展示出来,根据非线性系统稳定性判据,当时间 t 趋于正无穷时,在 θ 与 $\dot{\theta}$ 所构成的二维平面上的极限环是相空间里的一个闭合的轨迹,系统即是稳定的,如图 3 所示. 图 3 中原点位置的点表示系统完全稳定时的相位图,即此时重物持续

垂直稳定在平衡点上.

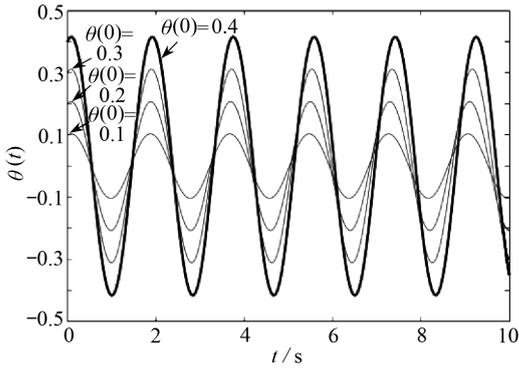


图2 预期周期运动图

Fig. 2 The expected periodic motion diagram

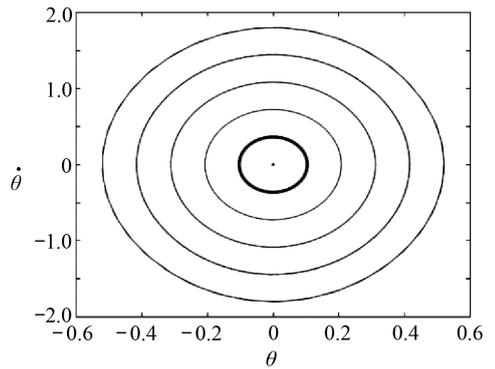


图3 周期运动预期相位图

Fig. 3 The expected phase diagram of periodic motion

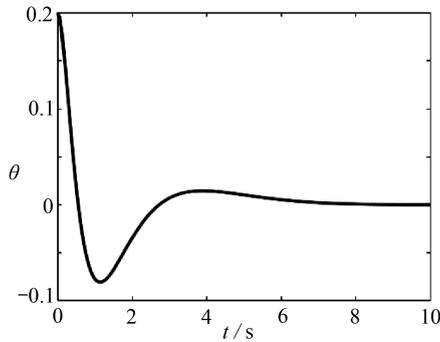


图4 系统在平衡点稳定

Fig. 4 The system is stable at the equilibrium point

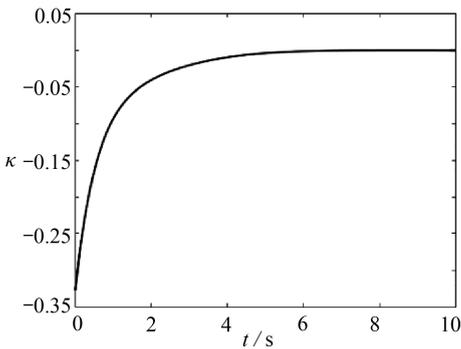


图5 状态方程误差项 κ

Fig. 5 State equation error term κ

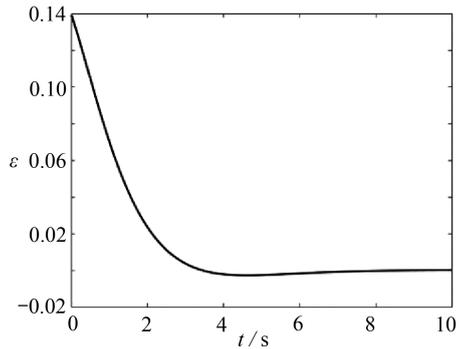


图6 状态方程误差项 ε

Fig. 6 State equation error term ε

图4所示的是用虚拟约束方法将系统从 $\theta = 0.2$ 的位置上稳定到平衡位置的状态图,图中的角度 θ 在反馈下最终变为0,表明重物最终稳定于竖直朝下的位置上,证明了该方法可以使重物在反馈控制下稳定于平衡点上.由于3个误差变量都是角度 θ 的关系式,因此测量角度 θ 即可得到误差变量,在实际系统中可以通过传感器测量角度的值来确定误差变量的大小.反馈控制器的状态变量,即3个误差变量的值在反馈控制下逼近于0,如图5~7所示.

