文章编号:1000-0887(2019)04-0452-11

参数广义弱向量拟平衡问题解映射的 H-连续性刻画*

邵重阳, 彭再云, 王泾晶, 周大琼

(重庆交通大学 数学与统计学院, 重庆 400074)

摘要: 研究了 Hausdorff 拓扑向量空间中的一类参数广义弱向量拟平衡问题(PGWVQEP)的稳定性.首先,给出了此问题的参数间隙函数,研究了参数间隙函数的连续性.然后, 提出了一个与参数间隙函数相关的关键假设,讨论了它的连续性,并给出关键假设的等价刻画.最后, 借助于假设,获得了 PGWVQEP 解映射 Hausdorff 半连续的充分必要条件.并举例验证了所得结果.

关 键 词: 参数广义弱向量拟平衡问题; 解映射; 参数间隙函数; Hausdorff 下半连续; Hausdorff 连续

中图分类号: O224 **文献标志码**: A DOI:10.21656/1000-0887.390198

引 言

1994 年,Blum 和 Oettli[1] 首先提出了平衡问题的数学模型.随后,这一模型于 1997 年在文献[2-3]中被推广到向量情形,即向量平衡问题.众所周知,向量平衡问题为向量变分不等式问题、向量互补问题、向量优化问题和向量鞍点问题等众多问题提供了一个统一的研究框架.一般而言,将带约束条件的向量平衡问题称为向量拟平衡问题.向量(拟)平衡问题为向量(拟)优化问题、向量(拟)鞍点问题、向量(拟)互补问题及向量(拟)变分不等式等问题提供了统一的模型.因而,近年来受到国内外众多专家学者的重视而被广泛研究.

在优化问题中,向量变分不等式和向量平衡问题领域,对解集稳定性的研究是非常有趣和重要的课题.在相关研究中,有大量关于优化问题、向量变分不等式问题或向量平衡问题(见文献[4-13]和相关文献)解集稳定性的论文.在有限维空间中,Li 和 Chen[14] 提出了一个假设 H_g,并通过假设 H_g, 获得了一类参数弱向量变分不等式解映射 Hausdorff 下半连续的充分性条件.在 Banach 空间中,Chen 和 Li[15] 给出了一个类似的条件(记为 H_{g1}),并运用 H_{g1} 得到了参数集值弱向量变分不等式(PSWVVI) 解集映射 Hausdorff 下半连续的充分性条件.Chen 等[16] 将文献[14-15]的问题扩展到 PGVQVI 问题,借助假设 H_{g2} 对其进行了研究.注意到,上述文献中主要研究了解集映射 Hausdorff 下半连续的充分性条件.然而在实际问题研究与算法构造中,对

* **收稿日期**: 2018-07-17; **修订日期**: 2018-08-31

基金项目: 国家自然科学基金(11431004;11471059);重庆市自然科学基金(cstc2017jcyjAX0382;cstc2018jcyjAX0337);重庆市创新团队(CXTDX201601022);重庆市巴渝学者计划

作者简介: 邵重阳(1993—),男,硕士(E-mail: shaocyll@ sina.com);
彭再云(1980—),男,教授,博士(通讯作者. E-mail: pengzaiyun@ 126.com).

解集映射 Hausdorff 半连续的必要性进行研究也是非常有趣的，也即是说，解映射是 Hausdorff 下半连续的能否得到类似条件 H_g 成立？在 Banach 空间中，Zhong 和 Huang[17] 从一个侧面回答了这个问题，证明了条件 H_{g3} 不仅是参数集值弱向量变分不等式解集映射 Hausdorff 下半连续的充分条件，也是其必要条件．最近，针对 Hausdorff 拓扑向量空间中的两类参数向量拟平衡问题，Anh 和 Hung[18] 给出了两个关键假设 $H_p(\gamma_0)$ 和 $H_h(\gamma_0)$，并证明了它们分别是这两类问题解映射 Hausdorff 连续的充分必要条件．

受文献[18-19]的启发，本文借助参数间隙函数 $h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma})$ 讨论一类参数广义弱向量拟平衡问题解映射的 Hausdorff 连续性．首先，定义该问题并给出适当的非线性标量化函数．其次，给出参数间隙函数并讨论其连续性．最后，研究参数向量拟平衡问题解映射的 Hausdorff 连续性，并且举例说明所得结果的正确性．由此获得了一些较新的结果．

1　预备知识

本文均假设 X,Y,Z,P 是局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间．$A\subseteq X,B\subseteq Y$ 和 $\Gamma\subseteq P$ 是非空子集．假设集值映射 $C:X\to 2^Z$ 对任意 $\boldsymbol{x}\in X$，有 $C(\boldsymbol{x})$ 是 Z 中的闭凸锥且 $\operatorname{int}C(\boldsymbol{x})\neq\varnothing$．$K:A\times\Gamma\to 2^A$，$T:A\times\Gamma\to 2^B$ 是集值映射．$f:A\times B\times A\times\Gamma\to Z$ 是均衡函数，即 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma})=\mathbf{0}$ 对任意 $\boldsymbol{x}\in A$，$\boldsymbol{t}\in B$ 和 $\boldsymbol{\gamma}\in\Gamma$ 恒成立．

考虑如下 PGWVQEP：存在 $\boldsymbol{x}\in K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma})$ 和 $\boldsymbol{t}\in T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma})$，对任意 $\boldsymbol{\gamma}\in\Gamma$ 满足

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma})\in Z\setminus-\operatorname{int}C(\boldsymbol{x}),\qquad\forall\boldsymbol{y}\in K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma}).$$

特殊情形

1）如果 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma}):=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\boldsymbol{y})$，则 PGWVQEP 模型退化为 Zhong 和 Huang[19] 的模型；

2）如果 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma}):=\langle t,\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\rangle$，则 PGWVQEP 模型退化为 Chen 等[16] 的广义参数向量拟变分不等式；

3）若 $X:=\mathbb{R}^m$，$Y:=\mathbb{R}^n$，$Z:=\mathbb{R}$，$C(\boldsymbol{x}):=\mathbb{R}_+$，$K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma}):=A$，$T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma}):=T(\boldsymbol{x})$，$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma}):=\langle t,\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\rangle$，则 PGWVQEP 模型退化为 Aubin 和 Ekeland[20] 的 Stampacchia 变分不等式．

对任意的 $\boldsymbol{\gamma}\in\Gamma$，记 $E(\boldsymbol{\gamma})=\{\boldsymbol{x}\in X:\boldsymbol{x}\in K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma})\}$．用 $S(\boldsymbol{\gamma})$ 表示 PGWVQEP 的解集，其中 $S(\boldsymbol{\gamma})=\{\boldsymbol{x}\in E(\boldsymbol{\gamma}):\exists\boldsymbol{t}\in T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma}),\text{s.t. }f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma})\in Z\setminus-\operatorname{int}C(\boldsymbol{x}),\forall\boldsymbol{y}\in K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma})\}$．在本文中，假设 $S(\boldsymbol{\gamma})$ 非空．

