

多裂纹问题计算分析的本征 COD 边界积分方程方法*

郭 钊¹, 郭子涛¹, 易玲艳²

(1. 九江学院 土木工程与城市建设学院, 江西 九江 332005;
2. 九江学院 经济与管理学院, 江西 九江 332005)

摘要: 针对多裂纹问题,若采用常规的数值求解技术,计算效率较低.为实现多裂纹问题的大规模数值模拟,建立了本征裂纹张开位移(crack opening displacement, COD)边界积分方程及其迭代算法,并引入 Eshelby 矩阵的定义,将多裂纹分为近场裂纹和远场裂纹来处理裂纹间的相互影响.以采用常单元作为离散单元的快速多极边界元法为参照,对提出的计算模型和迭代算法进行了数值验证.结果表明,本征 COD 边界积分方程方法在处理多裂纹问题时取得较大的改进,其计算效率显著高于传统的边界元法和快速多极边界元法.

关键词: 多裂纹问题; 本征裂纹张开位移; 边界积分方程; 快速多极边界元法; 数值模拟

中图分类号: O341

文献标志码: A

DOI: 10.21656/1000-0887.390183

引 言

多裂纹固体是一大类结构材料,特别是脆性结构材料的力学模型,广泛应用于新型复合材料、结构陶瓷材料以及纳米材料中.裂纹的存在,对这类固体材料的力学和物理性能有着不可忽视的影响.因此,多裂纹固体材料或构件的研究对于物理与工程问题具有重要意义.针对线弹性断裂力学问题的研究,通常有解析法和数值法两类研究方法.解析法一般较适于裂纹形状相对简单、数量相对少的情况,而数值法适于分析裂纹较复杂、数量相对大的情况.由于多裂纹问题的解析解通常难以获得,寻求数值解是解决多裂纹问题的有效途径.在各种数值法中,考虑到基体和裂纹表面都必须离散,通常传统的有限元法求解规模非常庞大.因此,基于边界积分方程的数值方法:边界元法(boundary element method, BEM)^[1-2],成为求解多裂纹问题的主要计算方法,已逐渐为研究者达成统一共识,近年来取得了一系列研究成果^[3-7].

在边界元法中,最终离散形成的系数矩阵是非对称的满阵,存储量和计算量都将随着裂纹数量的增多而急剧变大.采用裂纹问题的 Green(格林)函数,如 Erdogan 基本解,虽然能满足裂纹表面条件,避免了裂纹面的离散,但并不适合于多裂纹问题. Telles 等^[8-10]提出了数值 Green 函数法(numerical Green's function, NGF),将原问题分解成 Kelvin 基本解加上一个补充解问题的叠加.其中,补充解依照裂纹的数量和构形通过数值方法来计算,避免了系统方程组中出

* 收稿日期: 2018-06-27; 修订日期: 2018-10-16

基金项目: 国家自然科学基金(11662005); 江西省青年科学基金(2016BAB211001)

作者简介: 郭钊(1986—),男,讲师,博士(通讯作者. E-mail: guozhao@shu.edu.cn).

现裂纹面的位移、面力未知量。从所建立的边界积分方程和离散后的系统矩阵来看,数值 Green 函数法建立的裂纹模型相对子域边界元法^[11-12]和对偶边界积分方程方法^[13-15]来说更具可行性和高效性。但是,随着裂纹数量的增多,补充解问题的求解矩阵也将随着裂纹数量的增多而急剧增大,极大地增加了算法的复杂性。因此,数值 Green 函数法并不能从根本上解决裂纹规模过大的问题,这也是现有文献中利用数值 Green 函数法计算的算例只包含了少量且通常情况下是规则裂纹的原因所在。

对于大规模的裂纹问题,引入以对偶边界积分方程方法为基础的快速多极展开技术^[16]的快速多极边界元法(fast multipole boundary element method, FMBEM)^[17-18],是解决裂纹规模较大问题的有效途径之一。快速多极展开技术将边界元求解的存储量和计算量都降至 $O(N \lg N)$ 甚至 $O(N)$ 的量级,从而使边界元法快速且准确地求解多裂纹问题成为可能。目前,快速多极边界元法中较多的处理方法是将裂纹面离散为非连续的二次单元,而外边界采用连续的二次单元。采用二次单元或其他高阶单元作为离散单元虽能提高计算精度,但随着裂纹规模的不断增加,付出的代价便是极大地增加了计算存储量,导致计算效率不高。本文采用常单元作为边界单元离散结构边界和所有裂纹面,其中裂纹的上、下表面对称离散。不仅节省了计算存储量,程序编制也相对简便,这是采用常单元作为离散单元的优点。另一方面,考虑到裂纹尖端的应力集中现象,为提高计算精度,裂纹尖端附近需配置较多的常单元。不可置否,采用常单元来描述裂纹尖端是不利的,由于裂纹尖端附近的应力集中现象相当严重,仍难以处理因裂纹面的几何重合导致积分核的“病态”性质,因而退化为采用非连续单元应对,不过也有较大的误差,有待进一步研究。