由图5~7可知,基于虚拟约束方法的反馈控制器在任意初始值下都可以将误差值减小为

0. 与相位图 3 相比,系统最终稳定在预期轨道上,对此的直观解释是,选择合适的参数和坐标初始值,使反馈控制器能够找到最快的收敛路线,从而使系统稳定到平衡点上。

图 8 是 θ 与 $\dot{\theta}$ 所构成的相位图,图 9 是角度 θ 的周期解。对比图 3 与图 4 可以看出,在 $\theta = 0$ 的初始位置下,虚拟约束方法设计的控制器可以使重物在一段时间后进行周期运动。

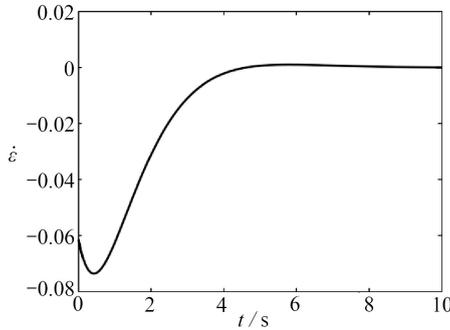


图 7 状态方程误差项 $\dot{\epsilon}$

Fig. 7 State equation error term $\dot{\epsilon}$

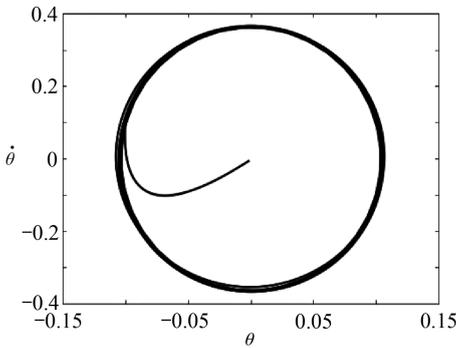


图 8 反馈控制下的相位图

Fig. 8 The phase diagram under feedback control

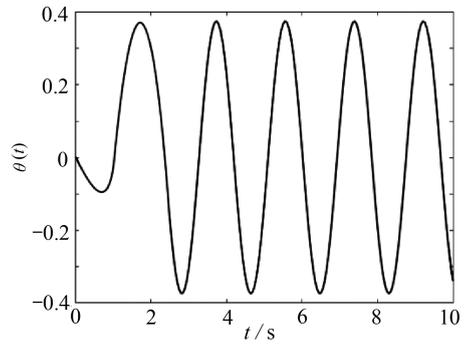


图 9 系统周期解

Fig. 9 The periodic solution of the system

5 结 论

本文利用虚拟约束方法,在传统动力学方程和非线性欠驱动反馈控制方法的基础上,通过建立虚拟约束作为自变量来设计系统最终的理想运动轨道;并基于误差变量和系统状态方程,构造了一个多预期轨道的反馈控制器,使得欠驱动起重机模型在反馈控制下能够稳定到平衡位置或预期周期轨道;仿真实验验证了该方法的有效性。

参考文献 (References):

- [1] MILLER S, MOLINO J A, KENNEDY J, et al. Segway rider behavior: speed and clearance distance in passing sidewalk objects[J]. *Transportation Research Record*, 2008, **2073**: 125-132.
- [2] DRAZ M U, ALI M S, MAJEED M, et al. Segway electric vehicle: human transporter[C]//*On Robotics and Artificial Intelligence, 2012 International Conference*. Pakistan, 2012.
- [3] CHWA D. Nonlinear tracking control of underactuate ships based on a unified kinematic and dynamic model[C]//*2007 Mediterranean Conference on Control and Automation*. Athens,