下面，回顾一些与连续性相关的概念及性质．

定义 1[20-21]　设 X 和 Y 是拓扑向量空间，$G:X\to 2^Y$ 是集值映射．

(i) 称 G 在点 $\boldsymbol{x}_0\in X$ 处是下半连续(lsc)的，如果对任意满足 $V\cap G(\boldsymbol{x}_0)\neq\varnothing$ 的开集 $V\subseteq Y$，都存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 $U(\boldsymbol{x}_0)$，使得对任意的 $\boldsymbol{x}\in U(\boldsymbol{x}_0)$ 有 $V\cap G(\boldsymbol{x})\neq\varnothing$；

(ii) 称 G 在点 $\boldsymbol{x}_0\in X$ 处是上半连续(usc)的，如果对 Y 中任意包含 $G(\boldsymbol{x}_0)$ 的开集 V，都存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 $U(\boldsymbol{x}_0)$，使得对任意的 $\boldsymbol{x}\in U(\boldsymbol{x}_0)$ 有 $G(\boldsymbol{x})\subseteq V$；

(iii) 称 G 在点 $\boldsymbol{x}_0\in X$ 处是 Hausdorff 上半连续(H-usc)的，如果对 Y 中原点的任意开邻域 B，存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 $U(\boldsymbol{x}_0)\subseteq X$，使得 $G(\boldsymbol{x})\subseteq G(\boldsymbol{x}_0)+B$，$\forall\boldsymbol{x}\in U(\boldsymbol{x}_0)$；

(iv) 称 G 在点 $\boldsymbol{x}_0\in X$ 处是 Hausdorff 下半连续(H-lsc)的，如果对 Y 中原点的任意开邻域 B，存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 $U(\boldsymbol{x}_0)\subseteq X$，使得 $G(\boldsymbol{x}_0)\subseteq G(\boldsymbol{x})+B$，$\forall\boldsymbol{x}\in U(\boldsymbol{x}_0)$；

(v) 称 G 在点 $\boldsymbol{x}_0\in X$ 处是连续的，如果 G 在点 $\boldsymbol{x}_0\in X$ 既是 usc 的，又是 lsc 的；

(vi) 称 G 在点 $\boldsymbol{x}_0\in X$ 处是 Hausdorff 连续的，若 G 在点 $\boldsymbol{x}_0\in X$ 既是 H-usc 的，又是 H-lsc 的；

(vii) 称 G 在点 $\boldsymbol{x}_0\in X$ 处是闭的，若对网 $\{(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n)\}\subseteq\operatorname{graph}G:=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mid\boldsymbol{y}\in G(\boldsymbol{x}),(\boldsymbol{x}_n,

$\boldsymbol{y}_n) \to (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)\}$ 有$(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \in \text{graph } G$;

(viii) 称 G 在 X 上是 lsc(resp. usc、H-lsc、H-usc)的,如果它在任意的 $\boldsymbol{x}_0 \in X$ 都是 lsc(resp. usc、H-lsc、H-usc)的.称 G 在 X 上是连续(H-连续)的,如果它在 X 上既是 usc(H-usc)的,又是 lsc(H-lsc)的.

引理 1[20-21] 设 X 和 Y 是拓扑向量空间,$G:X \to 2^Y$ 是集值映射.

(i) 如果 G 在点 $\boldsymbol{x}_0 \in X$ 处是 usc 的,则 G 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处是 H-usc 的.反之,如果 G 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处是 H-usc 的且 $G(\boldsymbol{x}_0)$ 是紧的,则 G 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处是 usc 的.

(ii) 如果 G 在点 $\boldsymbol{x}_0 \in X$ 处是 H-lsc 的,则 G 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处是 lsc 的.反之,如果 G 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处是 lsc 的且 $G(\boldsymbol{x}_0)$ 是紧的,则 G 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处是 H-lsc 的.

(iii) G 在点 $\boldsymbol{x}_0 \in X$ 处是 lsc 的,当且仅当对 X 中任意满足 $\boldsymbol{x}_\alpha \to \boldsymbol{x}_0$ 的网$\{\boldsymbol{x}_\alpha\}$和任意 $\boldsymbol{y}_0 \in G(\boldsymbol{x}_0)$ 有 $\boldsymbol{y}_\alpha \in G(\boldsymbol{x}_\alpha)$ 使得 $\boldsymbol{y}_\alpha \to \boldsymbol{y}_0$.

(iv) 若 G 具有紧值,则 G 在点 $\boldsymbol{x}_0 \in X$ 处是 usc 的,当且仅当对 X 中任意满足 $\boldsymbol{x}_\alpha \to \boldsymbol{x}_0$ 的网$\{\boldsymbol{x}_\alpha\}$和满足的 $\boldsymbol{y}_\alpha \in G(\boldsymbol{x}_\alpha)$ 的网$\{\boldsymbol{y}_\alpha\}$,有 $\boldsymbol{y}_0 \in G(\boldsymbol{x}_0)$ 和一个子网$\{\boldsymbol{y}_\beta\} \subset \{\boldsymbol{y}_\alpha\}$,使得 $\boldsymbol{y}_\beta \to \boldsymbol{y}_0$.

引理 2[22-23] 记 X,Y 是凸 Hausdorff 拓扑向量空间.集值映射 $C:X \to 2^Y$ 对任意 $\boldsymbol{x} \in X$,有 $C(\boldsymbol{x})$ 是 Y 中的闭凸锥且 $\text{int}\, C(\boldsymbol{x}) \neq \varnothing$.$e$: $X \to Y$ 是集值映射 $\text{int}\, C(\cdot)$ 的连续选择,即,$e(\cdot)$ 是连续的,且 $e(\boldsymbol{x}) \in \text{int}\, C(\boldsymbol{x})$.设集值映射 $V:X \to 2^Y$ 为 $V(\boldsymbol{x}) = Y \backslash -\text{int}\, C(\boldsymbol{x})$.定义非线性标量化函数 $\xi_e:X \times Y \to \mathbb{R}$ 为 $\xi_e(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \min\{r \in \mathbb{R}: \boldsymbol{y} \in re(\boldsymbol{x}) - C(\boldsymbol{x})\}$, 则

(i) 若 V,C 是 usc 的,则 $\xi_e(\cdot,\cdot)$ 是连续的;

(ii) $\xi_e(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) < r \Leftrightarrow \boldsymbol{y} \in re(\boldsymbol{x}) - \text{int}\, C(\boldsymbol{x})$;

(iii) $\xi_e(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \geqslant r \Leftrightarrow \boldsymbol{y} \notin re(\boldsymbol{x}) - \text{int}\, C(\boldsymbol{x})$.