为真正实现多裂纹问题的大规模数值模拟(裂纹数量为 $10^3 \sim 10^5$ 的量级),笔者及其导师提出了本征裂纹张开位移(本征 COD)^[19-21]的概念,具体定义为:在无限大固体中,在裂纹表面虚拟面力的作用下产生的 COD。针对大量随机分布的裂纹问题,建立了本征 COD 边界积分方程的基本格式及其数值迭代算法。同时,引入 Eshelby 矩阵的定义,将多裂纹问题分成近场裂纹和远场裂纹两组,其中近场裂纹中裂纹间的相互影响较大,通过 Eshelby 矩阵来处理;而远场裂纹中裂纹间的相互影响较小,通过迭代计算来处理,具有“远小近大”的特点,因为裂纹面的未知量将会出现在求解域的外边界上,系数矩阵的规模较数值 Green 函数法要小,体现了用小规模模型求解大规模裂纹问题的实际意义。与其他数值方法相比,本征 COD 计算模型的另一优点是不需要对裂纹面进行离散。以快速多极边界元法为参照,对提出的计算模型和迭代算法进行了数值验证,从而显示了本研究的意义:为求解多裂纹问题提供了一种新的能够兼顾计算精度与效率、整体性能与局部细节的数值计算方法,在普通计算机上实现二维和三维多裂纹固体整体性能和断裂性能的大规模数值模拟。

1 计算模型

1.1 本征 COD 边界积分方程

对于含裂纹数量为 N_c 的二维多裂纹固体 Ω ,其外边界用 Γ 表示,并假定多裂纹固体是各向同性的,不受体积力作用,可以得到以本征 COD 为变量的位移边界积分方程,具体形式为

$$\gamma u_i(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) \tau_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} \tau_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) - \sum_{m=1}^{N_c} \int_{A_m^+} \Delta u_j(x) \tau_{ij}^*(\xi, x) dA(x), \quad \xi \in (\Gamma \cup \Omega) \setminus A_m, \quad m = 1, 2, \dots, N_c, \quad (1)$$

其中 ξ 和 x 分别为源点和场点, A_m 表示裂纹边界. 核函数 u_{ij}^* 和 τ_{ij}^* 分别表示 Kelvin 位移基本解和面力基本解, 即源点 ξ 在 i 向单位力作用下场点 x 在 j 向的位移和面力, 当源点 ξ 和场点 x 重合时, 核函数 u_{ij}^* 和 τ_{ij}^* 分别具有弱奇异、强奇异性; u_j 和 τ_j 分别为相应的位移、面力分量, γ 为自由项系数, 取决于源点 ξ 的位置及边界或界面的几何形状, 当源点 ξ 在域 Ω 内部时, $\gamma = 1$; 当 ξ 在外边界 Γ 上, 且外边界 Γ 光滑连续时, $\gamma = 1/2$. Δu_j 为本征 COD, 具体形式为

$$\Delta u_j(x) = u_j(x) \Big|_{x \in A^+} - u_j(x) \Big|_{x \in A^-}, \quad (2)$$

其中 A^+ 和 A^- 分别为裂纹的上、下表面. 从式(1)可以看出, 如果所有的本征 COD 已知, 多裂纹问题就能够用 Gauss(高斯)求积公式和边界点法离散处理, 不需要对裂纹进行离散^[3].

相应地, 将本征 COD 位移边界积分方程(1)经过微分, 代入广义 Hooke(胡克)定律, 可以得到以 COD 为变量的应力边界积分方程:

$$\gamma \sigma_{ij}(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ijk}^*(\xi, x) \tau_k(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} \tau_{ijk}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) - \sum_{m=1}^{N_C} \int_{A_m^+} \Delta u_k(x) \tau_{ijk}^*(\xi, x) dA(x), \quad \xi \in (\Gamma \cup \Omega) \setminus (\cup A_m). \quad (3)$$

利用面力和应力的关系式 $\tau_i = \sigma_{ij} n_j$, 还能得到如下面力边界积分方程:

$$\gamma \tau_i(\xi) = n_j(\xi) \int_{\Gamma} u_{ijk}^*(\xi, x) \tau_k(x) d\Gamma(x) - n_j(\xi) \int_{\Gamma} \tau_{ijk}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) - n_j(\xi) \sum_{m=1}^{N_C} \int_{A_m^+} \Delta u_k(x) \tau_{ijk}^*(\xi, x) dA(x), \quad \xi \in (\Gamma \cup \Omega) \setminus (\cup A_m), \quad (4)$$

其中 n_j 为源点 ξ 处的单位外法线方向余弦, 核函数 u_{ijk}^* 和 τ_{ijk}^* 为 u_{ij}^* , u_{ij}^* 的导数和通过源点 ξ 的外法线方向余弦的线性组合.