- Greece, 2017.
- [4] 高丙团, 黄学良. 欠驱动 2DTORA 基于部分反馈线性化的非线性控制设计[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2011, **41**(2): 321-325. (GAO Bingtuan, HUANG Xueliang. Nonlinear control design of underactuated 2DTORA based on partial feedback linearization [J]. *Journal of Southeast University(Natural Science Edition)*, 2011, **41**(2): 321-325. (in Chinese))
- [5] BO L. Approximate linearization of a class of underactuated system and its application in the ball and beam system[J]. *International Journal of Control and Automation*, 2015, **8**(12): 119-130.
- [6] GRIZZLE J W, ABBA G, PLESTAN F. Asymptotically stable walking for biped robots: analysis via systems with impulse effects[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(1): 51-64.
- [7] CANUDAS DE WIT C, ESPIAU B, URREA C. Orbital stabilization of underactuated mechanical systems[C]//*15th IFAC World Congress*. Barcelona, Spain, 2002.
- [8] SHIRIAEV A, PERRAM J W, CANUDAS DE WIT C. Constructive tool for orbital stabilization of underactuated nonlinear systems: virtual constraints approach[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(8): 1164-1176.
- [9] SHIRIAEV A, ROBERTSSON A, PERRAM J, et al. Periodic motion planning for virtually constrained(hybrid) mechanical system[C]//*Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and the 2005 European Control Conference*. Seville, Spain, 2005.
- [10] SHIRIAEV A S, FREIDOVICH L B, ROBERTSSON A, et al. Virtual-holonomic-constraints-based design of stable oscillations of Furuta pendulum: theory and experiments[J]. *IEEE Transactions On Robotics*, 2007, **23**(4): 827-832.
- [11] FREIDOVICH L, ROBERTSSON A, SHIRIAEV A, et al. Periodic motions of the pendubot via virtual holonomic constraints: theory and experiments[J]. *Automatica*, 2008, **44**(3): 785-791.
- [12] CONSOLINI L, MAGGIORE M. Virtual holonomic constraints for Euler-Lagrange systems[C]//*8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*. Bologna, Italy, 2010.
- [13] CONSOLINI L, MAGGIORE M. Control of a bicycle using virtual holonomic constraints[J]. *Automatica*, 2014, **49**(9): 2831-2839.
- [14] CELLINA A. The validity of the Euler-Lagrange equation for solutions to variational problems [J]. *Journal of Fixed Point Theory & Applications*, 2014, **15**(2): 577-586.
- [15] PERRAMJ W, SHIRIAEV A, CANUDAS DE WIT C, et al. Explicit formula for a general integral of motion for a class of mechanical systems subject to holonomic constraint[J]. *IFAC Proceedings Volumes*, 2003, **36**(2): 87-92.

A Control Method for Underactuated Cranes Based on Virtual Holonomic Constraints

ZHAO Chen¹, GE Xinsheng²

(1. *School of Automation, Beijing Information Science and Technology University, Beijing 100192, P.R.China;*

2. *School of Mechanical and Electrical Engineering, Beijing Information Science and Technology University, Beijing 100192, P.R.China*)

Abstract: The control of underactuated systems was an important field of nonlinear control. The underactuated system refers to a nonlinear system with an input control variable number less than the degree of freedom number. At present, the main methods of dynamics and control research of underactuated nonlinear systems include the linear quadratic-form optimal control method and the partial feedback linearization method, and how to make the system stabilize in the equilibrium position is always a difficult point. For the virtual constraint method, the periodic motion of the system is designed with a selected cyclic independent variable. Based on the typical underactuated model crane, the virtual constraint method was adopted to make the system stabilize or oscillate in equilibrium position. First, through establishment of the virtual constraints, the system's degrees of freedom were reduced. Then, the system state equations were derived according to the partial feedback linearization theory. Finally, the feedback controller was designed with the linear quadratic-form regulator. The simulation results show that, the weight can reach a stable state near the vertical position under the feedback control, which reflects the effectiveness of the virtual constraint method for underactuated systems.

Key words: underactuated; virtual constraint; partial feedback linearization

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11472058;11732005)

引用本文/Cite this paper:

赵晨, 戈新生. 基于虚拟完整约束的欠驱动起重机控制方法[J]. 应用数学和力学, 2019, 40(3): 302-310.

ZHAO Chen, GE Xinsheng. A control method for underactuated cranes based on virtual holonomic constraints[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, 40(3): 302-310.