2 PGWVQEP 的参数间隙函数

在本节中,将介绍 PGWVQEP 的参数间隙函数,并讨论它的重要性质.在本文中假设 K 和 T 在 $A \times \Gamma$ 上连续且具有紧值,V 和 C 在 X 上是 usc 的,f 在 $A \times B \times A \times \Gamma$ 上是连续的.

定义 2 称函数 $g:A \times \Gamma \to \mathbb{R}$ 是 PGWVQEP 的参数间隙函数,若

(i) $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma}) \leqslant 0, \ \forall \boldsymbol{x} \in K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma})$;

(ii) $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in S(\boldsymbol{\gamma})$.

对任意 $\boldsymbol{\gamma} \in \Gamma$,定义函数 $h:A \times \Gamma \to \mathbb{R}$ 如下:

$$h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma}) = \min_{\boldsymbol{t} \in T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma})} \min_{\boldsymbol{y} \in K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma})} \xi_e(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma})), \qquad \forall \boldsymbol{x} \in K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma}).$$

因为对任意$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma}) \in A \times \Gamma$,有 $K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma})$ 和 $T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma})$ 是紧集,ξ_e 和 f 是连续的,故 h 是良定的.

定理 1 $h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma})$ 是 PGWVQEP 的参数间隙函数.

证 定义函数 $\psi:E(\Gamma) \times B \times \Gamma \to \mathbb{R}$ 如下:

$$\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\boldsymbol{\gamma}) = \min_{\boldsymbol{y} \in K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma})} \xi_e(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma})), \qquad \forall \boldsymbol{x} \in E(\Gamma),\ \boldsymbol{t} \in B,\ \boldsymbol{\gamma} \in \Gamma,$$

其中

$$E(\Gamma) = \bigcup_{\boldsymbol{\gamma} \in \Gamma} E(\boldsymbol{\gamma}) = \bigcup_{\boldsymbol{\gamma} \in \Gamma} \{\boldsymbol{x} \in A: \boldsymbol{x} \in K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma})\}.$$

(i) 易知 $\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\boldsymbol{\gamma}) \leqslant 0$.反证法.假设存在$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{t}_0,\boldsymbol{\gamma}_0) \in E(\boldsymbol{\gamma}_0) \times B \times \Gamma$ 使得 $\psi(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{t}_0,\boldsymbol{\gamma}_0) > 0$, 则

$$0 < \psi(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{t}_0,\boldsymbol{\gamma}_0) = \min_{\boldsymbol{y} \in K(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)} \xi_e(\boldsymbol{x}_0, f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{t}_0,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma}_0)) \leqslant$$
$$\xi_e(\boldsymbol{x}_0, f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{t}_0,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma}_0)), \qquad \forall \boldsymbol{y} \in K(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\gamma}_0).$$

对任意给定的 $e(\boldsymbol{x}_0) \in C(\boldsymbol{x}_0)$,当 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}_0$ 时,有

$$\begin{aligned}\xi_e(\boldsymbol{x}_0, f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{t}_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)) = \xi_e(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{0}) = \\ \min\{r\in\mathbb{R}:\boldsymbol{0}\in re(\boldsymbol{x}_0)-C(\boldsymbol{x}_0)\} = \\ \min\{r\in\mathbb{R}:-re(\boldsymbol{x}_0)\in -C(\boldsymbol{x}_0)\} = \\ \min\{r\in\mathbb{R}:r\geqslant 0\}=0,\end{aligned}$$

其与假设 $\psi(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{t}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)>0$ 矛盾,故

$$\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\boldsymbol{\gamma})\leqslant 0.$$

于是可得

$$h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma})=\min_{\boldsymbol{t}\in T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma})}\min_{\boldsymbol{y}\in K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma})}\xi_e(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma}))\leqslant 0,\qquad \forall \boldsymbol{x}\in K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma}).$$

(ii) 由 ξ_e 和 f 的连续性及 T 的紧性知,对于 $\forall\boldsymbol{\gamma}\in\Gamma$,$h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma})=0$ 当且仅当存在 $\boldsymbol{t}'\in T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma})$ 使得

$$\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}',\boldsymbol{\gamma})=0,$$

即

$$\min_{\boldsymbol{y}\in K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma})}\xi_e(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}',\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma}))=0,$$

则有

$$\xi_e(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}',\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma}))\geqslant 0,\qquad \forall\boldsymbol{y}\in K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma}).$$

由引理 2 知,此不等式成立当且仅当对任意 $\boldsymbol{y}\in K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma})$ 有

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}',\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma})\notin -\operatorname{int}C(\boldsymbol{x}),$$

即

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}',\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma})\in Z\backslash -\operatorname{int}C(\boldsymbol{x}),$$

即

$$\boldsymbol{x}\in S(\boldsymbol{\gamma}).$$

□

注 1 相比于其他文献,本文的参数间隙函数 h 是明显不同的.就文献[19]而言,它的参数间隙函数不受参数 $\boldsymbol{\gamma}$ 扰动,同时要求 $\boldsymbol{t}$ 具有任意性,而本文中的函数受参数 $\boldsymbol{\gamma}$ 扰动,而且只要求 $\boldsymbol{t}$ 具有存在性.

定理 2 h 在 $A\times\Gamma$ 上是连续的.

证 (i) 先证明 h 在 $A\times\Gamma$ 上是下半连续的.对任意 $a\in\mathbb{R}$,取序列(或网){$(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha)$} $\subset X\times\Gamma$,满足$(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha)\to(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)$,$h(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha)\leqslant a$, 即

$$h(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha)=\min_{\boldsymbol{t}\in T(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha)}\min_{\boldsymbol{y}\in K(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha)}\xi_e(\boldsymbol{x}_\alpha, f(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{t},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma}_\alpha))\leqslant a,$$

由 T 的紧性知,存在 $\boldsymbol{t}_\alpha\in T(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha)$ 使得

$$h(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha)=\min_{\boldsymbol{y}\in K(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha)}\xi_e(\boldsymbol{x}_\alpha, f(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{t}_\alpha,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma}_\alpha))\leqslant a.$$

因为 ξ_e 是连续的,在 $X\times\Gamma$ 上,K 连续且具有紧值,故存在 $\boldsymbol{y}_\alpha\in K(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha)$, 使得

$$\xi_e(\boldsymbol{x}_\alpha, f(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{t}_\alpha,\boldsymbol{y}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha))=\min_{\boldsymbol{y}\in K(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha)}\xi_e(\boldsymbol{x}_\alpha, f(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{t}_\alpha,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma}_\alpha))\leqslant a. \tag{1}$$

因 K,T 是 usc 的且具有紧值,不失一般性,假设 $\boldsymbol{y}_\alpha\to\boldsymbol{y}_0\in K(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)$,$\boldsymbol{t}_\alpha\to\boldsymbol{t}_0\in T(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)$.对式(1)取极限有

$$\xi_e(\boldsymbol{x}_0, f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{t}_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\gamma}_0))\leqslant a.$$

于是对 $\boldsymbol{t}_0\in T(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)$ 有

$$\min_{\boldsymbol{y}\in K(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)}\xi_e(\boldsymbol{x}_0, f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{t}_0,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma}_0))\leqslant a,$$

因此

$$h(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)=\min_{\boldsymbol{t}\in T(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)}\min_{\boldsymbol{y}\in K(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)}\xi_e(\boldsymbol{x}_0, f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{t},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma}_0))\leqslant a,$$

这表明，对任意 $a \in \mathbb{R}$，水平集 $\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma}): h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma}) \leqslant a\}$ 是闭的，即 h 是下半连续的.