本文定义方程(1)、(3)和(4)为本征 COD 边界积分方程, 构成了本征 COD 边界积分方程的基本格式, 其中所有裂纹面上的 COD 为待求量.

为不失一般性, 考虑一无限域内含裂纹长为 $2a$ 的水平裂纹问题, 建立全局直角坐标系, 法向即为纵坐标方向, 并将坐标原点配置在裂纹的中点. 式(4)可写成

$$n_j(\xi) \int_{A^+}^H \Delta u_k(x) \tau_{ijk}^*(\xi, x) dA(x) = -\tau_i(\xi), \quad \xi \in A^+, \quad (5)$$

其中 τ_i 为全局坐标系中的面力分量.

将水平裂纹问题的核函数 $\tau_{ijk}^*(\xi, x)$ 基本解的简化形式代入式(5)中, 即有

$$\frac{G}{2\pi(1-\nu)} \int_{-a}^a \frac{\delta_i}{r^2(\xi, x)} dA(x) = -\tau_i(\xi), \quad (6)$$

其中 G 和 ν 分别为剪切模量和 Poisson(泊松)比, 方程左边的积分项为 Hadamard 主值积分, 符号 δ 表示 COD, τ_i 为局部坐标系中的面力分量, r 为源点 ξ 和场点 x 间的距离. 利用配点法和 Gauss 求积将式(6)离散:

$$\frac{G}{2\pi(1-\nu)a} \left\{ \sum_{j=1, j \neq i}^{N_g} \frac{W_j}{(\xi_j - \xi_i)^2} \delta_j - \left[\sum_{j=1, j \neq i}^{N_g} \frac{W_j}{(\xi_j - \xi_i)^2} + \frac{2}{1 - \xi_i^2} \right] \delta_i - \left[\sum_{j=1, j \neq i}^{N_g} \frac{W_j}{\xi_j - \xi_i} - \ln \left(\frac{1 - \xi_i}{1 + \xi_i} \right) \right] \frac{\partial \delta_i}{\partial \xi} + \frac{W_i}{2} \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial \xi^2} \right\} = -\tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, N_g, \quad (7)$$

其中 W_j 和 ξ_j 分别为 Gauss 点的权函数和 Gauss 点坐标, N_g 为 Gauss 点总数.

注意到式(7)中还包含了 COD δ 的偏导数 δ_i , 为了计算该偏导数 δ_i , 利用 Lagrange 插值多

项式,将 COD δ 展开成

$$\delta = \sum_{k=1}^{N_g} l_k \delta^k, \quad (8)$$

其中 l_k 表示 Lagrange 插值多项式的系数.如果插值多项式包含了裂纹的左右两尖端,式(8)的插值多项式级数为 $N_g + 2$,并且满足 $\delta(-a) = \delta(+a) = 0$.在准备本征 COD 的数据库之前,将裂纹面力展开为 N_p 阶的多项式:

$$\tau = c_0 + c_1 \frac{\eta}{a} + c_2 \left(\frac{\eta}{a} \right)^2 + \cdots + c_{N_p} \left(\frac{\eta}{a} \right)^{N_p}, \quad \eta \in [-a, +a]. \quad (9)$$

最终式(7)可写成矩阵的形式:

$$a^{-1} \mathbf{S}^0 \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{S}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

其中,本征 COD $\boldsymbol{\delta}$ 就是待求解的矢量,其规模为 $2N_g \times 1$; \mathbf{S}^0 为离散方程组(7)的系数矩阵,其规模为 $N_g \times N_g$.对二维断裂弹问题,张开型和滑开型裂纹问题最终离散的矩阵 \mathbf{S}^0 是相同的.

1.2 局部 Eshelby 矩阵

为不失一般性,考虑图 1 中的多裂纹问题,选定裂纹 A 为当前裂纹(研究对象),将裂纹分为两组:近场裂纹(虚线圆内)和远场裂纹(虚线圆外).近场裂纹组所含裂纹较少,裂纹间的相互影响大;而远场裂纹含有较多的裂纹,裂纹间的相互影响小.

考虑无限域中含裂纹数量为 N_L 的多裂纹问题,并且都包含在当前裂纹 A 的近场裂纹组中,即未含远场裂纹组.若源点 ξ 位于当前裂纹 A 的表面,式(5)将变成

$$n_j(\xi) \int_{A_i^+}^H \Delta u_k(x) \tau_{ijk}^*(\xi, x) dA(x) + n_j(\xi) \sum_{m=1, m \neq i}^{N_L} \int_{A_m^+} \Delta u_k(x) \tau_{ijk}^*(\xi, x) dA(x) = -\tau_i(\xi), \quad \xi \in A_i, \quad (11)$$

其中,左端第一项积分具有超强奇异性,因为源点 ξ 在当前裂纹 A 的表面上;左端第二项积分由于源点 ξ 在近场裂纹组的其他裂纹面上,为一正常积分,通过 Gauss 离散便可得到.离散化可得最终的系数方程组,写成矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix} a_1^{-1} \mathbf{S}^0 & \mathbf{S}_{12} & \cdots & \mathbf{S}_{1, N_L} \\ \mathbf{S}_{21} & a_2^{-1} \mathbf{S}^0 & \cdots & \mathbf{S}_{2, N_L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{S}_{N_L, 1} & \mathbf{S}_{N_L, 2} & \cdots & a_{N_L}^{-1} \mathbf{S}^0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_1 \\ \boldsymbol{\delta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_{N_L} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\tau}_1 \\ \boldsymbol{\tau}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\tau}_{N_L} \end{Bmatrix}, \quad (12)$$

其中 $a_i (i = 1, 2, \dots, N_L)$ 为每条裂纹的半长,主对角线上的子矩阵 \mathbf{S}^0 为式(7)中左端第一项采用配点法和 Gauss 离散形成的系数矩阵,非主对角的子矩阵 \mathbf{S}_{ik} 为左端第二项正常积分最终离散形成的系数矩阵.整理并推广,得到本征 COD $\boldsymbol{\delta}$ 的计算公式:

$$\boldsymbol{\delta}_{(k)} = \mathbf{S}_k \boldsymbol{\tau}_{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N_L, \dots, N_C, \quad (13)$$

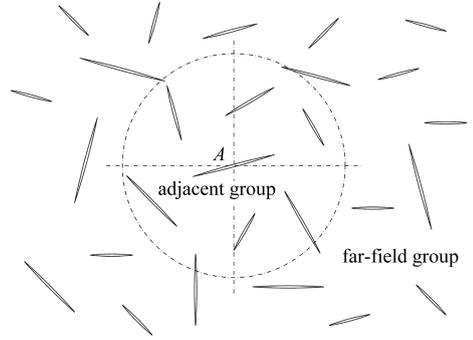


图 1 多裂纹的分组定义

Fig. 1 The group definitions for multiple cracks

其中 N_c 表示裂纹总数, $\boldsymbol{\tau}_{(k)} = \{\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \dots, \boldsymbol{\tau}_{N_L}\}_k^T$ 为近场裂纹组所有裂纹的虚拟面力矢量, 上标 T 表示矩阵的转置, 矩阵大小为 $(2N_g \times N_L) \times 1$; 矢量 $\boldsymbol{\delta}_{(k)}$ 表示第 k 条裂纹的本征 COD, 大小为 $2N_g \times 1$; 矩阵 \mathbf{S}_k 表示左端矩阵的逆, 包含了近场裂纹组中所有裂纹的信息, \mathbf{S}_k 也就是为处理裂纹间的影响而引入的局部 Eshelby 矩阵, 其大小为 $2N_g \times (2N_g \times N_L)$, N_g 为 Gauss 点总数, 且离散每条裂纹的 Gauss 点总数保持一致。

从式(13)可以看出, 局部 Eshelby 矩阵 \mathbf{S}_k 把近场裂纹组的所有裂纹虚拟面力和当前裂纹的本征 COD 联系起来, 与所取的无量纲距离(图 1 中的虚圆)有关。一旦这个无量纲距离选定后, 局部 Eshelby 矩阵 \mathbf{S}_k 也就相应确定了, 并且通常情况下不同的裂纹对应的 \mathbf{S}_k 都不相同。因此, 对无限域中的多裂纹问题, 选择合适的无量纲距离以及对应的局部 Eshelby 矩阵 \mathbf{S}_k 就成为求解的关键。近场裂纹的选择还与研究对象中裂纹的疏密程度有关, 需要综合考虑计算精度与计算效率的平衡, 通过计算实践加以确定。对于稀疏裂纹的情况, 裂纹间的影响相对较弱, 即使近场裂纹中仅包含了一条当前裂纹, 也能保证解的收敛性。反之, 对于密集裂纹的情况, 裂纹间的影响相对较强, 近场裂纹中就需要多包含一些裂纹。

1.3 应力强度因子计算公式

根据断裂力学理论, 无限域中含有一条内置裂纹问题, 其裂纹面承受载荷作用时应力强度因子的计算公式为

$$K_I^R = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a \frac{p(\eta)(a - \eta)}{\sqrt{a^2 - \eta^2}} d\eta, \quad (14)$$

$$K_I^L = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a \frac{p(\eta)(a + \eta)}{\sqrt{a^2 - \eta^2}} d\eta. \quad (15)$$