(ii) 然后证明 h 是上半连续的.对任意 $b \in \mathbb{R}$，取序列 $\{(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha)\} \subset X \times \Gamma$ 满足 $(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha) \to (\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)$，$h(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha) \geqslant b$.有

$$h(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha) = \min_{\boldsymbol{t} \in T(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha)} \min_{\boldsymbol{y} \in K(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha)} \xi_e(\boldsymbol{x}_\alpha, f(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{t},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma}_\alpha)) \geqslant b .$$

对任意 α，任意 $\boldsymbol{t} \in T(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha)$，有

$$\min_{\boldsymbol{y} \in K(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha)} \xi_e(\boldsymbol{x}_\alpha, f(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{t},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma}_\alpha)) \geqslant b . \tag{2}$$

任取 $\boldsymbol{t}_0 \in T(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)$，因 T 在 $X \times \Gamma$ 上连续且具有紧值，由式(2)知，存在 $\boldsymbol{t}_\alpha \in T(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha)$ 满足 $\boldsymbol{t}_\alpha \to \boldsymbol{t}_0$，使得

$$\min_{\boldsymbol{y} \in K(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha)} \xi_e(\boldsymbol{x}_\alpha, f(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{t}_\alpha,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma}_\alpha)) \geqslant b . \tag{3}$$

任取 $\boldsymbol{y}_0 \in K(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)$，因 K 在 $X \times \Gamma$ 上是 lsc 的且是紧的，由式(3)知，存在 $\boldsymbol{y}_\alpha \in K(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha)$ 满足 $\boldsymbol{y}_\alpha \to \boldsymbol{y}_0$，使得

$$\xi_e(\boldsymbol{x}_\alpha, f(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{t}_\alpha,\boldsymbol{y}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha)) \geqslant b . \tag{4}$$

因为 ξ_e 和 f 的连续性，则对式(4)取极限有

$$\xi_e(\boldsymbol{x}_0, f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{t}_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)) \geqslant b .$$

因此，由 $\boldsymbol{y}_0$ 及 $\boldsymbol{t}_0$ 的任意性和 K，T 的紧性知

$$h(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\gamma}_0) = \min_{\boldsymbol{t} \in T(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)} \min_{\boldsymbol{y} \in K(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)} \xi_e(\boldsymbol{x}_0, f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{t},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma}_0)) \geqslant b .$$

这表明，对任意 $b \in \mathbb{R}$，水平集 $\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma}): h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma}) \geqslant b\}$ 是闭的，即 h 是上半连续的.

综上所述，h 在 $A \times \Gamma$ 上是连续的. □

3 PGWVQEP 解集映射的 Hausdorff 连续性

在这部分，建立 PGWVQEP 解映射 Hausdorff 连续的充要条件.

定理 3 假设 A 是紧集，K 在 $A \times \Gamma$ 上连续且具有紧值，T 在 $A \times \Gamma$ 上是 usc 的且具有紧值.则 S 在 Γ 上既是 usc 的，又是闭的且具有紧值.

证 (a) 反证法.假设 S 在点 $\boldsymbol{\gamma}_0 \in \Gamma$ 处不是 usc 的.则存在包含 $S(\boldsymbol{\gamma}_0)$ 开集 U 和 Γ 中满足 $\boldsymbol{\gamma}_\alpha \to \boldsymbol{\gamma}_0$ 的网 $\{\boldsymbol{\gamma}_\alpha\}$，使得存在 $\boldsymbol{x}_\alpha \in S(\boldsymbol{\gamma}_\alpha) \backslash U$ 对任意 α 都成立.

由 $\boldsymbol{x}_\alpha \in A$ 且 A 是紧集，则 $\boldsymbol{x}_\alpha \to \boldsymbol{x}_0 \in A$ .K 在 $A \times \Gamma$ 上连续且具有紧值，故 K 在点 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)$ 处是闭的，又因 $\boldsymbol{x}_\alpha \in K(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha)$，则 $\boldsymbol{x}_0 \in K(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)$.

现证明 $\boldsymbol{x}_0 \in S(\boldsymbol{\gamma}_0)$.假设 $\boldsymbol{x}_0 \notin S(\boldsymbol{\gamma}_0)$.因为 $\boldsymbol{x}_\alpha \in S(\boldsymbol{\gamma}_\alpha)$，故存在 $\boldsymbol{t}_\alpha \in T(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha)$，使得

$$f(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{t}_\alpha,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma}_\alpha) \in Z \backslash -\operatorname{int} C(\boldsymbol{x}_\alpha), \qquad \forall \boldsymbol{y} \in K(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha) . \tag{5}$$

由于 T 在点 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)$ 处是 usc 的且具有紧值，不失一般性，假设 $\boldsymbol{t}_\alpha \to \boldsymbol{t}_0 \in T(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)$.由假设 $\boldsymbol{x}_0 \notin S(\boldsymbol{\gamma}_0)$ 知，存在 $\boldsymbol{y}_0 \in K(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)$ 使得

$$f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{t}_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\gamma}_0) \in -\operatorname{int} C(\boldsymbol{x}_0) . \tag{6}$$

由 K 在点 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)$ 的下半连续性知，存在 $\boldsymbol{y}_\alpha \in K(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha)$ 使得 $\boldsymbol{y}_\alpha \to \boldsymbol{y}_0$.由 $\boldsymbol{y}_\alpha \in K(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha)$，由式(5)知

$$f(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{t}_\alpha,\boldsymbol{y}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha) \in Z \backslash -\operatorname{int} C(\boldsymbol{x}_\alpha) . \tag{7}$$

结合 $\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{y}_\alpha,\boldsymbol{t}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha$ 的收敛性，f 的连续性，$C(\cdot)$ 的闭性和式(7)，有

$$f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{t}_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\gamma}_0) \in Z \backslash -\operatorname{int} C(\boldsymbol{x}_0),$$

这与式(6)矛盾，故假设 $\boldsymbol{x}_0 \notin S(\boldsymbol{\gamma}_0)$ 不成立，即 $\boldsymbol{x}_0 \in S(\boldsymbol{\gamma}_0) \subset U$.这与对任意 α 有 $\boldsymbol{x}_\alpha \notin U$ 成立矛盾，因此 S 在 Γ 上是 usc 的.