将面力展开多项式代入上述两式中并积分, 便可得到本征 COD 计算模型应力强度因子的计算公式, 具体为

$$\left\{ \begin{aligned} K^R &= \left\{ c_0 + \frac{1}{2}[c_1 + c_2] + \frac{1 \times 3}{2 \times 4}[c_3 + c_4] + \dots + \right. \\ &\quad \left. \frac{1 \times 3 \times \dots \times (N_p - 1)}{2 \times 4 \times \dots \times N_p} [c_{N_p-1} + c_{N_p}] \right\} \sqrt{\pi a}, \\ K^L &= \left\{ c_0 + \frac{1}{2}[c_2 - c_1] + \frac{1 \times 3}{2 \times 4}[c_4 - c_3] + \dots + \right. \\ &\quad \left. \frac{1 \times 3 \times \dots \times (N_p - 1)}{2 \times 4 \times \dots \times N_p} [c_{N_p} - c_{N_p-1}] \right\} \sqrt{\pi a}, \end{aligned} \right. \quad (16)$$

其中 K^R 和 K^L 分别表示裂纹右端和裂纹左端的应力强度因子。还应指出的是, 本征 COD 裂纹模型是根据裂纹的虚拟面力展开计算应力强度因子, 避免了采用常规边界元方法中通过计算裂纹尖端局域应力或位移换算应力强度因子时的不便。

1.4 求解步骤

在本征 COD 计算模型中, 所有裂纹的本征 COD 均为待求解量, 主要分为以下 3 个阶段。

1.4.1 前处理阶段

该阶段主要包括: ① 数据初始化; ② 计算局部 Eshelby 矩阵; ③ 暂时忽略所有裂纹的存在, 结合已知的边界条件求解边界未知量; ④ 计算全部的虚拟面力; ⑤ 计算对应的初始应力强度因子。

1.4.2 迭代收敛阶段

经过离散,并结合边界条件,可将本征 COD 位移边界积分方程(1)写成矩阵的形式:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{B}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{b}, \quad (17)$$

其中 \mathbf{A} 为系数矩阵, \mathbf{B} 为与域积分有关的系数矩阵, \mathbf{b} 为右向量, 由外边界已知量及相应积分核来确定, \mathbf{x} 为外边界未知向量, $\boldsymbol{\delta}$ 为所有裂纹全局坐标系中的本征 COD, 其数值必须通过迭代来修正, \mathbf{A} , \mathbf{B} 和 \mathbf{b} 中的元素都是常量, 只需一次便可计算。

在迭代计算阶段, 假定所有裂纹不存在, 对求解域进行一次整体计算. 首先对式(11)处理虚拟裂纹问题, 即 $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$, 然后准备本征 COD 的数据库. 分为 3 步: ① 利用离散后的式(3)计算沿虚拟裂纹面上的应力; ② 确定式(9)中的面力展开系数; ③ 利用式(10)计算所有的 COD $\boldsymbol{\delta}$. 需要注意的是, 此时计算得到的 COD $\boldsymbol{\delta}$ 还是在局部坐标下的 COD, 还应将其转化为全局坐标系下的 COD $\boldsymbol{\delta}$, 其由两部分组成: ① 利用近场裂纹的虚拟面力以及局部 Eshelby 矩阵, 计算当前裂纹的本征 COD; ② 利用远场裂纹的 COD 对当前裂纹虚拟面力的影响, 修正当前裂纹的本征 COD; 然后计算全部裂纹对应的应力强度因子。

在迭代收敛阶段, 将本征 COD 数据库中保存的局部坐标系下的 COD $\boldsymbol{\delta}$ 转换到全局坐标下的本征 COD, 然后根据式(16)计算裂纹尖端的应力强度因子. 由于本征 COD 是通过迭代一步步求解的, 应力强度因子也不例外。

由式(17)可知边界未知量 \mathbf{x} 的计算公式为

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{B}\boldsymbol{\delta}^{(k)}), \quad (18)$$

其中 k 为迭代步数, 通常不超过 8 次。

迭代求解两次的应力强度因子计算之差的最大值给定为

$$K_{\max} = \max |K^{(k)} - K^{(k-1)}|, \quad (19)$$

即两次迭代之间应力强度因子分量的最大差值. 本文采用的收敛判据为: 所有裂纹两次应力强度因子计算之差的最大值小于给定值, 按如下定义:

$$\frac{K_{\max}}{\sigma\sqrt{\pi a}} \leq 10^{-3}. \quad (20)$$

如果不满足收敛判据式(20), 利用全部裂纹的本征 COD, 重新求解研究对象的边界未知量, 用更新的边界未知量 \mathbf{x} 来准备下一次的迭代, 返回上一步式(18); 如果满足了收敛判据式(20), 则进行后处理阶段。

1.4.3 样后处理阶段

迭代收敛之后, 研究目标可进行以下计算: ① 研究对象的整体性能, 如刚度、Poisson 比、各向异性等; ② 最大的裂纹应力强度因子与研究对象的断裂性能; ③ 研究对象的局部细节, 如感兴趣的局部应力(应变)场等。