(b) 记 $\boldsymbol{\gamma}_0 \in \Gamma$ 是任意的,假设 $\{\boldsymbol{\gamma}_\alpha\} \subset \Gamma, \boldsymbol{x}_\alpha \in S(\boldsymbol{\gamma}_\alpha), (\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{\gamma}_\alpha) \to (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\gamma}_0)$.用(a)类似的方法,易知 $\boldsymbol{x}_0 \in S(\boldsymbol{\gamma}_0)$,因此 S 在 Γ 上是闭的.

(c) 因为 S 在 Γ 上是闭的,所以对任意 $\boldsymbol{\gamma} \in \Gamma$ 有 $S(\boldsymbol{\gamma})$ 是 A 中的闭子集.由 A 的紧性,S 是具有紧值的. □

下面通过例 1 来说明定理 3 中关于 K 连续的假设是必要的.

例 1 记 $X = Y = Z = P := \mathbb{R}$, $A = B := [-3,3]$, $\Gamma := [0,3]$, $C(x) := \mathbb{R}_+$, $K(x,\gamma) := [-3,\gamma)$, $T(x,\gamma) := [0,3]$,且 $f(x,t,y,\gamma) := x(y - x)$.

容易验证除 K 不是 usc 的以外,定理 3 的所有条件均满足.但是由 usc 的定义知, K 不是 usc 的.因为当 $\gamma_0 = 0$ 时, $K(x,\gamma_0) = K(x,0) := [-3,0)$,取 $V = (-4,0) \supset [-3,0) = K(x,0)$,对 (x,γ_0) 任意的邻域 U,有 $\gamma_1 > 0$ 和 $(x,\gamma_1) \in U$,使得 $K(x,\gamma_1) = [-3,\gamma_1) \supsetneqq V$,即 $K(x,\gamma_1) \not\subset V$.

通过直接计算,可得

$$S(\gamma) = \begin{cases} \{-3\}, & \gamma = 0, \\ \{0, -3\}, & \gamma \in (0,3]. \end{cases}$$

现在验证 $S(\gamma)$ 在 Γ 上不是 usc 的.因为当 $\gamma_0 = 0$ 时,取 $\tilde{V} = (-4,-2) \supset S(0) = \{-3\}$,对任意 γ_0 的邻域 $\tilde{U}$,都有 $\tilde{\gamma} \in \tilde{U}$ 使得 $0 \in S(\tilde{\gamma}) \not\subset \tilde{V}$.由定义 1 知,$S(\gamma)$ 在 γ_0 处不是 usc 的.因此,定理 3 中关于 K 连续的假设是不可或缺的.

推论 1 若满足定理 3 的条件,结合引理 1 中(i),易知 S 在 Γ 上是 H-usc 的.

受文献[4,14,16,19]的启发,给出如下的关键假设.

H_h: 给定 $\boldsymbol{\gamma}_0 \in \Gamma$,对 X 中原点的任意开邻域 U,存在常数 $\rho > 0$ 和 $\boldsymbol{\gamma}_0$ 一个邻域 $V(\boldsymbol{\gamma}_0)$,使得对任意的 $\boldsymbol{\gamma} \in V(\boldsymbol{\gamma}_0)$ 和 $\boldsymbol{x} \in E(\boldsymbol{\gamma}) \setminus (S(\boldsymbol{\gamma}) + U)$,有 $h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma}) \leqslant -\rho$.

接下来,研究 H_h 的性质特征.

定理 4 假设 K 和 T 在 $A \times \Gamma$ 上连续且具有紧值,对于 X 中原点的任意开邻域 U, 记

$$\Psi_U(\boldsymbol{\gamma}) := \sup_{\boldsymbol{x} \in E(\boldsymbol{\gamma}) \setminus (S(\boldsymbol{\gamma}) + U)} h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma}).$$

则 H_h 成立当且仅当对 X 中原点的任意开邻域 U, 有

$$\limsup_{\boldsymbol{\gamma} \to \boldsymbol{\gamma}_0} \Psi_U(\boldsymbol{\gamma}) < 0.$$

证 若 H_h 成立,即对于 X 中原点的任意开邻域 U,存在 $\rho > 0$ 和 $\boldsymbol{\gamma}_0$ 的一个邻域 $V(\boldsymbol{\gamma}_0)$,对任意 $\boldsymbol{\gamma} \in V(\boldsymbol{\gamma}_0)$ 和 $\boldsymbol{x} \in E(\boldsymbol{\gamma}) \setminus (S(\boldsymbol{\gamma}) + U)$,有 $h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma}) \leqslant -\rho$,这就意味着对任意 $\boldsymbol{\gamma} \in V(\boldsymbol{\gamma}_0)$,都有 $\Psi_U(\boldsymbol{\gamma}) \leqslant -\rho$, 因此

$$\limsup_{\boldsymbol{\gamma} \to \boldsymbol{\gamma}_0} \Psi_U(\boldsymbol{\gamma}) \leqslant -\rho < 0.$$

反之,对于 X 中原点的任意开邻域 U, 若

$$\theta = \limsup_{\boldsymbol{\gamma} \to \boldsymbol{\gamma}_0} \Psi_U(\boldsymbol{\gamma}) < 0,$$

则存在 $\boldsymbol{\gamma}_0$ 的一个邻域 $V(\boldsymbol{\gamma}_0)$,对任意 $\boldsymbol{\gamma} \in V(\boldsymbol{\gamma}_0)$ 都有

$$\Psi_U(\boldsymbol{\gamma}) \leqslant -\rho = \frac{1}{5}\theta < 0.$$

因此,对任意 $\boldsymbol{x} \in E(\boldsymbol{\gamma}) \setminus (S(\boldsymbol{\gamma}) + U)$, 有

$$h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma}) \leqslant -\rho,$$

即 H_h 成立. □

下面,借助于假设 H_h, 获得 PGWVQEP 解映射 H-lsc 的充分必要性结果.

定理 5 假设 A 是紧集,K 和 T 在 $X\times\Gamma$ 上是连续的且具有紧值,f 在 $A\times B\times A\times\Gamma$ 上是连续函数,则 S 在 Γ 上是 H-lsc 的,当且仅当对任意 $\boldsymbol{\gamma}_0\in\Gamma$,假设 H_h 成立.

证 (a) 反证法.假设 H_h 成立, 但 S 在 $\boldsymbol{\gamma}_0\in\Gamma$ 处不是 H-lsc 的,则存在 X 中原点的邻域 U,网 $\{\boldsymbol{x}_\alpha\}$ 和收敛到 $\boldsymbol{\gamma}_0$ 的网 $\{\boldsymbol{\gamma}_\alpha\}$ 满足

$$\boldsymbol{x}_\alpha\in S(\boldsymbol{\gamma}_0)\backslash(S(\boldsymbol{\gamma}_\alpha)+U). \tag{8}$$

由定理 3 知, $S(\boldsymbol{\gamma}_0)$ 是紧集,存在 $\boldsymbol{x}_0\in S(\boldsymbol{\gamma}_0)$ 使得 $\boldsymbol{x}_\alpha\to\boldsymbol{x}_0$.因为 U 是 X 中原点的邻域,所以存在 X 中原点的均衡开邻域 B_0(即 $\lambda B_0\subset B_0,\forall\lambda\in[-1,1]$)使得 $B_0+B_0+B_0\subset U$(见文献[20]).因此,对任意 $\varepsilon\in(0,1]$,有$(\boldsymbol{x}_0+\varepsilon B_0)\cap E(\boldsymbol{\gamma}_0)\neq\varnothing$($\boldsymbol{x}_0+\varepsilon B_0$ 为 $\boldsymbol{x}_0$ 的平移).

因为 K 在点$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)$是下半连续的,故存在收敛于 $\boldsymbol{x}_0$ 的 $\boldsymbol{x}_\alpha\in K(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha)$.取$\{\boldsymbol{x}_\alpha\}$的子列$\{\boldsymbol{x}_\beta\}$使之满足:对任意$\beta$,都有 $\boldsymbol{x}_\beta\in(\boldsymbol{x}_0+\varepsilon B_0)$ 和$(\boldsymbol{x}_0+\varepsilon B_0)\cap E(\boldsymbol{\gamma}_\beta)\neq\varnothing$ 成立.记$\boldsymbol{\zeta}_\beta\in(\boldsymbol{x}_0+\varepsilon B_0)\cap E(\boldsymbol{\gamma}_\beta)$,则有$\boldsymbol{\zeta}_\beta\notin S(\boldsymbol{\gamma}_\beta)+B_0$.否则存在$\boldsymbol{\delta}_\beta\in S(\boldsymbol{\gamma}_\beta)$使得$\boldsymbol{\zeta}_\beta-\boldsymbol{\delta}_\beta\in B_0$.因为 B_0 是均衡邻域,故有 $\boldsymbol{x}_\beta-\boldsymbol{x}_0\in B_0$, 且

$$\boldsymbol{x}_\beta-\boldsymbol{\delta}_\beta=(\boldsymbol{x}_\beta-\boldsymbol{x}_0)+(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{\zeta}_\beta)+(\boldsymbol{\zeta}_\beta-\boldsymbol{\delta}_\beta)\in B_0+B_0+B_0\subset U.$$

这就意味着 $\boldsymbol{x}_\beta\in S(\boldsymbol{\gamma}_\beta)+U$, 与式(8)矛盾.因此

$$\boldsymbol{\zeta}_\beta\notin S(\boldsymbol{\gamma}_\beta)+B_0.$$

由假设 H_h 成立知,存在$\rho>0$使得$h(\boldsymbol{\zeta}_\beta,\boldsymbol{\gamma}_\beta)\leqslant-\rho$.因为$\boldsymbol{\zeta}_\beta\in(\boldsymbol{x}_0+\varepsilon B_0)$,所以$\boldsymbol{x}_0\in(\boldsymbol{\zeta}_\beta+B_0)$.对于 B_0,由定理 2 知,h 在 $X\times\Gamma$ 上是连续的,因此

$$h(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)\leqslant-\rho<0,$$

即

$$h(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)=\min_{\boldsymbol{t}\in T(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)}\min_{\boldsymbol{y}\in K(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)}\xi_e(\boldsymbol{x}_0,f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{t},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma}_0))<0.$$

因此由 K,T 的紧性知,存在 $\boldsymbol{t}_0\in T(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)$,$\boldsymbol{y}_0\in K(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)$ 满足

$$\xi_e(\boldsymbol{x}_0,f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{t}_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\gamma}_0))<0.$$

由引理 2 知

$$f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{t}_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)\in-\operatorname{int}C(\boldsymbol{x}_0),$$

这与 $\boldsymbol{x}_0\in S(\boldsymbol{\gamma}_0)$ 相矛盾,故 S 在 Γ 上是 H-lsc 的.

(b) 假设 S 在 Γ 上是 H-lsc 的,但 H_h 在某些点 $\boldsymbol{\gamma}_0\in\Gamma$ 不成立.由定理 4 知,存在 X 中原点的一个邻域 U,满足 $\limsup_{\boldsymbol{\gamma}\to\boldsymbol{\gamma}_0}\Psi_U(\boldsymbol{\gamma})=0$($\Psi_U(\boldsymbol{\gamma})$ 与定理 4 中定义相同),则存在满足 $\boldsymbol{\gamma}_\alpha\to\boldsymbol{\gamma}_0$ 的网$\{\boldsymbol{\gamma}_\alpha\}\subset\Gamma$ 使得

$$\lim_{\gamma_\alpha\to\gamma_0}\Psi_U(\boldsymbol{\gamma}_\alpha)=\lim_{\gamma_\alpha\to\gamma_0}\sup_{\boldsymbol{x}\in E(\gamma_\alpha)\backslash(S(\gamma_\alpha)+U)}h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma}_\alpha)=0. \tag{9}$$

因为 $E(\boldsymbol{\gamma}_\alpha)\backslash(S(\boldsymbol{\gamma}_\alpha)+U)$ 是紧集且 h 是连续的,所以存在 $\boldsymbol{x}_\alpha\in E(\boldsymbol{\gamma}_\alpha)\backslash(S(\boldsymbol{\gamma}_\alpha)+U)$ 满足 $\Psi_U(\boldsymbol{\gamma}_\alpha)=h(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha)$.由式(9)有

$$\lim_{\gamma_\alpha\to\gamma_0}h(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{\gamma}_\alpha)=0.$$

因 K 是连续的且具有紧性,不妨设 $\boldsymbol{x}_\alpha\to\boldsymbol{x}_0\in K(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)$.由 h 的连续性,有 $h(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\gamma}_0)=0$ 且 $\boldsymbol{x}_0\in S(\boldsymbol{\gamma}_0)$.故对任意$\boldsymbol{\delta}\in S(\boldsymbol{\gamma}_0)$,可以找到一个网$\{\boldsymbol{\delta}_\alpha\}$,$\boldsymbol{\delta}_\alpha\subset S(\boldsymbol{\gamma}_\alpha)$,满足$\boldsymbol{\delta}_\alpha\to\boldsymbol{\delta}$.又因为 $\boldsymbol{x}_\alpha\in E(\boldsymbol{\gamma}_\alpha)\backslash(S(\boldsymbol{\gamma}_\alpha)+U)$,所以有 $\boldsymbol{x}_\alpha-\boldsymbol{\delta}_\alpha\notin U$,取极限有 $\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{\delta}\notin U$.这与 $\boldsymbol{x}_0\in S(\boldsymbol{\gamma}_0)$ 矛盾,故 H_h 对任意 $\boldsymbol{\gamma}_0\in\Gamma$ 都满足. □

下面,分别给出例 2 和 3 来验证定理 5.