2 数值验证

2.1 计算精度的验证

2.1.1 正方形内含 4 条裂纹的问题

考虑正方形板内置 4 条等长裂纹的问题, 如图 2 所示. 分别采用本征 COD 数值方法和快速多极边界元法进行分析. 在本征 COD 数值方法中, 正方形板的外边界采用了 200 个节点离散, 离散裂纹面的 Gauss 点数为 $N_g = 9$; 快速多极边界元法中, 正方形板的外边界和所有裂纹面分别采用了 400 和 360 个常单元离散, 且裂纹上、下面的节点对称配置. 图 3~5 分别给出的

是采用上述两种数值方法得到的关于裂纹尖端 A 、 B 和 C 这 3 处的 I 型无量纲应力强度因子比较。从图 3~5 可以看出,本征 COD 边界积分方程解法具有很高的计算精度。

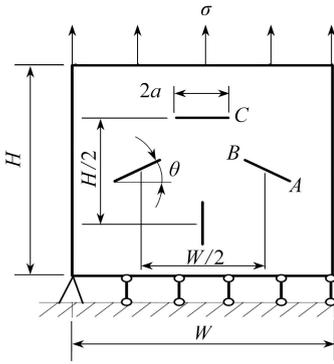


图 2 正方形板内含 4 条裂纹

Fig. 2 A square plate containing 4 cracks with the same length

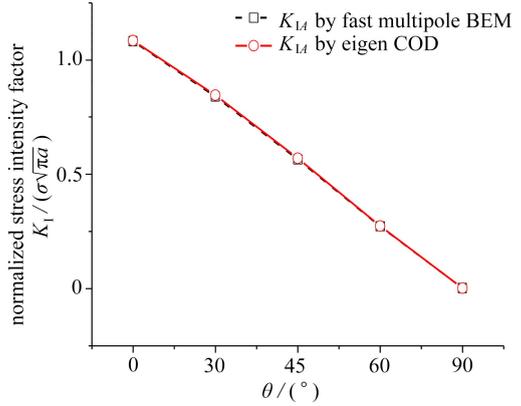


图 3 裂纹尖端 A 的 I 型无量纲应力强度因子比较

Fig. 3 Comparison of non-dimensional mode- I SIFs of crack tip A

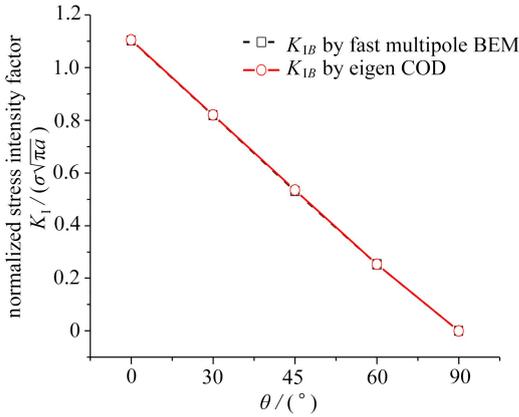


图 4 裂纹尖端 B 的 I 型无量纲应力强度因子比较

Fig. 4 Comparison of non-dimensional mode- I SIFs of crack tip B

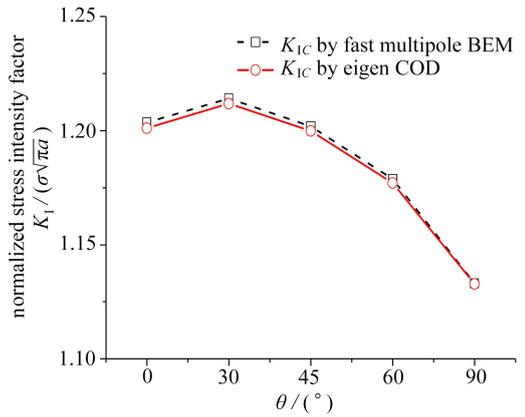


图 5 裂纹尖端 C 的 I 型无量纲应力强度因子比较

Fig. 5 Comparison of non-dimensional mode- I SIFs of crack tip C

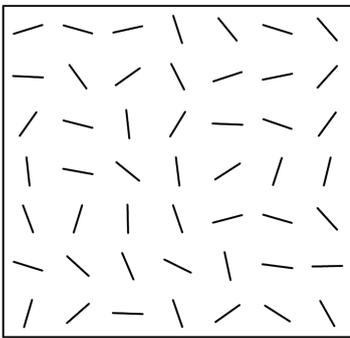


图 6 正方形板内含 $N \times N$ 等长多裂纹

Fig. 6 A square plate containing $N \times N$ cracks with the same length

2.2 计算效率的验证

考虑正方形板内含 $N \times N$ 等长多裂纹问题,如图 6 所示。本征 COD 数值方法中近场裂纹 $N_L = 9$, 离散裂纹面的 Gauss 点数 $N_g = 9$, 外边界采用了 200 个单元离散;快速多极边界元法的多极展开和局部展开截断阶数 $p = 20$, 生成的二叉树结构的叶子节点包含的最大边界单元数为 100, GMRES 迭代收敛误差 $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-6}$, 外边界采用了 400 个离散单元。

图 7 和图 8 分别给出了两种数值算法的迭代次数和 CPU 计算时间随裂纹总数 N_c 变化的比较。

从图 7 可以看出,随着裂纹数的不断增加,快速多极边界元法所需的迭代次数增加较急剧,而本征 COD 数值方法所需的迭代次数相对稳定(通常不超过 8 次),进一步表明本征 COD 数值方法在处理多裂纹问题的可行性和可靠性.从图 8 可以看出,本征 COD 数值方法的计算效率远高于采用常单元离散的快速多极边界元法.尽管两种数值算法计算模型的自由度数不一样,从本算例亦可以得出本征 COD 数值方法具有很高的计算效率,为模拟多裂纹问题提供了一种新的数值分析手段.

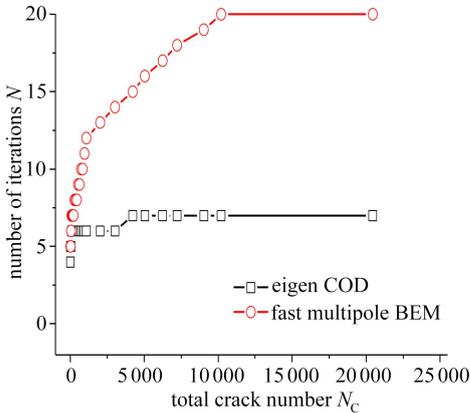


图 7 本征 COD 和快速多极边界元法的迭代次数比较

Fig. 7 Comparison of the number of iterations with the eigen COD and the FMBEM

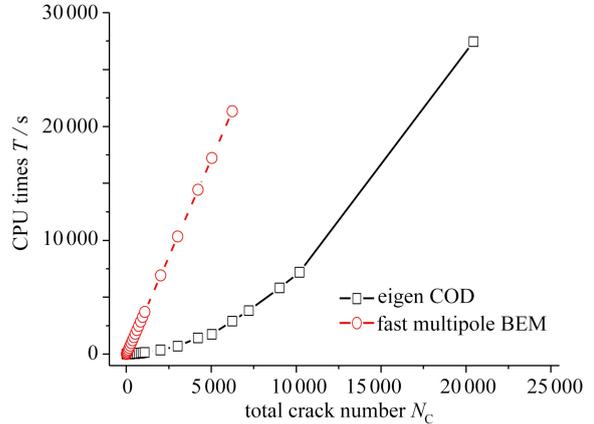


图 8 本征 COD 和快速多极边界元法的 CPU 计算时间比较

Fig. 8 Efficiencies of the 2 approaches with the eigen COD and the FMBEM

3 结 论

本文建立了本征 COD 计算模型,求解矩阵较数值 Green 函数法小,体现了用小规模模型求解大规模裂纹问题的实际意义.通过近场裂纹和远场裂纹的划分,引入局部 Eshelby 矩阵,该矩阵能刻画近场裂纹对当前裂纹的强相互作用,避免了密集裂纹情况下的数值迭代发散.数值算例分别从计算精度和计算效率两方面验证了本征 COD 边界积分方程解法模拟多裂纹问题的可行性,并与快速多极边界元法作比较.数值结果表明:本征 COD 数值方法及其计算模型具有科学性和内在的合理性,研究方法和路线是完全可行的,为求解多裂纹问题提供新的兼顾计算精度与效率、整体性能与局部细节的数值计算方法,在普通计算机上实现多裂纹固体材料力学性能的大规模数值模拟,具有重要的理论意义和工程应用价值.

致谢 本文作者衷心感谢上海大学马杭教授和美国辛辛那提大学刘轶军教授(现南方科技大学)对本文工作的指导和建议.

参考文献(References):

- [1] 杜庆华, 岑章志. 边界积分方程方法: 边界元法[M]. 北京: 高等教育出版社, 1989. (DU Qinghua, CEN Zhangzhi. *The Boundary Integral Equation Method: Boundary Element Method* [M]. Beijing: Higher Education Press, 1989. (in Chinese))
- [2] 姚振汉, 王海涛. 边界元法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010. (YAO Zhenhan, WANG Haitao. *Boundary Element Method* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2010. (in Chinese))
- [3] 付云伟, 张龙, 倪新华, 等. 考虑夹杂相互作用的复合陶瓷夹杂界面的断裂分析[J]. 力学学报,