例 2 记 $X=Y=P:=\mathbb{R}$,$Z:=\mathbb{R}^2$,$A=B:=[0,3]$,$\Gamma:=[0,1]$,$C(x):=\mathbb{R}^2_+$,$K(x,\gamma):=[0,1]$,$T(x,\gamma):=[\gamma,1]$,$f(x,t,y,\gamma):=((y-x)\pi^{t-1}-5,(y-x)\pi^{t-1})$,$\pi$ 为圆周率.

不难验证定理 5 的条件都满足.直接计算

$$f(x,t,y,\gamma) \in \mathbb{R}^2 \setminus -\mathrm{int}\ \mathbb{R}^2_+, \qquad \forall y \in K(x,\gamma)$$

得 $S(\gamma)=\{0\}$.显然,S 是 Hausdorff 连续的.

下面验证对任意 $\gamma_0 \in \Gamma$,H_h 是成立的.取 $e(x)=(1,1) \in \mathrm{int}\ C(x)=\mathrm{int}\ \mathbb{R}^2_+$,则

$$\begin{aligned}h(x,\gamma) &= \min_{t\in T(x,\gamma)} \min_{y\in K(x,\gamma)} \xi_e(x, f(x,t,y,\gamma)) = \\ &\min_{t\in T(x,\gamma)} \min_{y\in K(x,\gamma)} \max\{(y-x)\pi^{t-1}-5,\ (y-x)\pi^{t-1}\} = \\ &\min_{t\in T(x,\gamma)} \min_{y\in K(x,\gamma)} (y-x)\pi^{t-1} = \\ &\min_{t\in T(x,\gamma)} (0-x)\pi^{t-1} = -x.\end{aligned}$$

对任意 $x \in K(x,\gamma)$,$h(x,\gamma) \leqslant 0$,且当 $x=0$ 时,$h(x,\gamma)=0$.显然,h 是 PGWVQEP 的参数间隙函数.对任意给定的 $\gamma_0 \in \Gamma$,$U_\varepsilon(0)=(-\varepsilon,\varepsilon)$ 和 $0<\varepsilon\leqslant\gamma_0$,取 $\rho=\varepsilon$ 和足够小的 δ,有

$$h(x,\gamma) \leqslant -\rho,\ \forall \gamma \in (\gamma_0-\delta,\gamma_0+\delta),$$
$$\forall x \in E(\gamma)\setminus(S(\gamma)+U_\varepsilon(0))=[\varepsilon,1],$$

即对任意 $\gamma_0 \in \Gamma$,H_h 是成立的.

例 3　记 $X=Y=Z=P:=\mathbb{R}$,$A=B:=[-3,3]$,$\Gamma:=[0,1]$,$C(x):=\mathbb{R}_+$,$K(x,\gamma):=[-1,1]$,$T(x,\gamma):=\{x^2+\gamma^2\}$,$f(x,t,y,\gamma):=t(y-x)$.

直接计算得

$$S(\gamma)=\begin{cases}\{0,-1\}, & \gamma=0,\\ \{-1\}, & \gamma\neq 0.\end{cases}$$

因此,$S(\gamma)$ 在 Γ 上不是 H-lsc 的.现在验证 H_h 在点 $\gamma_0=0$ 处不成立.取 $e(x)=1 \in \mathrm{int}\ \mathbb{R}_+$.有

$$\begin{aligned}h(x,\gamma) &= \min_{t\in T(x,\gamma)} \min_{y\in K(x,\gamma)} t(y-x) = \\ &\min_{t\in T(x,\gamma)} t(-1-x) = (x^2+\gamma^2)(-1-x).\end{aligned}$$

对任意原点的邻域 $U=(-\varepsilon,\varepsilon)$ 和 $\rho>0$,其中 $0<\varepsilon<1$,取收敛于 0 的序列 $\{\gamma_k\}$ $(0<\gamma_k^2<\rho)$,$x_k=0 \in E(\gamma_k)\setminus(S(\gamma_k)+U)$,有

$$h(x_k,\gamma_k)=-\gamma_k^2 > -\rho.$$

因此,H_h 在点 $\gamma_0=0$ 处不成立.

现在,结合定理 3、5 和引理 1 可获得 PGWVQEP 解映射 Hausdorff 连续的充分必要条件.

定理 6　假设定理 3 和定理 5 中的条件都满足,则 S 在 Γ 上是 Hausdorff 连续的当且仅当对任意 $\gamma_0 \in \Gamma$,H_h 成立.

证　若满足定理 3 中的条件,则 S 在 Γ 上是 usc 的,又是闭的且具有紧值.结合引理 1 中(i),有 S 在 Γ 上是 H-usc 的.

若又满足定理 5 的条件,故若对任意 $\gamma_0 \in \Gamma$,H_h 是满足的,则 S 在 Γ 上是 H-lsc 的.再结合定义 1 中(iii)知,S 在 Γ 上是 Hausdorff 连续的.

若 S 在 Γ 上是 Hausdorff 连续的,则 S 在 Γ 上是 H-lsc 的.由定理 5 知,对任意 $\gamma_0 \in \Gamma$,H_h 是满足的.　□

最后,给出例 4 来说明定理 6.

例 4　记 $X=P:=\mathbb{R}$,$Y=Z:=\mathbb{R}^2$,$A:=[0,6]$,$\boldsymbol{B}:=(1,[-1,1])^{\mathrm{T}}$,$\Gamma:=[0,1]$,$C(x):=\mathbb{R}^2_+$,$K(x,\gamma):=[2,5]$,$\boldsymbol{T}(x,\gamma):=(1,[\gamma^2,1])^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{t},y,\gamma):=2(y-x)\boldsymbol{t}$.

证　易知定理 4 的所有条件都满足.通过直接计算得解映射 $S(\gamma)=\{2\}$.显然 S 是 Hausdorff 连续的.下面,验证假设 H_h 是满足的.取 $e(x)=(1,1)\in \operatorname{int}\mathbb{R}^2_+$, 有

$$h(x,\gamma)=\min_{t\in T(x,\gamma)}\min_{y\in K(x,\gamma)}\xi_e(x,2(y-x)\boldsymbol{t})=$$
$$\min_{t\in T(x,\gamma)}\min_{y\in K(x,\gamma)}\max_{1\leqslant i\leqslant 2}[2(y-x)\boldsymbol{t}]_i=$$
$$\min_{z\in[\gamma^2,1]}\min_{y\in K(x,\gamma)}\max\{2(y-x),2z(y-x)\}=4-2x.$$

对任意 $x\in K(x,\gamma)$,$h(x,\gamma)\leqslant 0$,且当 $x=2$ 时,$h(x,\gamma)=0$.显然,h 是 PGWVQEP 的参数间隙函数.对任意给定的 $\gamma_0\in\Gamma$,$U_\varepsilon(0)=(-\varepsilon,\varepsilon)$ 和 $0<\varepsilon\leqslant\gamma_0$.取 $\rho=2\varepsilon$ 和足够小的 δ, 有

$$h(x,\gamma)\leqslant-\rho,$$
$$\forall\gamma\in(\gamma_0-\delta,\gamma_0+\delta),\ \forall x\in E(\gamma)\backslash(S(\gamma)+U_\varepsilon(0))=[2+\varepsilon,5],$$

即,对任意 $\gamma_0\in\Gamma$,H_h 是成立的.