- 2016, **48**(1): 154-162.(FU Yunwei, ZHANG Long, NI Xinhua, et al. Interface cracking analysis with inclusions interaction in composite ceramic[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, **48**(1): 154-162.(in Chinese))
- [4] 朱帝杰, 陈忠辉, 席婧仪, 等. 岩石平行偏置裂纹相互作用规律分析[J]. 岩土工程学报, 2017, **39**(2): 235-243.(ZHU Dijie, CHEN Zhonghui, XI Jingyi, et al. Interaction between offset parallel cracks in rock[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2017, **39**(2): 235-243. (in Chinese))
- [5] HWU C, HUANG S T, LI C C. Boundary-based finite element method for two-dimensional anisotropic elastic solids with multiple holes and cracks[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2017, **79**: 13-22.
- [6] CHEN M, XU Z, FAN X M. Evaluation of the T -stress and stress intensity factor for multi-crack problem using spline fictitious boundary element alternating method[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2018, **94**: 69-78.
- [7] XU Z, SU C, GUAN Z W. Analysis of multi-crack problems by the spline fictitious boundary element method based on Erdogan fundamental solutions[J]. *Acta Mechanica*, 2018, **229**(8): 3257-3278.
- [8] TELLES J C F, CASTOR G S, GUIMARAES S. A numerical Green's function approach for boundary elements applied to fracture mechanics[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1995, **38**(19): 3259-3274.
- [9] TELLES J C F, GUIMARAES S. Green's function: a numerical generation for fracture mechanics problems via boundary elements[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, **188**(4): 847-858.
- [10] VERA-TUDELA C A R, TELLES J C F. The dual reciprocity method and the numerical Green's function for BEM fracture mechanic problems[J]. *Acta Mechanica*, 2016, **227**(11): 3205-3212.
- [11] BLANDFORD G E, INGRAFFEA A R, LIGGETT J A. Two-dimensional stress intensity factor computation using the boundary element method[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1981, **17**(3): 387-404.
- [12] ALIABADI M H. Boundary element formulations in fracture mechanics[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 1997, **50**(2): 83-96.
- [13] CHEN J T, HONG H K. Review of dual boundary element methods with emphasis on hypersingular integrals and divergent series[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 1999, **52**(1): 17-33.
- [14] PORTELA A, ALIABADI M H, ROOKE D P. Dual boundary elements analysis of cracked plates: singularity subtraction technique[J]. *International Journal of Fracture*, 1992, **55**(1): 17-28.
- [15] CHEN J T, YUEH C Y, CHANG Y L, et al. Why dual boundary element method is necessary?[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2017, **76**: 59-68.
- [16] GREENGARD L F, ROKHLIN V. A fast algorithm for particle simulations[J]. *Journal of Computational Physics*, 1987, **73**(2): 325-348.
- [17] LIU Y J. *Fast Multipole Boundary Element Method-Theory and Applications in Engineering* [M]. London: Cambridge University Press, 2009.
- [18] GUO Z, LIU Y J, MA H, et al. A fast multipole boundary element method for modeling 2-D multiple crack problems with constant elements[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2014, **47**: 1-9.
- [19] GUO Z, MA H. Solution of stress intensity factors of multiple cracks in plane elasticity with

- eigen COD formulation of boundary integral equation[J]. *Journal of Shanghai University (English Edition)*, 2011, **15**(3): 173-179.
- [20] GUO Z, MA H. Stress intensity factors of periodic crack arrays with eigen COD formulation of boundary integral equation[C]//*The 3rd International Conference on Heterogeneous Material Mechanics (ICHMM)*. Shanghai, 2011.
- [21] MA H, GUO Z, MANICKA D, et al. Efficient solution of multiple cracks in great number using eigen COD boundary integral equations with iteration procedure [J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2013, **37**(3): 487-500.

Analysis of Multicrack Problems With Eigen COD Boundary Integral Equations

GUO Zhao¹, GUO Zitao¹, YI Lingyan²

(1. College of Civil Engineering and Urban Construction,
Jiujiang University, Jiujiang, Jiangxi 332005, P.R.China;

2. College of Economics and Management, Jiujiang University,
Jiujiang, Jiangxi 332005, P.R.China)

Abstract: For multicrack problems, the conventional numerical solution techniques are of low efficiency. To realize large-scale numerical simulation of multicrack problems, the eigen crack opening displacement (COD) boundary integral equations and the pertinent iteration algorithm were established. To deal with the interactions between cracks, the local Eshelby matrix was introduced. In this way, the superposition technique was employed with all cracks divided into 2 groups, i.e. the adjacent group and the far-field group, according to a non-dimensional radial distance of a crack to the current crack. In comparison to the fast multipole boundary element method with a constant element as the discrete element, the proposed computational model and the iteration algorithm were numerically verified. The numerical results show that, the model for the eigen COD boundary integral equations gets great improvement in dealing with multicrack problems, and its computation efficiency is significantly higher than those of the traditional boundary element method and the fast multipole boundary element method.

Key words: multicrack problem; eigen crack opening displacement; boundary integral equation; fast multipole boundary element method; numerical simulation

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11662005)

引用本文/Cite this paper:

郭钊, 郭子涛, 易玲艳. 多裂纹问题计算分析的本征 COD 边界积分方程方法[J]. *应用数学和力学*, 2019, **40**(2): 200-209.

GUO Zhao, GUO Zitao, YI Lingyan. Analysis of multicrack problems with eigen COD boundary integral equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(2): 200-209.