4 结　　论

本文主要研究了 Hausdorff 拓扑向量空间中的一类参数广义弱向量拟平衡问题(PGWVQEP)解映射的 H-连续性,给出了一个关键假设及其等价刻画,运用非线性标量化函数,获得了 PGWVQEP 解映射 H-连续的充要条件.能否在一般序集下研究 PGWVQEP 或相关问题的稳定性,这将是下一个值得深入研究的课题.

致谢　本文作者衷心感谢重庆交通大学校级创新团队项目;重庆交通大学校内培育基金(2018PY21)及重庆交通大学创新创业训练项目(201810618104)对本文的资助.

参考文献(References):

[1] BLUM E, OETTLI W. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems[J]. *The Mathmatics Student*, 1994, **63**: 123-145.

[2] BIANCHI M, HADJISAVVAS N, SCHAIBLE S. Vector equilibrium problems with generalized monotone bifunctions[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1997, **92**(3): 527-542.

[3] ANSARI Q H, OETTLI W, SCHLAGER D. A generalization of vectorial equilibria[J]. *Mathematical Methods of Operations Research*, 1997, **46**(2): 147-152.

[4] LONG X J, HUANG N J, TEO K L. Existence and stability of solutions for generalized strong vector quasi-equilibrium problem[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2008, **47**(3/4): 445-451.

[5] GONG X H. Continuity of the solution set to parametric weak vector equilibrium problems[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2008, **139**(1): 35-46.

[6] GONG X H, YAO J C. Lower semicontinuity of the set of efficient solutions for generalized systems[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2008, **138**(2): 197-205.

[7] ANH L Q, KHANH P Q. Semicontinuity of solution sets to parametric quasivariational inclusions with applications to traffic networks ii: lower semicontinuities applications[J]. *Set-Valued Analysis*, 2008, **16**(7/8): 943-960.

[8] ANH L Q, KHANH P Q. Continuity of solution maps of parametric quasiequilibrium problems[J]. *Journal of Global Optimization*, 2010, **46**(2): 247-259.

[9] KIMURA K, YAO J C. Semicontinuity of solution mappings of parametric generalized vector equilibrium problems[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2008, **138**(3): 429-443.

[10] KIMURA K, YAO J C. Sensitivity analysis of solution mappings of parametric vector quasi-equilibrium problems[J]. *Journal of Global Optimization*, 2008, **41**(2): 187-202.

[11] 曾静, 彭再云, 张石生. 广义强向量拟平衡问题解的存在性和 Hadamard 适定性[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(6): 651-658.(ZENG Jing, PENG Zaiyun, ZHANG Shisheng. Existence and Hadamard well-posedness of solutions to generalized strong vector quasi-equilibrium problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(6): 651-658.(in Chinese))

[12] PENG Z Y, PENG J W, LONG X J, et al. On the stability of solutions for semi-infinite vector optimization problems[J]. *Journal of Global Optimization*, 2018, **70**(1): 55-69.

[13] PENG Z Y, WANG X F, YANG X M. Connectedness of approximate efficient solutions for generalized semi-infinite vector optimization problems[J]. *Set-Valued and Variational Analysis*, 2019, **27**(1): 103-118.

[14] LI S J, CHEN C R. Stability of weak vector variational inequality[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2009, **70**(4): 1528-1535.

[15] CHEN C R, LI S J. Semicontinuity of the solution set map to a set-valued weak vector variational inequality[J]. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2007, **3**(3): 519-528.

[16] CHEN C R, LI S J, FANG Z M. On the solution semicontinuity to a parametric generalized vector quasi- variational inequality[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2010, **60**(8): 2417-2425.

[17] ZHONG R Y, HUANG N J. Lower semicontinuity for parametric weak vector variational inequalities in reflexive Banach spaces[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2011, **149**(3): 564-579.

[18] ANH L Q, HUNG N V. Gap functions and Hausdorff continuity of solution mappings to parametric strong vector quasiequilibrium problems[J]. *Journal of Industrial & Management Optimization*, 2018, **14**(1): 65-79.

[19] ZHONG R Y, HUANG N J. On the stability of solution mapping for parametric generalized vector quasiequilibrium problems[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2012, **63**(4): 807-815.

[20] AUBIN J P, EKELAND I. *Applied Nonlinear Analysis*[M]. New York: John Wiley and Sons, 1984.

[21] BERGE C. *Topological Spaces*[M]. London: Oliver and Boyd, 1963.

[22] Gerstewitz C. Nichtkonvexe dualitat in der vektaroptimierung[J]. *Wissenschafliche Zeitschift der Technischen Hochschule Leuna-Mensehung*, 1983, **25**: 357-364.

[23] LUC D T. *Theory of Vector Optimization, Lecture Notes in Economic and Mathematical Systems*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

Characterizations of H-Continuity for Solution Mapping to Parametric Generalized Weak Vector Quasi-Equilibrium Problems

SHAO Chongyang, PENG Zaiyun, WANG Jingjing, ZHOU Daqiong

(*College of Mathematics and Statistics*, *Chongqing Jiaotong University*, *Chongqing* 400074, *P.R.China*)

Abstract: The stability of a class of parametric generalized weak vector quasi-equilibrium problems (PGWVQEP) in Hausdorff topological vector spaces, were studied. First, a parametric gap function for the problem was given, and the continuity property of the function was studied. Next, a key hypothesis related to the gap function for the considered problem was presented, the characterizations of this hypothesis were discussed, and an equivalence theorem for the key hypothesis was given. Finally, by means of the hypothesis, the sufficient and necessary conditions for the Hausdorff semicontinuity of the solution mapping to PGWVQEP were obtained. Examples were given to verify the obtained results.

Key words: parametric generalized weak vector quasi-equilibrium problem; solution mapping; parametric gap function; Hausdorff lower semicontinuity; Hausdorff continuity

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11431004;11471059)

引用本文/Cite this paper:

邵重阳, 彭再云, 王泾晶, 周大琼. 参数广义弱向量拟平衡问题解映射的 H-连续性刻画[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(4): 452-462.

SHAO Chongyang, PENG Zaiyun, WANG Jingjing, ZHOU Daqiong. Characterizations of H-continuity for solution mapping to parametric generalized weak vector quasi-equilibrium problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(4): 452-462.